PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

JAVIER OSORIO ACOSTA

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
SERVICIO DE PUBLICACIONES

Problemas de Programación Lineal

Javier Osorio Acosta

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria
SERVICIO DE PUBLICACIONES
1999

OSORIO ACOSTA, Javier
Problemas de programación lineal / Javier Osorio Acosta. -- Las Palmas de Gran Canaria : Universidad de Las Palmas de G.C., Servicio de Publicaciones y Producción Documental, 1998
242 p.; 24 cm
ISBN 84-95286-01-7
1. Programación Lineal - Problemas y ejercicios II. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, ed. II. Título
519.85(076.1)

Edita: Servicio de Publicaciones
Universidad de Las Palmas de Gran canaria
Realización: Daute Diseño S.L.
Depósito Legal: G.C. 18 - 1999

Paciencia, comprensión, apoyo. Gracias Ana GUARRA

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Tradicionalmente se ha dado un enfoque eminentemente matemático a la resolución de problemas de Investigación Operativa, haciéndose énfasis en la aplicación de modelos teóricos a cuestiones relacionadas con la producción de bienes y servicios. Su ámbito de actuación se ha ceñido, básicamente, al área funcional de producción, tomando el corto plazo como horizonte temporal para el que son válidas las soluciones obtenidas tras la aplicación de las herramientas matemáticas. No obstante, en los últimos años se ha observado un progresivo cambio de enfoque, a favor de considerar a esta disciplina como un medio útil para facilitar las complejas labores de dirección de empresas. Hemos asistido, incluso, a un cambio de denominación de la materia, pasando a conocerse como Métodos Cuantitativos de Gestión, expresando por sí misma la importancia de enfocar los contenidos de esta disciplina hacia el apoyo a los procesos directivos en todas las áreas funcionales de la empresa.

Estas circunstancias se han puesto de manifiesto también con una herramienta tan difundida, y a la vez tan desconocida, como es la programación lineal. Se trata de un modelo cuyos fundamentos básicos se enseñan en multitud de centros superiores, aunque normalmente no es objeto de una profundización suficiente para mostrar toda su potencialidad a la hora de apoyar la toma de decisiones en una organización. La objeción más común que se realiza respecto a su uso se centra, fundamentalmente, en que su ámbito de aplicación se circunscribe a entornos de decisión bajo certidumbre, a la vez que supuestas unas improbables condiciones reales de linealidad. Sin embargo, la práctica ha demostrado que constituye una herramienta de un valor inestimable en los procesos de dirección de empresas, al permitir apoyar, no sólo la realización de programaciones a nivel operativo, sino también la de interpretaciones económicas, análisis de sensibilidad y planificación en función de determinados parámetros productivos.

La presente colección de problemas surge con el objetivo de intentar mostrar las diversas e interrelacionadas dimensiones de la programación lineal, y cómo puede ésta constituir una poderosa herramienta para ofrecer apoyo en la toma de decisiones empresariales. En este sentido, los problemas propuestos pretenden integrar distintas herramientas propias de la programación lineal, con objeto de lograr una visión global de ésta frente al planteamiento clásico de formular problemas correspondientes a un único tipo de herramienta. De esta forma, se combinan en los problemas técnicas como el análisis de sensibilidad, el análisis paramétrico, la programación por objetivos y la teoría de juegos, entre otras. Para la resolución de los problemas se ha tomado como referencia los algoritmos propuestos por Bazaraa y Jarvis (1981), así como la adaptación que de éstos realizó el profesor Secundino de León (1988), a quien debo mis primeros conocimientos de esta materia.

Por otra parte, es importante no olvidar que en el complejo mundo de la dirección de empresas los números y los modelos matemáticos nos pueden ofrecer interesantes recomendaciones sobre las acciones más idóneas a realizar, pero siempre es preciso complementar el análisis con otras consideraciones de corte más cualitativo, cuya no consideración, a la postre, puede marcar la abismal diferencia entre la decisión correcta y la errónea. Por ello, animo a tener siempre en mente que el ideal es combinar apropiadamente tanto las herramientas cuantitativas como las cualitativas para la toma de decisiones, sin limitarse a ceñir el análisis a uno de ambos tipos únicamente.

Quisiera, desde estas líneas, agradecer a Víctor Manchado Morales y a Miguel Ángel Acosta Rodríguez sus laboriosos y nada sencillos trabajos de mecanografiado. También deseo agradecer a Nieves Pérez Godiño y a Marta Ascanio Arroyo su inestimable colaboración en el proceso de edición de todo el material escrito. Por último, mostrar mi mayor aprecio por todos los alumnos a los que he tenido la fortuna de enseñar los fundamentos de esta materia, porque han sido ellos los artífices de que este trabajo haya visto la luz. Con él va mi deseo de que en el futuro otros encuentren en este texto un material útil en su formación académica.

Las Palmas de Gran Canaria.

Javier Osorio Acosta

PROBLEMA 1

En el último consejo de dirección de la empresa "La rosca loca" se llegó a la conclusión de que la razón por la que sus productos (obviamente roscas de maíz) no son adquiridos es porque el gran público, simplemente, los desconoce. Ante tamaña evidencia, el nuevo jefe comercial -que acaba de terminar un cursillo acelerado de publicidad por fascículos- propone la idea de dar a conocer los productos de la empresa de una forma distinta a la habitual, en este caso regalando roscas en algunas salas de cine de la ciudad. La idea le ha venido aprovechando que su padre es el dueño de estas salas y le permite promocionar sus roscas sin cobrar nada a la empresa y porque, sinceramente, su padre no cree que se vendan ni aún después de haberlas regalado. Eso sí, exige que las roscas de la promoción sean distintas a las habituales de venta en cines, porque si no le haría perder dinero por las roscas que deja de vender. Una vez logrado el acuerdo, la empresa se plantea no gastarse más de 800.000 pts semanales en la fabricación de roscas de promoción mientras dure ésta. El dinero será asignado para la distribución gratuita de cuatro productos: roscas rosas, roscas verdes extra saladas, roscas beodas y roscas arco-iris. El objetivo de la campaña es alcanzar al mayor número posible de consumidores potenciales dispuestos a probar los productos ofertados. La tabla muestra el número de personas a las que se llega normalmente por medio de la distribución de una tonelada de producto de cualquiera de los distintos tipos de roscas. También se ofrece el coste por cada tonelada de producto y el número máximo de toneladas que pueden fabricarse semanalmente para dedicarse a promoción.

PRODUCTO	CONSUMIDORES POTENCIALES	COSTE POR TONELADA (pts)	TONELADAS MÁXIMAS POR SEMANA
Roscas rosas	5.000	80.000	12
Roscas verdes extra saladas	8.500	92.500	5
Roscas beodas	2.400	29.000	25
Roscas arco-iris	2.800	38.000	20

El acuerdo alcanzado por la empresa y las salas de cine obliga que, al menos, se distribuyan 5 toneladas de las roscas beodas y roscas arco-iris conjuntamente por semana. Para asegurar una campaña del más amplio alcance, la dirección también insiste en no invertir más de 180.000 pts en la distribución simultánea de roscas beodas y roscas arco-iris. Con los datos anteriores, determinar el número de toneladas de cada tipo de roscas que semanalmente han de distribuirse para conseguir que el mayor número posible de consumidores potenciales conozcan los productos de "La rosca loca".

SOLUCIÓN:

Llamando:

X_1: Toneladas de roscas rosas destinadas a promoción / semana.
X_2: Toneladas de roscas verdes extra saladas destinadas a promoción / semana.
X_3: Toneladas de roscas beodas destinadas a promoción / semana.
X_4: Toneladas de roscas arco-iris destinadas a promoción / semana.

Objetivo:

$$\text{Maximizar (Max) } Z = 5.000 \cdot X_1 + 8.500 \cdot X_2 + 2.400 \cdot X_3 + 2.800 \cdot X_4$$

Sujeto a (s.a.)

$$\begin{array}{lllll}
80.000 \cdot X_1 & +92.500 \cdot X_2 & +29.000 \cdot X_3 & +38.000 \cdot X_4 & \leq 800.000 \\
 & & X_3 & +X_4 & \geq 5 \\
 & & 29.000 \cdot X_3 & +38.000 \cdot X_4 & \leq 180.000
\end{array}$$

$0 \leq X_1 \leq 12$ $\qquad$ $0 \leq X_2 \leq 5$

$0 \leq X_3 \leq 25$ $\qquad$ $0 \leq X_4 \leq 20$

Expresando el problema en la forma estándar de minimización equivalente:

$$-\text{Minimizar (Min) } Z = -5.000 \cdot X_1 - 8.500 \cdot X_2 - 2.400 \cdot X_3 - 2.800 \cdot X_4 + 20.000 \cdot X_8$$

$$\left.\begin{array}{llllllll}
80 \cdot X_1 & +92'5 \cdot X_2 & +29 \cdot X_3 & +38 \cdot X_4 & +X_5 & & & =800 \\
 & & X_3 & +X_4 & & -X_6 & & +X_8 = 5 \\
 & & 29 \cdot X_3 & +38 \cdot X_4 & & & +X_7 & =180
\end{array}\right\}$$

$0 \leq X_1 \leq 12$ $\qquad$ $0 \leq X_2 \leq 5$

$0 \leq X_3 \leq 25$ $\qquad$ $0 \leq X_4 \leq 20$ $\qquad$ $X_8 \geq 0$ (variable artificial)

Se ha introducido una variable artificial X_8 a la que se le asigna un coeficiente de coste M = 20.000 para resolver el problema por el método de penalización. El valor del coeficiente M podría ser distinto del que se ha utilizado en el ejemplo, siempre y cuando fuera suficiente para penalizar un valor no nulo de la variable artificial.

En principio, parece lógico situar X_2 en su cota superior, ya que es el producto que puede llegar a más consumidores potenciales.

$$\overline{X}_B=\{X_5,\ X_8,\ X_7\};\overline{B}=\{\overline{a}_5,\ \overline{a}_8,\ \overline{a}_7\}$$

$$\overline{C}_B=\{C_5,\ C_8,\ C_7\};\quad \overline{C}_B=\{0,\ 20000,\ 0\}$$

$$\overline{X}_{N_1}=\{X_1,\ X_3,\ X_4,\ X_6\};\quad \overline{N}_1=\{\overline{a}_1,\ \overline{a}_3,\ \overline{a}_4,\ \overline{a}_6\}$$

$$\overline{X}_{N_2}=\{X_2\};\quad \overline{N}_2=\{\overline{a}_2\}$$

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}80 & 92'5 & 29 & 38 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 29 & 38 & 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases}X_1=0\,(l)\\ X_2=5\,(u)\\ X_3=0\,(l)\\ X_4=0\,(l)\\ X_6=0\,(l)\end{cases}\qquad \overline{N}_1=\begin{bmatrix}80 & 29 & 38 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 29 & 38 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overline{N}_2=\begin{bmatrix}92'5\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

Los valores iniciales de la función objetivo y de las variables básicas son:

$$\hat{Z}=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}-\left(\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_1-\overline{C}_{N_1}\right)\cdot\overline{l}_{N_1}-\left(\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_2-\overline{C}_{N_2}\right)\cdot\overline{u}_{N_2}$$

$$\hat{Z}=(0,\ \ 20.000,\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}800\\ 5\\ 180\end{pmatrix}-\left\{(0,\ \ 20.000,\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}80 & 29 & 38 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 29 & 38 & 0\end{pmatrix}-(-5.000,\ \ -2.400,\ \ -2.800,\ \ 0)\right\}$$

$$\cdot(0,\ \ 0,\ \ 0,\ \ 0)-\left\{(0,\ \ 20.000,\ \ 0)\cdot\begin{pmatrix}92'5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}-(-8.500)\right\}\cdot 5=+100.000-42.500=57.500$$

$$\underline{\hat{b}}=\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}-\overline{B}^{-1}.\overline{N}_1\cdot\overline{l}_N-\overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_2\cdot\overline{u}_{N_2}=\begin{pmatrix}X_5\\ X_8\\ X_7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}800\\ 5\\ 180\end{pmatrix}-\overline{B}^{-1}\cdot(92'5\ \ 0\ \ 0)^T\cdot(5)=\begin{pmatrix}800\\ 5\\ 180\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}462'5\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}337'5\\ 5\\ 180\end{pmatrix}\geq\overline{0}\ \text{ Sol. Básica Factible}$$

Los valores iniciales correspondientes a la fila cero quedan:

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 20.000 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 80 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (-5.000) = 5.000$$

$Z_2 - C_2 = 8.500$

$Z_3 - C_3 = 20.000 + 2.400 = 22.400$

$Z_4 - C_4 = 20.000 + 2.800 = 22.800$

$Z_6 - C_6 = -20.000$

La 1ª tabla sería:

	l	u	l	l		l			
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**	**LD**
Z	5.000	8.500	22.400	22.800	0	-20.000	0	0	57.500
X_5	80	92'5	29	38	1	0	0	0	337'5
X_8	0	1	1	1	0	-1	0	1	5
X_7	0	0	29	**38**	0	0	1	0	180

l: cota inferior
u: cota superior

$$\alpha_K = Max\left(\underset{j \in \Re_1}{Max}(z_j - c_j), \quad \underset{j \in \Re_2}{Max}(c_j - z_j) \right) = Max(22.800, \quad -8.500) = 22.800 = Z_4 - C_4$$

Como $\alpha_K > 0 \Rightarrow$ Solución mejorable.

X_4 candidata a entrar en la base; $K=4; K \in \Re_1$.

$$\gamma_1 = \underset{1 \le i \le m}{Min}\left(\frac{\underline{b}_i - l_{Bi}}{y_{ik}} : y_{ik} \ge 0 \right)$$

$$\gamma_1 = Min\left(\frac{337'5 - 0}{38}, \quad \frac{5-0}{1}, \quad \frac{180-0}{38} \right) = Min(8'88, \quad 5, \quad 4'736) = \frac{\underline{b}_3 - l_{B_3}}{y_{34}} = 4'736$$

X_7 es candidata a salir de la base.

$\gamma_2 = \infty$ porque $\overline{y}_4 \ge \overline{0}$

$$\gamma_3 = u_4 - l_4 = 20 - 0 = 20$$
$$\Delta_4 = Min(\gamma_1,\ \ \gamma_2,\ \ (u_4 - l_4)) = Min(4'736,\ \ \infty,\ \ 20) = 4'736$$

X_4 entra en la base.

X_7 sale de la base.

Pivoteamos sobre y_{34} excepto el **LD**.

$$Z = \hat{Z} - (Z_k - C_k)\cdot \Delta_k = 57.500 - (22.800)\cdot 4'736 = -50480'8$$

$$\underline{b}' = \begin{pmatrix} X_5 \\ X_8 \\ X_7 \end{pmatrix} = \underline{b} - \overline{y}_k \cdot \Delta_k = \begin{pmatrix} 337'5 \\ 5 \\ 180 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 38 \\ 1 \\ 38 \end{pmatrix} \cdot 4'736 = \begin{pmatrix} 157'53 \\ 0'26 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\underline{b}'_3 = X_4 = l_k + \Delta_k = l_4 + \Delta_4 = 0 + 4'736 = 4'736$$

	1	u	1			1	1		
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	LD
Z	5.000	8.500	5.000	0	0	-20.000	-600	0	-50.481
X_5	80	92'5	0	0	1	0	-1	0	157'5
X_8	0	0	0'24	0	0	-1	-0'03	1	0'264
X_4	0	0	0'76	1	0	0	0'03	0	4'736

Dos candidatos a entrar en la base, puesto que α_k=5000, k=1 o k=3

Tras tres iteraciones similares, los resultados finales, referidos a cada semana, son:

X_1: 1'9 Toneladas (1.900 Kg) de roscas rosas fabricadas para promoción.
X_2: 5 Toneladas (5.000 Kg) de roscas verdes extra saladas para promoción.
X_3: 6'2 Toneladas (6.200 Kg) de roscas beodas fabricadas para promoción.
X_4: 0 No se fabrican roscas arco-iris para promoción.

PROBLEMA 2

Una empresa que realiza laminados de aceros de aleación especial produce dos tipos de láminas, que le reportan 8.000 y 6.000 pesetas netas respectivamente por cada metro producido. El proceso consta de una etapa previa de acondicionamiento del acero, otra de laminado propiamente dicho, y una tercera de pulido de la superficie resultante, disponiéndose diariamente para cada actividad de un número de horas limitado. Las horas requeridas por unidad de producto y las horas totales diarias disponibles para cada actividad se muestran en la tabla adjunta:

	Horas requeridas por unidad de producto		
	Laminado 1	Laminado 2	Horas totales disponibles
Acondicionamiento	4	2	60
Laminado	2	4	48
Pulido	6	2	76

En principio no existen limitaciones de material, si bien la empresa está obligada a producir al menos un metro de laminado 1, y un metro también de laminado 2 diariamente con objeto de generar una rentabilidad mínima. Por el contrario, debido a acuerdos en el sector siderúrgico de control de la competencia, no puede producir más de 15 metros diarios de laminado 1, ni más de 5 metros diarios de laminado 2.

a) Con los datos anteriores calcular la programación de producción que maximiza los beneficios de la empresa.

b) Suponiendo que interesara contratar más horas diarias de las actividades del proceso, ¿cuál sería el valor máximo que se pagaría por cada hora adicional?

SOLUCIÓN:

a) Llamando X_1: metros de laminado 1 producidos.

X_2: metros de laminado 2 producidos.

La función de producción a optimizar sería:

$$\text{Max } Z = 8.000 \cdot X_1 + 6.000 \cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{ll} 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 & \leq 60 \\ 2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 & \leq 48 \\ 6 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 & \leq 76 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq X_1 \leq 15 \\ 1 \leq X_2 \leq 5 \end{array}$$

Transformando el problema:

$$\text{Min } Z = -8.000 \cdot X_1 - 6.000 \cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llll} 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + X_3 & & & = 60 \\ 2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 & + X_4 & & = 48 \\ 6 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 & & + X_5 & = 76 \end{array}\right\} \qquad \begin{array}{l} 1 \leq X_1 \leq 15 \\ 1 \leq X_2 \leq 5 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 0 \leq X_3 \\ 0 \leq X_4 \\ 0 \leq X_5 \end{array}$$

Para resolver el problema utilizamos el algoritmo simplex para variables acotadas. Dado que se trata de maximizar interesaría asignar a las variables su cota superior, pero esto daría lugar a que se perdiera la factibilidad. Por ello se asignará una variable a su cota superior y otra a su cota inferior, y se comprobará si es factible.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \quad \overline{B} = [\overline{a}_3 , \overline{a}_4 , \overline{a}_5] \qquad \overline{X}_B = \{X_3, \quad X_4, \quad X_5\}$$

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = l_1 = 1 \\ X_2 = u_2 = 5 \end{array}\right\| \Rightarrow \begin{array}{l} \overline{N}_1 = \{\overline{a}_1\} \\ \overline{N}_2 = \{\overline{a}_2\} \end{array}$$

Aplicando el algoritmo simplex:

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}\right) \cdot \overline{l}_{N_1} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 - \overline{C}_{N_2}\right) \cdot \overline{u}_{N_2} =$$
$$= 0 - \left(0 - (-8.000)\right) \cdot 1 - \left(0 - (-6.000)\right) \cdot 5 = -38.000$$

$$\underline{\overline{b}} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 \cdot \overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 \cdot \overline{u}_{N_2}$$

$$\underline{\overline{b}} = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 48 \\ 76 \end{pmatrix} - (4,\ 2,\ 6)^t \cdot (1) - (2,\ 4,\ 2)^t \cdot (5) = \begin{pmatrix} 46 \\ 26 \\ 60 \end{pmatrix} \geq \overline{0} \quad \text{Sol. inicial factible}$$

A continuación se calculan los valores iniciales de la fila cero en la primera tabla Simplex

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = 0 + 8.000 = 8.000$$

$$Z_2 - C_2 = 6.000$$

La 1ª tabla simplex sería:

	l	u				
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	8.000	6.000	0	0	0	-38.000
X_3	4	2	1	0	0	46
X_4	2	4	0	1	0	26
X_5	**6**	2	0	0	1	60

l: cota inferior
u: cota superior

Comprobamos si esta solución es mejorable:

$$\alpha_k = Max\left(\underset{j \in \Re_1}{Max}\left(z_j - c_j\right), \underset{j \in \Re_2}{Max}\left(c_j - z_j\right) \right) = Max(8.000, -6.000) = 8.000 > 0$$

Solución mejorable; k=1; X_1 es candidato a entrar en la base.

$$k \in \Re_1 \Rightarrow \qquad \gamma_1 = \underset{1 \le i \le m}{Min}\left\{ \frac{\underline{b}_i - l_{B_i}}{y_{ik}} : y_{ik} \ge 0 \right\}$$

$$\gamma_1 = Min\left\{ \frac{46-0}{4}, \quad \frac{26-0}{2}, \quad \frac{60-0}{6} \right\} = \frac{\underline{b}_3 - l_{B_3}}{y_{31}}; \quad \gamma_1 = 10$$

X_5 es candidato a salir de la base.

$\gamma_2 = \infty$; ya que $\bar{y}_k = \bar{y}_1 \ge 0$

$\gamma_3 = u_1 - l_1 = 15 - 1 = 14$

$$\Delta_1 = Min\{\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad u_1 - l_1\} = Min\{10, \quad \infty, \quad 14\} = 10$$

$\Rightarrow X_5$ sale de la base y se pivotea sobre y_{31}.

los nuevos valores del lado derecho serían:

$$Z = \hat{Z} - (z_k - c_k) \cdot \Delta_k = -38.000 - (8.000) \cdot 10 = -118.000$$

$$\bar{b} = \hat{b} - \bar{y}_k \cdot \Delta_k = \begin{Bmatrix} 46 \\ 26 \\ 60 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 4 \\ 2 \\ 6 \end{Bmatrix} \cdot 10 = \begin{Bmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow X_3 \\ \leftarrow X_4 \\ \leftarrow X_5 \end{matrix}$$

$$\hat{b}_k = l_k + \Delta_k = 1 + 10 = 11 \leftarrow X_1$$

La nueva tabla, una vez hecho el pivoteo sería:

	X_1	X_2 (u)	X_3	X_4	X_5 (l)	LD
Z	0	10.000/3	0	0	-4.000/3	-118.000
X_3	0	2/3	1	0	-2/3	6
X_4	0	10/3	0	1	-1/3	6
X_1	1	1/3	0	0	1/6	11

X_1= 11 metros diarios. $X_3 = 6$ horas sobran de acondicionamiento.

X_2= 5 metros diarios. $X_4 = 6$ horas sobran de laminado.

Z = 118.000 pts. $X_5 = 0$; el cuello de botella estaría en el pulido.

b) Para saber cuánto se podría pagar como máximo una hora adicional planteamos el problema dual. De entrada, ya se observa que no nos interesará contratar horas adicionales de acondicionado y laminado pues nos sobran, pero sí interesa de pulido.

Primal: Máx $Z = 8.000 \cdot X_1 + 6.000 \cdot X_2$

S.a.

$$\left.\begin{array}{ll} 4 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 & \leq 60 \\ 2 \cdot X_1 + 4 \cdot X_2 & \leq 48 \\ 6 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 & \leq 76 \end{array}\right\} \qquad X_1, X_2 \geq 0$$

Dual: Mín $Z' = 60 \cdot w_1 + 48 \cdot w_2 + 76 \cdot w_3$

S.a.

$$\begin{array}{l} 4 \cdot w_1 + 2 \cdot w_2 + 6 \cdot w_3 \geq 8.000 \\ 2 \cdot w_1 + 4 \cdot w_2 + 2 \cdot w_3 \geq 6.000 \end{array} \qquad w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

Por el teorema de holgura complementaria:

La 1ª restricción Primal tiene holgura. $\Longrightarrow$ $w_1 = 0$

La 2ª restricción Primal tiene holgura. $\Longrightarrow$ $w_2 = 0$

La 3ª restricción Primal no tiene holgura. $\Longrightarrow$ $w_3 \neq 0$

Resolviendo, utilizando la tabla óptima y aprovechando las características especiales de los valores $Z_j - C_j$ para las variables de holgura iniciales:

$$Z_j - C_j = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_j - c_j = \overline{w}^* \cdot \overline{a}_j - c_j$$

$$Z_3 - C_3 = 0 = (w_1, \quad w_2, \quad w_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \ ; w_1 = 0 \ \frac{\text{pts}}{\text{h}} \text{ acondicionado}$$

$$Z_4 - C_4 = 0 = (w_1, \quad w_2, \quad w_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \ ; w_2 = 0 \ \frac{\text{pts}}{\text{h}} \text{ laminado}$$

$$Z_5 - C_5 = -\frac{4}{3} = (w_1, \quad w_2, \quad w_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 ; \ w_3 = \left| -\frac{4}{3} \right| ; w_3 = \frac{4.000}{3} = 1.333'33 \ \frac{\text{pts}}{\text{h}} \text{ pulido}$$

Cada hora de pulido incrementaría los beneficios netos en 1.333’33 pts. Sobre esta cantidad se habrá de negociar.

Es lógico que $\omega_1 = \omega_2 = 0$, debido a que la 1ª y 2ª restricciones tienen holgura, es decir, ha sobrado una serie de horas de acondicionamiento y laminado. Por lo tanto, una hora adicional de ambos tratamientos no nos supondría un mayor beneficio.

PROBLEMA 3

Una empresa dedicada a la fabricación de diferentes artículos, ante la inminente llegada de la estación invernal se plantea establecer su política de fabricación y almacenaje de estufas de gas para el primer cuatrimestre del año, es decir, para los meses de enero, febrero, marzo y abril. Debido a que se trata de un producto estrella, y para mantener la lealtad de los clientes, la dirección de la empresa desea que la demanda prevista de este producto sea totalmente satisfecha. Dicha demanda se estima en 9.000 uds. en enero, 12.000 uds. en febrero, 14.000 uds. en marzo y 13.500 uds. en abril. Para hacer frente a estos pedidos la empresa tiene una capacidad de producción de 13.000 uds. al mes, siendo el coste unitario de fabricación de 4.000 pts. No obstante, debido al proceso de modernización de equipos que la empresa está llevando a cabo, se espera que el 1 de abril comience a funcionar una nueva línea de fabricación que situaría la capacidad de producción en 15.000 estufas al mes, reduciéndose los costes unitarios, situándose estos en 3.500 pts.

Procedente de la temporada anterior, se cuenta con un inventario inicial de 1.325 estufas que pueden ser utilizadas para satisfacer la demanda. Asimismo, ante posibles eventualidades futuras, se desea que al final del cuatrimestre considerado se disponga en almacén de un inventario total de 800 unidades. Para facilitar el ajuste productivo se puede utilizar el almacén para el almacenamiento de unidades de un mes a otro. La capacidad máxima de almacenamiento es de 2.000 estufas y el coste por unidad en inventario al final de cada mes es de 500 pts.

Formular y resolver un problema de programación lineal para minimizar el coste de fabricación y almacenamiento durante el cuatrimestre considerado, teniendo en cuenta que los costes derivados del inventario inicial y final entran dentro de otra partida presupuestaria que no se considera en esta programación.

SOLUCIÓN:

Aunque los valores que se van a manejar en este problema deben ser enteros, dado que las cantidades son relativamente elevadas se resolverá mediante Programación Lineal, dándose por buena la aproximación obtenida en los resultados finales.

Distribución en el primer cuatrimestre:

Enero	Febrero	Marzo	Abril
D: 9.000 uds	D:12.000 uds	D: 14.000 uds	D: 13.500 uds

Capacidad de producción mensual = 13.000 uds con un coste de 4.000 pts/ud.

Capacidad de producción a 1 de abril = 15.000 uds con coste de 3.500 pts/ud.
El inventario inicial es de 1.325 unidades.
El inventario que ha de haber al final es de 800 unidades.
El coste de almacenamiento es de 500 pts/ud
Capacidad máxima de almacenamiento = 2.000 unidades

Llamando X_j: nº de unidades fabricadas en el mes j; (j=1,...4)
" y_j: nº de " en stock al final del mes j; (j=1,...3)

El problema quedaría:

Min $Z = 4.000 \cdot X_1 + 500 \cdot y_1 + 4.000 \cdot X_2 + 500 \cdot y_2 + 4.000 \cdot X_3 + 500 \cdot y_3 + 3.500 \cdot X_4$

S.a.

$$\left.\begin{array}{lll} X_1 & +1.325 & = 9.000 + y_1 \\ X_2 & + \quad y_1 & = 12.000 + y_2 \\ X_3 & + \quad y_2 & = 14.000 + y_3 \\ X_4 & + \quad y_3 & = 13.500 + 800 \end{array}\right\}$$

$$\begin{array}{ll} X_1 \leq 13.000 & y_1 \leq 2.000 \\ X_2 \leq 13.000 & y_2 \leq 2.000 \\ X_3 \leq 13.000 & y_3 \leq 2.000 \\ X_4 \leq 15.000 & \end{array}$$

El problema queda de la forma:

Min $Z = 4.000 \cdot X_1 + 500 \cdot y_1 + 4.000 \cdot X_2 + 500 \cdot y_2 + 4.000 \cdot X_3 + 500 \cdot y_3 + 3.500 \cdot X_4$

S.a.

$$\begin{array}{cccccccc} X_1 & & & & -y_1 & & & = 7.675 \\ & X_2 & & & +y_1 & -y_2 & & = 12.000 \\ & & X_3 & & & +y_2 & -y_3 & = 14.000 \\ & & & X_4 & & & +y_3 & = 14.300 \end{array}$$

Con $\begin{array}{c} 0 \leq X_1, X_2, X_3 \leq 13.000 \\ 0 \leq X_4 \leq 15.000 \end{array}$ $\quad 0 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 2.000$

Este problema puede ser resuelto añadiendo variables artificiales para obtener una base inicial factible correspondiente a la matriz identidad. También se podría resolver aprovechando que en la matriz de restricciones aparece en las primeras cuatro columnas una matriz identidad.

Por tratarse de una situación más general, se resolverá primeramente mediante variables artificiales. Para ello se añaden cuatro variables artificiales y la función objetivo se adapta para resolver el problema mediante el método de penalización, asignando a las variables artificiales un coeficiente de coste M = 25.000.

Min $Z = 4.000 \cdot X_1 + 500 \cdot y_1 + 4.000 \cdot X_2 + 500 \cdot y_2 + 4.000 \cdot X_3 + 500 \cdot y_3 + 3.500 \cdot X_4 +$
$+25.000 \cdot X_5 + 25.000 \cdot X_6 + 25.000 \cdot X_7 + 25.000 \cdot X_8$

S.a.

$$
\begin{array}{lllllllllllll}
X_1 & & & & -y_1 & & & +X_5 & & & & = 7.675 \\
& X_2 & & & +y_1 & -y_2 & & & +X_6 & & & = 12.000 \\
& & X_3 & & & +y_2 & -y_3 & & & +X_7 & & = 14.000 \\
& & & X_4 & & & +y_3 & & & & +X_8 & = 14.300
\end{array}
$$

$$
\text{Con} \quad
\begin{array}{l}
X_1, X_2, X_3 \leq 13.000 \\
X_4 \leq 15.000 \\
X_5, X_6, X_7, X_8 \geq 0
\end{array}
\qquad y_1, y_2, y_3 \leq 2.000
$$

Para la resolución de este problema se utilizará el algoritmo de variables acotadas. La matriz de restricciones es: (una vez se han añadido las variables artificiales X_5, X_6, X_7, X_8)

$$
\overline{A} = \left[\begin{array}{ccccccc|cccc}
1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] \qquad M = 25.000 \text{ (Coeficiente de coste)}
$$

Las variables y_1, y_2, y_3, por corresponder a unos valores que interesa minimizar (implican costes que no añaden valor al producto) se situarán en su cota inferior.

En cuanto a las variables X_1, X_2, X_3, X_4 si en un primer tanteo se les sitúa en su cota superior se observa que la solución inicial sería no factible por aparecer valores negativos. Ante esta situación resulta más procedente situar una de ellas en su cota superior y las restantes en la inferior.

$$\overline{X}_{N_1} = (X_1, \quad X_2, \quad X_4, \quad y_1, \quad y_2, \quad y_3);$$

$$\overline{N}_1 = (\overline{a}_{X_1}, \quad \overline{a}_{X_2}, \quad \overline{a}_{X_4}, \quad \overline{a}_{y_1}, \quad \overline{a}_{y_2}, \quad \overline{a}_{y_3})$$

$$\overline{X}_{N_2} = [X_3] \qquad \overline{N}_2 = [\overline{a}_{x_3}]$$

$$\overline{B} = [\overline{a}_{X_5}, \quad \overline{a}_{X_6}, \quad \overline{a}_{X_7}, \quad \overline{a}_{X_8}]$$

Los valores iniciales de la matriz serían:

$$\hat{Z} = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - (\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}) \cdot \overline{l}_{N_1} - (\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 - \overline{C}_{N_2}) \cdot \overline{u}_{N_2} =$$

$$(25.000, \quad 25.000, \quad 25.000, \quad 25.000) \cdot \begin{pmatrix} 7.675 \\ 12.000 \\ 14.000 \\ 14.300 \end{pmatrix} - 0 -$$

$$- \left[(25.000, 25.000, 25.000, 25.000) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - (4.000) \right] (13.000) = \quad 926,375.000$$

$$\underline{b} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 \cdot \overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 \cdot \overline{u}_{N_2} = \begin{pmatrix} 7.675 \\ 12.000 \\ 14.000 \\ 14.300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} (13.000) = \begin{pmatrix} 7.675 \\ 12.000 \\ 1.000 \\ 14.300 \end{pmatrix}$$

$$Z_j - C_j = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_j - c_j$$

$$Z_{X_1} - C_{X_1} = (25, \quad 25, \quad 25, \quad 25) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 = 21.000$$

$$Z_{X_2} - C_{X_2} = 21.000$$

$$Z_{X_3} - C_{X_3} = 21.000$$

$$Z_{X_4} - C_{X_4} = 21.500$$

$$Z_{y_1} - C_{y_1} = -500$$

$$Z_{y_2} - C_{y_2} = -500$$

$$Z_{y_3} - C_{y_3} = -500$$

La primera tabla queda:

	l	l	u	l	l	l	l					
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**y_1**	**y_2**	**y_3**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**X_8**	**LD**
Z	21.000	21.000	21.000	21.500	-500	-500	-500	0	0	0	0	926375000
X_5	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	7.675
X_6	0	1	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	12.000
X_7	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	1	0	1.000
X_8	0	0	0	**1**	0	0	1	0	0	0	1	14.300

l: cota inferior
u: cota superior

$$\alpha_k = Max\left(\underset{j\in\Re_1}{Max}(z_j - c_j), \quad \underset{j\in\Re_2}{Max}(c_j - z_j) \right)$$

$\alpha_k = 21500$; $k = X_4$ (candidata a entrar en la base)

$\alpha_k > 0 \Rightarrow$ Solución mejorable

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = Min\left(\frac{14.300-0}{1}\right) = 14.300 \\ \\ \gamma_2 = \infty \\ \\ \gamma_3 = u_{X_4} - l_{X_4} = 15.000 - 0 = 15.000 \end{array}\right\} \Delta_{X_4} = Min(14.300, \quad \infty, \quad 15.000) = 14.300 = \frac{\hat{b}_4 - l_4}{y_{44}}$$

X_8 sale de la base

$$Z = \hat{Z} - (Z_k - C_k)\cdot\Delta_k = 926375000 - 21.500 \cdot 14.300 = 618925000$$

$$\underline{b} = \underline{\hat{b}} - \overline{y}_k \cdot \Delta_k$$

$X_5 = 7.675 - 0{\cdot}14.300 = 7.675$
$X_6 = 12.000 - 0{\cdot}14.300 = 12.000$
$X_7 = 1.000 - 0{\cdot}14.300 = 1.000$
$X_4 = 0 + 14.300 = 14.300$

Tras el pivoteo, la mueva tabla queda:

	1	1	u		1	1	1				1	
	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1	y_2	y_3	X_5	X_6	X_7	X_8	LD
Z	21.000	21.000	21.000	0	-500	-500	-22.000	0	0	0	-21.500	618925000
X_5	1	0	0	0	-1	0	0	1	0	0	0	7.675
X_6	0	1	0	0	1	-1	0	0	1	0	0	12.000
X_7	0	0	1	0	0	1	-1	0	0	1	0	1.000
X_8	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	14.300

Se sigue con el algoritmo y tras cuatro iteraciones más se obtiene la solución óptima:

Z = 185.250.000 pts de costes de fabricación y almacenaje
X1 = 7.675 unidades producidas en Enero
y1 = 0 uds. se almacenan al final de Enero
X2 = 13.000 unidades producidas en Febrero
y2 = 1.000 uds. se almacenan al final de Febrero
X3 = 13.000 unidades producidas en Marzo
y3 = 0 uds. se almacenan al final de Marzo
X4 = 14.300 unidades producidas en Abril

A continuación se procederá a resolver nuevamente el problema sin introducir variables artificiales, aprovechando que las cuatro primeras columnas de la matriz de restricciones conforman una matriz identidad que podemos tomar como base inicial.

Min Z = 4.000·X_1 + 4.000·X_2 + 4.000·X_3 +3.500·X_4 + 500·y_1 + 500·y_2 + 500·y_3

S.a.

$$\begin{array}{lllllllll} X_1 & & & & -y_1 & & & = 7.675 \\ & X_2 & & & +y_1 & -y_2 & & = 12.000 \\ & & X_3 & & & +y_2 & -y_3 & = 14.000 \\ & & & X_4 & & & +y_3 & = 14.300 \end{array}$$

$$0 \leq X_1, X_2, X_3 \leq 13.000$$
$$0 \leq X_4 \leq 15.000$$
$$0 \leq y_1, y_2, y_3 \leq 2000$$

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \overline{B} \equiv \overline{I} = \left[\overline{a}_{X_1}, \quad \overline{a}_{X_2}, \quad \overline{a}_{X_3}, \quad \overline{a}_{X_4} \right]$$

Como las variables están acotadas aplicamos el algoritmo Simplex para variables acotadas.

Inicialmente se asigna y_1, y_2, y_3 a su cota inferior puesto que se intenta almacenar lo menos posible de un mes a otro. El resto de las variables, al tratarse de variables básicas tomarán valores en función del vector de lado derecho y de las variables no básicas.

Comprobamos si se puede obtener con esta asignación inicial una Solución Básica Factible.

Variables básicas: X_1, X_2, X_3, X_4
Variables no básicas: y_1, y_2, y_3

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1}\overline{b} - \overline{B}^{-1}\overline{N}_1\overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1}\overline{N}_2\overline{u}_{N_2}; \overline{B} \equiv \overline{I}$$

$$\overline{N}_1 = \left(\overline{a}_{y_1}, \quad \overline{a}_{y_2}, \quad \overline{a}_{y_3} \right)$$
$$\overline{N}_2 = [0]$$

$$\overline{X}_B = \overline{B}^{-1}\overline{b} - \overline{B}^{-1}\overline{N}_1\overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1}\overline{N}_2\overline{u}_{N_2} = \begin{pmatrix}7675\\12000\\14000\\14300\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1 & 0 & 0\\1 & -1 & 0\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7675\\12000\\14000\\14300\end{pmatrix}$$

La solución es no factible puesto que X_3 estaría por encima de su cota superior ($X_3 \leq 13000$).

Probamos una nueva asignación situando a y_1 e y_2 en su cota superior mientras que y_3 se mantiene en la cota inferior.

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7675\\12000\\14000\\14300\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\-1\\1\end{pmatrix}\cdot 0 - \begin{pmatrix}-1 & 0\\1 & -1\\0 & 1\\0 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2000\\2000\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}9675\\12000\\12000\\14300\end{pmatrix}$$

Esta solución inicial sí es factible puesto que ninguna variable supera su cota superior. Tenemos entonces que:

$$\overline{N}_1 = \left(\overline{a}_{y_3}\right); l_{y_3} = y_3 = 0$$
$$\overline{N}_2 = \left(\overline{a}_{y_1}, \overline{a}_{y_2}\right)$$

$u_{y_1} = y_1 = 2000$
$u_{y_2} = y_2 = 2000$

Se calculan ahora los valores de la fila cero para la primera tabla.

$$Z_{y_1} - C_{y_1} = \overline{C}_B\overline{B}^{-1}\overline{a}_{y_1} - c_{y_1} = \begin{pmatrix}4000 & 4000 & 4000 & 3500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\\0\end{pmatrix} - 500 = -500$$

$$Z_{y_2} - C_{y_2} = \begin{pmatrix}4000 & 4000 & 4000 & 3500\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix} - 500 = -500$$

$$Zy_3 - Cy_3 = \begin{pmatrix} 4000 & 4000 & 4000 & 3500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 500 = -1000$$

$$Z = \overline{C}_B \overline{B}^{-1} \overline{b} - \left[\overline{C}_B \quad \overline{B}^{-1} \quad \overline{N}_1 - \quad \overline{C}_{N_1} \right] \overline{l}_{N1} - \left[\overline{C}_B \quad \overline{B}^{-1} \quad \overline{N}_2 - \quad \overline{C}_{N_2} \right] \overline{u}_{N2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4000 & 4000 & 4000 & 3500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9675 \\ 12000 \\ 12000 \\ 14300 \end{pmatrix} - \left[\begin{pmatrix} 4000 & 4000 & 4000 & 3500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 500 \right] \cdot 0 +$$

$$- \left[\begin{pmatrix} 4000 & 4000 & 4000 & 3500 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 500 & 500 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 2000 \\ 2000 \end{pmatrix} = 186.750.000$$

Por tanto la 1ª Tabla Simplex quedaría:

					u	u	l	
	X1	**X2**	**X3**	**X4**	y_1	y_2	y_3	**LD**
Z	0	0	0	0	-500	-500	-1.000	186.750.000
X1	1	0	0	0	-1	0	0	9.675
X2	0	1	0	0	**1**	-1	0	12.000
X3	0	0	1	0	0	1	-1	12.000
X4	0	0	0	1	0	0	1	14.300

Aplicando el algoritmo Simplex para variables acotadas.

$$\alpha_k = Max\left(\underset{j \in \Re_1}{Max}(z_j - c_j), \quad \underset{j \in \Re_2}{Max}(c_j - z_j) \right) =$$

$$= Max[-1000 \quad 500 \quad 500] = 500 > 0 \quad \text{(Solución mejorable)}$$

α_k=500 ; K= y_1 ó y_2 Son candidatas a entrar en la base tanto la variable y_1 como la variable y_2, nosotros nos quedamos con K = y_1 ; K pertenece al conjunto R_2. Para continuar el problema es necesario utilizar la parte del algoritmo Simplex de variables acotadas correspondiente a K perteneciente a R_2.

y_1: candidata a entrar en la base:

$$\gamma_1 = Min\left[\frac{\hat{b}_i - l_i}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0\right] = \frac{9675-0}{1} = \frac{\hat{b}_1 - l_1}{-y_{1y_1}} = 9675$$

$$\gamma_2 = Min\left[\frac{u_i - \hat{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right] = \frac{13000-12000}{1} = \frac{\hat{u}_2 - \hat{b}_2}{y_{2y_1}} = 1000$$

$$\gamma_3 = u_{y_1} - l_{y_1} = 2000 - 0 = 2000$$

$\Delta_{y_1} = Min\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} = \gamma_2$; x_2 sale de la base al alcanzar su cota superior. La variable y_1 entra en la base y el elemento pivote es el y_{2y_1}=1

La nueva columna de lado derecho queda:

$$\underset{\sim}{\overline{b}} = \hat{b} + \overline{y}_k \Delta_k \;;\; \underset{\sim}{\overline{b}} = \hat{b} + \overline{y}_{y_1} \Delta_{y_1} = \begin{pmatrix} 9675 \\ 12000 \\ 12000 \\ 14300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1000 = \begin{pmatrix} 8675 \\ 13000 \\ 12000 \\ 14300 \end{pmatrix} \longleftarrow$$

Variable x_2 que alcanza su cota superior

$$Z = \hat{Z} - (Z_k - C_k) \cdot \Delta_k = 186750000 + (-500) \cdot 1000 = 186250000$$
$$y_1 = u_{y_1} - \Delta_{y_1} = 2000 - 1000 = 1000$$

Tras el pivoteo la nueva tabla quedará:

		u				u	l	
	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1	y_2	y_3	**LD**
Z	0	500	0	0	0	-1000	-1000	186.250.000
X_1	1	1	0	0	0	-1	0	8.675
y_1	0	1	0	0	1	-1	0	1.000
X_3	0	0	1	0	0	**1**	-1	12.000
X_4	0	0	0	1	0	0	1	14.300

Repitiendo el proceso:

$$\alpha_k = Max\left(Max(-1000); \quad Max(-500,\ 1000)\right) = 1000 > 0$$

La solución es mejorable; α_k=1000 ; k=y_2 ; K pertenece al conjunto R_2 .La variable y_2 está en su cota superior y disminuirá su valor, siendo candidata a entrar en la base.

Estudiamos ahora si alguna variable básica sale de la base:

$$\gamma_1 = Min\left[\frac{\hat{b}_i - l_i}{-y_{ik}} : y_{ik} < 0\right] = Min\left[\frac{8675-0}{1}; \frac{1000-0}{1}\right] = 1000 = \frac{\hat{b}_2 - l_2}{-y_{2y_2}}$$

y_1 : candidata a salir de la base

$$\gamma_2 = Min\left[\frac{u_i - \hat{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right] = \frac{13000-12000}{1} = 1000 = \frac{u_3 - \hat{b}_3}{y_{3y_2}}$$

x_3: candidata a salir de la base

$$\gamma_3 = u_{y_2} - l_{y_2} = 2000 - 0 = 2000$$

$$\Delta_{y_2} = Min\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} = Min\{1000,1000,2000\} = 1000 = \gamma_1 \text{ ó } \gamma_2$$

Al disminuir y_2 disminuirá también y_1 mientras que x_3 aumentará en la misma medida. Tomamos, por ejemplo, para que el pivoteo se realice sobre y_{3y_2}=1, al ser 1 un valor más manejable que -1. Por tanto entrará γ_2 en la base y en su lugar sale x_3 siendo y_{3y_2}=1 el pivote sobre el que se realizará la siguiente iteración.

La nueva columna de lado derecho queda:

$y_2 = u_{y_2} - \Delta_{y_2} = 2000 - 1000 = 1000$

$$\underset{\sim}{\mathrm{b}} = \hat{b} + \overline{y}_k \Delta_k = \hat{b} + \overline{y}_{y_2} \Delta_{y_2} = \begin{pmatrix} 8675 \\ 1000 \\ 12000 \\ 14300 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 1000 = \begin{pmatrix} 7675 \\ 0 \\ 13000 \\ 14300 \end{pmatrix}$$

$$Z = \hat{Z} + (Z_k - C_k) \cdot \Delta_k = 186250000 + (-1000) \cdot 1000 = 185250000$$

$y_1 = u_{y_1} - \Delta_{y_1} = 2000 - 1000 = 1000$

Tras el pivoteo la nueva tabla queda:

	u	u				l	
	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1	y_2	y_3	LD

	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1	y_2	y_3	LD
		u	u				l	
Z	0	500	1000	0	0	0	-2000	185250000
X_1	1	1	1	0	0	0	-1	7.675
y_1	0	1	1	0	1	0	-1	0
y_2	0	0	1	0	0	1	-1	1.000
X_4	0	0	0	1	0	0	1	14.300

Aplicando el criterio de optimalidad se obtiene:

$$\alpha_k = Max\left(\underset{j \in \Re_1}{Max}(z_j - c_j), \quad \underset{j \in \Re_2}{Max}(c_j - z_j) \right) =$$

$$= Max[-2000 \quad -500 \quad -1000] = -500 < 0$$

Solución óptima

El resultado, lógicamente, coincide con el que ya se ha obtenido, y es:

Z=185.250.000 pts. de costes de producción
X_1=7.675 uds. fabricadas en enero
X_2=13.000 uds. fabricadas en febrero
X_3=13.000 uds. fabricadas en marzo
X_4=14.300 uds. fabricadas en abril

No se almacena nada al final de enero y marzo (y_1=0 , y_3=0). Se almacenan 1000 uds. al final de febrero.

PROBLEMA 4

Una factoría especializada en la fabricación de sillones produce 2 tipos de asientos para aviones A_1 y A_2, utilizando para ello mano de obra y material sobrante de su proceso productivo habitual. Por tanto, para este mercado específico la fábrica tiene restricciones en cuanto al tiempo de producción, metros cúbicos de fibra comprimida y metros cuadrados de cuero. Los beneficios y requerimientos de material por cada unidad fabricada se muestran en la tabla, así como las disponibilidades máximas para un período determinado.

	Beneficios (pts)	Horas de trabajo	m^2 de cuero	m^3 de fibra
A_1	7.000	2	1	1
A_2	8.000	1	1	2
Total disponible	-	19	14	20

a) Formular y resolver el problema de maximizar beneficios en las condiciones de producción indicadas mediante la programación lineal.

b) Formular el problema dual e indicar los valores óptimos de las variables duales.

c) ¿Cuál es el precio sombra para una hora del tiempo de producción? ¿Cómo se interpreta? ¿Sobre qué rango es válida esta interpretación?

d) ¿Sobre qué rango puede el coeficiente asociado a A_1 variar en la función objetivo sin que cambie la solución óptima?

e) Supóngase que tras haberse producido el segundo asiento, el tiempo requerido para fabricar cada asiento se reduce. ¿Puede utilizarse el análisis de sensibilidad para determinar el impacto de dicho cambio?

SOLUCIÓN:

a) Se trata de un problema de Maximización de beneficios en el que la función objetivo es:

X_1= Asiento tipo 1 fabricados
X_2= Asiento tipo 2 fabricados

Max $Z = 7.000 \cdot X_1 + 8.000 \cdot X_2$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llll} 2 \cdot X_1 & + & X_2 & \leq 19 \\ X_1 & + & X_2 & \leq 14 \\ X_1 & +2 \cdot & X_2 & \leq 20 \end{array}\right\} \quad X_1, X_2 \geq 0$$

Para resolverlo lo expresamos en forma de Minimización.

$- \text{Min } Z = -7.000 \cdot X_1 - 8.000 \cdot X_2$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llllllll} 2 \cdot X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & & = 19 \\ X_1 & + & X_2 & & & +X_4 & & = 14 \\ X_1 & +2 \cdot & X_2 & & & & +X_5 & = 20 \end{array}\right\} \quad X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 19 \\ 14 \\ 20 \end{Bmatrix}; \qquad \overline{X}_N = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = 7.000$$

$$Z_2 - C_2 = 8.000$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 0$$

La primera tabla Simplex quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	7.000	8.000	0	0	0	0
X_3	2	1	1	0	0	19
X_4	1	1	0	1	0	14
X_5	1	**2**	0	0	1	20

Aplicando el algoritmo Simplex las siguientes tablas serían:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	3.000	0	0	0	-4.000	-80.000
X_3	**3/2**	0	1	0	-1/2	9
X_4	1/2	0	0	1	-1/2	4
X_2	1/2	1	0	0	1/2	10

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	-2.000	0	-3.000	-98.000
X_1	1	0	2/3	0	-1/3	6
X_4	0	0	-1/3	1	-1/3	1
X_2	0	1	-1/3	0	2/3	7

Solución óptima

X_1 = 6 asientos tipo A_1
X_2 = 7 asientos tipo A_2 Sobra 1 m^2 de cuero. (X_4=1)
Z = 98.000 pts

b) El planteamiento Dual sería:

Min $Z' = 19 \cdot \omega_1 + 14 \cdot \omega_2 + 20 \cdot \omega_3$

S.a.

$$\left.\begin{array}{lllll} 2\cdot\omega_1 & + & \omega_2 & + \ \omega_3 & \geq 7.000 \\ \omega_1 & + & \omega_2 & +2\cdot\omega_3 & \geq 8.000 \end{array}\right\} \quad \omega_1, \omega_2, \omega_3 \geq 0$$

Por el Teorema de holgura complementaria sabemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \omega_1 \neq 0 \\ \omega_2 = 0 \\ \omega_3 \neq 0 \end{array}\right\} \rightarrow \quad Z_3 - C_3 = \overline{\omega}\cdot\vec{a}_3 - c_3; \quad -2.000 = (\omega_1, \ \omega_2, \ \omega_3)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \omega_1 = |-2.000|$ *pts./hora adicional*

$$Z_5 - C_5 = (\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \Rightarrow \omega_3 = |-3.000| \quad pts./m^3 \, de\, fibra\, adicional.$$

$\omega_2 = 0$ pts./m² cuero adicional (resultado previsible ya que sobra cuero en el proceso productivo óptimo, X_4=1)

c)

c.1) ω_1= 2.000 ptas / hora producción; ω_1: precio sombra de 1h más de trabajo de producción

c.2) Cada hora adicional de mano de obra genera unos beneficios de 2.000 pts manteniendo el actual sistema productivo.

c.3) Para obtener el rango es preciso hacer un análisis de sensibilidad que nos diga cuánto puede variar el término correspondiente del vector de lado derecho sin que se produzca modificación en el sistema productivo.

$$\underline{\bar{b}}' = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b}\,; \qquad \underline{\bar{b}}' = \begin{Bmatrix} 19+\Delta \\ 14 \\ 20 \end{Bmatrix}; \quad \underline{\bar{b}}' \geq 0$$

Sustituyendo:

$$\begin{pmatrix} 2/3 & 0 & -1/3 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ -1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 19+\Delta \\ 14 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{3}\Delta + \frac{18}{3} \\ \frac{-1}{3}\Delta + \frac{3}{3} \\ \frac{-1}{3}\Delta + \frac{21}{3} \end{Bmatrix}$$

$$\left.\begin{array}{ll} 2\Delta + 18 \geq 0 & \Delta \geq -9 \\ 3 - \Delta \geq 0 & \Delta \leq 3 \\ -\Delta + 21 \geq 0 & \Delta \leq 21 \end{array}\right| \rightarrow$$ Esta solución no la consideramos porque es menos restrictiva que $\Delta \leq 3$

$$-9 \leq \Delta \leq 3$$

por tanto el rango para el que el precio sombra es válido es el siguiente:

$$b_1 + \Delta^- \leq b_1 \leq b_1 + \Delta^+$$

$$10 \leq b_1 \leq 22$$

d) Se trata de realizar un análisis de sensibilidad sobre el elemento correspondiente del vector de coste para obtener su rango de variabilidad.

$\overline{C}_B = (c_1, \quad c_4, \quad c_2)$ es el orden de la base óptima

$\overline{C}'_B = (c_1 + \Delta_1, \quad c_4, \quad c_2)$ es el vector de costes básico modificado

Sabemos que se tiene que cumplir para mantener la optimalidad primal que:

$$(Z_3 - C_3)' \leq 0$$
$$(Z_5 - C_5)' \leq 0$$

De la primera expresión: $\overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_3 - c_3 \leq 0$

$\overline{C}'_B \cdot \overline{y}_3 \leq 0$

$$(-7.000 - \Delta_1, \quad 0, \quad -8.000) \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ -1/3 \\ -1/3 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$-\frac{14.000}{3} - \frac{2\Delta}{3} + \frac{8.000}{3} \leq 0$$

$$-2\Delta - 6.000 \leq 0$$
$$-2\Delta \leq 6.000 \quad \Rightarrow \Delta \geq -3.000$$

De la segunda expresión: $\overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_5 - c_5 \leq 0$

$\overline{C}'_B \cdot \overline{y}_5 \leq 0$

$$(-7.000 - \Delta_1, \quad 0, \quad -8.000) \cdot \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} \leq 0$$

$$\frac{7.000}{3} + \frac{\Delta}{3} - \frac{16.000}{3} \leq 0$$

$$\Delta - 9.000 \leq 0 \quad ; \quad \Delta \leq 9000$$

Por tanto :

$$-3.000 \leq \Delta \leq 9.000$$

$$7.000 - 3.000 \leq c'_1 \leq 7.000 + 9.000$$

$$4.000 \leq c'_1 \leq 16.000$$

e) No, porque el problema dejaría de ser lineal en las condiciones mencionadas.

PROBLEMA 5

La compañía de transportes "La perola negra" se ha diversificado introduciéndose en el sector de la alimentación, produciendo alimentos mezclados de forma especial. Actualmente ha recibido un pedido de 200 kilogramos como mínimo de una mezcla constituida por dos ingredientes A y B. El primer ingrediente A, le cuesta a la compañía 300 pesetas el kilogramo; el segundo ingrediente le cuesta 800 pts/kg. La mezcla no puede contener más del 40% del ingrediente A y debe tener al menos 30% de B.

En estas condiciones calcular:

a) Cantidad a utilizar de cada ingrediente en las mezcla para minimizar los costes.

b) ¿Dentro de qué intervalo podría variar el coste unitario del ingrediente A sin que cambie por ello la solución óptima?

c) ¿Saldría rentable para el proceso de producción añadir a la mezcla un ingrediente C sabiendo que el coste de éste es de 500 pts/kg? Razónese.

d) ¿Qué pasaría si Sanidad impusiese que la cantidad máxima de antioxidante E-XX presente en cada kilogramo de mezcla (por haberse descubierto recientemente que tiene propiedades alucinógenas) fuese como máximo de 6 gramos, sabiendo que cada kilogramo de ingrediente A contiene 10 gramos de E-XX y cada kilogramo de B contiene 3 gramos?

SOLUCIÓN:

a) Llamando X_1: kg. de ingrediente A en la mezcla.
X_2: kg. de ingrediente B en la mezcla.

La función de producción sería:

Min $Z = 300 \cdot X_1 + 800 \cdot X_2$

S.a.

$$
\begin{array}{lllll}
X_1 & + & X_2 & \geq 200 \\
X_1 & & & \leq 0'4\,(X_1 + X_2) \\
& & X_2 & \geq 0'3\,(X_1 + X_2)
\end{array}
$$

$$X_1,\ X_2 \geq 0$$

Sin embargo, dado que se trata de un problema de minimización, el método de resolución buscará que la cantidad de ingredientes fabricada sea lo más pequeña posible, lo justo para que se cumpla la primera restricción. Por esta razón se puede considerar que la suma de los ingredientes en el óptimo será de 200 Kg, por lo que el problema se puede expresar de la siguiente manera:

$$\text{Min} \quad Z = 300 \cdot X_1 + 800 \cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{lcl} X_1 + X_2 & \geq & 200 \\ X_1 & \leq & 0{,}4 \cdot 200 \\ \quad\quad X_2 & \geq & 0{,}3 \cdot 200 \end{array}\right\}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Que introduciendo variables de holgura quedaría:

$$\text{Min} \quad Z = 300 \cdot X_1 + 800 \cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{lcl} X_1 + X_2 - X_3 & = & 200 \\ X_1 + X_4 & = & 80 \\ X_2 - X_5 & = & 60 \end{array}\right\}$$

$$X_j \geq 0 \ \ (j = 1, \ldots 5)$$

Vemos que no tenemos base inicial fácilmente identificable, por lo que recurriremos a la utilización de variables artificiales y al método de dos fases.

1ª Fase:

$$\text{Min} \quad X_0 = X_6 + X_7$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{lcl} X_1 + X_2 - X_3 + X_6 & = & 200 \\ X_1 + X_4 & = & 80 \\ X_2 - X_5 + X_7 & = & 60 \end{array}\right\}$$

$X_j \geq 0 \ \ (j = 1, \ldots 7)$ $\quad X_6, X_7$: variables artificiales

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} X_6 \\ X_4 \\ X_7 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 200 \\ 80 \\ 60 \end{Bmatrix} \qquad \overline{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overline{X}_N = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \overline{0} \qquad \overline{B} = [\overline{a}_6 \, , \overline{a}_4 \, , \overline{a}_7]$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \; \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = (1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = 1$$

$$Z_2 - C_2 = (1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 2$$

$$Z_3 - C_3 = (1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

$$Z_5 - C_5 = (1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

$$Z = \overline{C}_B \; \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (1, 0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 200 \\ 80 \\ 60 \end{pmatrix} = 260$$

La primera tabla Simplex quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
X_0	1	2	-1	0	-1	0	0	260
X_6	1	1	-1	0	0	1	0	200
X_4	1	0	0	1	0	0	0	80
X_7	0	**1**	0	0	-1	0	1	60

$Z_k - C_k = 2$; $k = 2$; X_2 candidato a entrar en la base.

$$X_2 = \underset{1 \le i \le m}{Min}\left\{\frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right\} = Min\{200,60\} = 60$$

X_7 sale de la base; y_{32} es el pivote. Iterando sucesivamente se obtienen las siguientes tablas:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
X_0	1	0	-1	0	1	0	-2	140
X_6	1	0	-1	0	1	. 1	-1	140
X_4	**1**	0	0	1	0	0	0	80
X_2	0	1	0	0	-1	0	1	60

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
X_0	0	0	-1	-1	1	0	-2	60
X_6	0	0	-1	-1	**1**	1	-1	60
X_1	1	0	0	1	0	0	0	80
X_2	0	1	0	0	-1	0	1	60

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
X_0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
X_5	0	0	-1	-1	1	1	-1	60
X_1	1	0	0	1	0	0	0	80
X_2	0	1	-1	-1	0	1	0	120

Solución óptima. Se han eliminado las variables artificiales, pasamos a resolver la 2ª fase:

Min $Z = 300 \cdot X_1 + 800 \cdot X_2$ (las restricciones permanecen constantes)

$$Z_3 - C_3 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_3 - c_3 = (0,\ 300,\ 800) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -800$$

$$Z_4 - C_4 = (0,\ 300,\ 800)\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -1\end{pmatrix} = -500$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (0,\ 300,\ 800)\cdot\begin{pmatrix}60\\ 80\\ 120\end{pmatrix} = 120.000$$

La solución es óptima de entrada y no hace falta recurrir a la 2ª fase:

X_1 = 80 kg de A
X_2 = 120 kg de B
Z = 120.000 ptas de coste

La tabla óptima sería:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	-800	-500	0	120.000
X_5	0	0	-1	-1	1	60
X_1	1	0	0	1	0	80
X_2	0	1	-1	-1	0	120

b) Intervalo de variación del coste de A.

Se ha de cumplir que:

$$(Z_3-C_3)' = \overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_3 - C_3 \leq 0; \quad \overline{C}'_B = (C_5,\ C_1+\Delta_1, C_2)$$

$$\left(0,\ \left(300+\Delta_1\right),\ 800\right)\cdot\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ -1\end{pmatrix} - 0 \leq 0;\ \Delta_1 \text{ no restringido inferiormente}$$

Inferiormente se puede decrementar Δ_1 hasta $-\infty$, lo cual es físicamente imposible, pero sí se puede disminuir el nuevo coste hasta cero, siendo óptima la solución con $C'_1=0$

$$(Z_4 - C_4)' = \overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_4 - C_4 \leq 0$$

$$\begin{pmatrix} 0, & (300+\Delta_1), & 800 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 \leq 0$$

$300 + \Delta_1 - 800 \leq 0$ $\qquad \boxed{\Delta_1 \leq 500}$

Para $0 \leq C_1' \leq 300 + 500$ la solución sigue siendo óptima.

c) ¿Sale rentable añadir un ingrediente C?

El nuevo problema sería:

Min $Z = 300 \cdot X_1 + 800 \cdot X_2 + 500 \cdot X_8$

S.a.

$$\left.\begin{array}{l} X_1 + X_2 + X_8 \geq 200 \\ X_1 \qquad\qquad\quad \leq 80 \\ \qquad X_2 \qquad\quad \geq 60 \end{array}\right\} \quad X_1, X_2, X_8 \geq 0$$

X_8 : kg. de ingrediente C en la mezcla.

Se trata únicamente de estudiar el valor

$Z_8 - C_8 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_8 - c_8$

Siendo: $\overline{C}_B = (0, \quad 300, \quad 800)$

$$\overline{B}^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \overline{y}_6 & \overline{y}_4 & \overline{y}_7 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

De la última tabla de la 1ª fase.

$$\overline{a}_8 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \overline{y}_8 = \overline{B}^{-1}\overline{a}_8 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z_8 - C_8 = \begin{bmatrix}0, & 300, & 800\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 500 = 300 > 0; \text{ Sí sale rentable.}$$

Incorporamos esta variable a la tabla óptima anterior y calculamos la nueva solución del problema.

La nueva tabla sería:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_8	LD
Z	0	0	-800	-500	0	300	120.000
X_5	0	0	-1	-1	1	**1**	60
X_1	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	1	-1	-1	0	1	120

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_8	LD
Z	0	0	-500	-200	-300	0	102.000
X_8	0	0	-1	-1	1	1	60
X_1	1	0	0	1	0	0	80
X_2	0	1	0	0	-1	0	60

X_1 = 80 kg. de A
X_2 = 60 kg. de B
X_8 = 60 kg. de C
Z = 102.000 pts

Esta solución es mejor, en cuanto a que se disminuyen los costes.

d) Limitación de antioxidante presente. Se trata de añadir otra restricción y comprobar si ésta es vinculante o no.

$$10 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 \leq 6 \cdot 200$$

$$\text{Con } \left.\begin{matrix} X_1 = 80 \\ X_2 = 120 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 10 \cdot 80 + 3 \cdot 120 \leq 6 \cdot 200$$

$$\mathbf{1160 \leq 1200}$$

Se cumple la desigualdad, luego nuestro proceso está dentro de la ley y no es necesario cambiar la composición de la mezcla.

PROBLEMA 6

El encargado de un almacén de pescados ha recibido esta mañana un contingente de pescado fresco compuesto por 200 kg de merluza, 800 kg de mero y 150 kg de calamar. Estas cantidades se emplearán para preparar una serie de productos que se venderán directamente al público. Estos productos son: croquetas de pescado, pudding de pescado y delicias marineras. Por experiencia se sabe que la demanda de cada tipo de producto de pescado excede la existencia del almacén. Las croquetas de pescado deben contener 20% de merluza y 50% de mero (en peso); el pudding debe incluir 50% de mero y 20% de calamares; y las delicias marineras incluyen 10% de merluza, 40% de mero y 30% de calamares. El resto de cada producto lo constituye un relleno barato, no de pescado, del cual el almacén tiene una cantidad ilimitada. Normalmente la cantidad de cada producto que se prepara obedece a razones de maximización de beneficios, pero hoy, debido a que se ha estropeado el frigorífico, el jefe del almacén se plantea que la prioridad consiste en minimizar la cantidad de pescado que permanezca en el almacén tras haber elaborado los productos. En estas circunstancias:

a) ¿Cuántos kg de los tres productos deben prepararse?

b) Con el mismo objetivo del apartado anterior calcular cuántos kg de cada producto deben prepararse si el encargado del almacén descubre que tiene que rechazar 300 kg de mero del distribuidor por no tener el tamaño mínimo para ser procesados por las máquinas.

SOLUCIÓN:

Disponibilidades:	Composición de los productos:
200 kg. Merluza	Croquetas ⟶ 20-50-0
800 kg. Mero	Pudding ⟶ 0-50-20
150 kg. Calamares	Delicias ⟶ 10-40-30

a) Llamando:

X_1 = Kg. croquetas
X_2 = Kg. Pudding
X_3 = Kg. Delicias

La función de producción sería:

$$Min\ Z=\left(200-\frac{20}{100}\cdot X_1-\frac{10}{100}\cdot X_3\right)+\left(800-\frac{50}{100}\cdot X_1-\frac{50}{100}\cdot X_2-\frac{40}{100}\cdot X_3\right)+$$
$$+\left(150-\frac{20}{100}\cdot X_2-\frac{30}{100}\cdot X_3\right)$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llll}\frac{20}{100}\cdot X_1 & & +\frac{10}{100}\cdot X_3 & \leq 200\\ \frac{50}{100}\cdot X_1+ & \frac{50}{100}\cdot X_2 & +\frac{40}{100}\cdot X_3 & \leq 800\\ & \frac{20}{100}\cdot X_2 & +\frac{30}{100}\cdot X_3 & \leq 150\end{array}\right\}\quad X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Expresando el problema de forma estándar:

$$Min\ Z=\left(200-0'2\cdot X_1-0'1\cdot X_3\right)+\left(800-0'5\cdot X_1-0'5\cdot X_2-0'4\cdot X_3\right)+$$
$$+\ \left(150-0'2\cdot X_2-0'3\cdot X_3\right)=1.150-0'7\cdot X_1-0'7\cdot X_2-0'8\cdot X_3$$

$$\left.\begin{array}{lllllll}2\cdot X_1 & & + X_3 & +X_4 & & & =2.000\\ 5\cdot X_1 & +5\cdot X_2 & +4\cdot X_3 & & +X_5 & & =8.000\\ & 2\cdot X_2 & +3\cdot X_3 & & & +X_6 & =1.500\end{array}\right\}\quad X_j\geq 0\left(j=1\ldots 6\right)$$

Aplicando el algoritmo Simplex:

$$\overline{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 5 & 5 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\ ;\ \overline{B}=\left[\overline{a}_4,\ \overline{a}_5,\ \overline{a}_6\right];\ \overline{N}=\left[\overline{a}_1,\ \overline{a}_2,\ \overline{a}_3\right]$$

$$\overline{X}_B=\begin{Bmatrix}X_4\\ X_5\\ X_6\end{Bmatrix}=\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}=\begin{Bmatrix}2.000\\ 8.000\\ 1.500\end{Bmatrix};\ \overline{X}_N=\overline{0}$$

Los valores de la fila cero para la primera tabla Simplex son:

$$\overline{C}_B=\left(0,\ \ 0,\ \ 0\right);\ \ Z=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}=0$$

$$Z_1-C_1=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{a}_1-c_1=0'7$$

$Z_2 - C_2 = 0'7$

$Z_3 - C_3 = 0'8$

La primera tabla queda:

	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	0'7	0'7	0'8	0	0	0	0
X_4	2	0	1	1	0	0	2.000
X_5	5	5	4	0	1	0	8.000
X_6	0	2	**3**	0	0	1	1.500

$Z_k - C_k = Z_3 - C_3 = 0'8 > 0;\ k = 3$

$$X_3 = Min\left(\frac{2.000}{1}, \quad \frac{8.000}{4}, \quad \frac{1.500}{3}\right) = 500 = \frac{b_3}{y_{33}}$$

Las siguientes tablas obtenidas aplicando el método Simplex son:

	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	7/10	1/6	0	0	0	-4/15	-400
X_4	**2**	-2/3	0	1	0	-1/3	1.500
X_5	5	7/3	0	0	1	-4/3	6.000
X_3	0	2/3	1	0	0	1/3	500

	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	0	2/5	0	-7/20	0	-3/20	-925
X_1	1	-1/3	0	1/2	0	-1/6	750
X_5	0	**4**	0	-5/2	1	-1/2	2.250
X_3	0	2/3	1	0	0	1/3	500

	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	0	0	0	-1/10	-1/10	-1/10	-1.150
X_1	1	0	0	7/24	1/12	-5/24	1.875/2
X_2	0	1	0	-5/8	1/4	-1/8	1.125/2
X_3	0	0	1	5/12	-1/6	5/12	125

Solución óptima

X_1= = 937'5 kg de croquetas

X_2= = 562'5 kg de pudding

X_3= 125 kg de delicias

Z = 1.150 - 1.150 = 0 ⟶ Se aprovecha todo el pescado

b) Si la cantidad de mero pasa de 800 a 500 kg se modifica el vector de lado derecho. El problema se resuelve mediante un análisis de sensibilidad del vector de lado derecho. Cambia la función objetivo Z, pero solo la constante, por lo cual no afecta al problema, la nueva Z sería:

$Z = 850 - 0'7\,X_1 - 0'7\,X_2 - 0'8\,X_3$

Como en este problema se hizo una racionalización de los Denominadores y el vector de lado derecho se multiplicó por 10 implica que nuestro nuevo vector de lado derecho es:

$$\overline{b}' = \begin{Bmatrix} 2.000 \\ 5.000 \\ 1.500 \end{Bmatrix} \qquad \text{Si } \overline{b} = \begin{Bmatrix} 2.000 \\ 8.000 \\ 1.500 \end{Bmatrix} \Rightarrow \Delta\overline{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3.000 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Por tanto, los nuevos valores de las variables básicas $\underline{\overline{b}}'$ quedan:

$$\underline{\overline{b}}' = \underline{\overline{b}} + \overline{B}^{-1} \cdot \Delta\overline{b}$$

$$\overline{B}^{-1} \cdot \Delta\overline{b} = \begin{bmatrix} 7/24 & 1/12 & -5/24 \\ -5/8 & 1/4 & -1/8 \\ 5/12 & -1/6 & 5/12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -3.000 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -250 \\ -750 \\ 500 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\overline{b}}' = \underline{\overline{b}} + \overline{B}^{-1} \cdot \Delta\overline{b} = \begin{bmatrix} 937'5 - 250 \\ 562'5 - 750 \\ 125 + 500 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 687'5 \\ -187'5 \\ 625 \end{bmatrix} \leftarrow \text{Se rompe la factibilidad primal}$$

$$Z = Z + \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \Delta\overline{b} = -1.150 + \begin{pmatrix} -0'7 & -0'7 & -0'8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -250 \\ -750 \\ 500 \end{pmatrix} = -850$$

Como se mantiene la factibilidad dual (todos los $Z_j - C_j \leq 0$) se resuelve mediante el método Simplex Dual.

Sustituyendo los valores obtenidos en la columna de lado derecho de la tabla óptima, nuestra nueva tabla sería:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	0	0	-1/10	-1/10	-1/10	-850
X_1	1	0	0	7/24	1/12	-5/24	687'5
X_2	0	1	0	**-5/8**	1/4	-1/8	-187'5
X_3	0	0	1	5/12	-1/6	5/12	625

Para elegir elemento de pivote utilizamos la expresión:

$$\frac{Z_k - C_k}{y_{rk}} = \underset{j \in \Re}{Min}\left(\frac{Z_j - C_j}{y_{rk}} : y_{rk} < 0\right)$$

$$\frac{Z_k - C_k}{y_{rk}} = Min\left\{\frac{-1/10}{-5/8}, \frac{-1/10}{-1/8}\right\} = 0'16 = \frac{Z_4 - C_4}{y_{24}}$$

El pivote es -5/8; la siguiente tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	-4/25	0	0	-7/50	-2/25	-820
X_1	1	7/15	0	0	1/5	-4/15	600
X_4	0	-8/15	0	1	-2/5	1/5	300
X_3	0	2/3	1	0	0	1/3	500

La solución es óptima factible.

X_1= 600 kg de croquetas

X_2= 0 kg de pudding

X_3= 500 kg de delicias

Sobran 850 - 820 = **30 kg** de pescado que, concretamente, corresponden a la merluza.

Se puede ver de donde sobran analizando las restricciones, ya que X_4=30 Kg (una vez se ha dividido entre 10 puesto que se había multiplicado antes las restricciones por dicho número) y corresponde a la restricción de merluza.

PROBLEMA 7

Una empresa de exportación de frutas posee los medios para recolectar y empaquetar tres tipos diferentes de productos frutales (1, 2 y 3), contando para ello con una disponibilidad total de 178 horas-hombre diarias para la recolección de frutas y 226 horas-hombre diarias para el empaquetado de ésta. El tiempo requerido (en horas-hombre) por cada tonelada de cada uno de los tipos de fruta tratados se muestran en la tabla:

Tipo de fruta	h-h por tonelada recolectada	h-h por tonelada empaquetada
1	1	4
2	2	1
3	3	5

Conociendo sus propias capacidades, la empresa se plantea incorporarse a una federación de exportadores hortofrutículas, que por realizar su trabajo en un mercado ampliamente regulado por las directrices europeas, impone unas condiciones rígidas respecto a topes máximos y mínimos de cantidad de mercancía que puede ser exportada; si bien es cierto que los beneficios por cada tonelada de fruta exportada por parte de la federación son sustancialmente superiores a los logrados cuando las empresas trabajan aisladamente.

Las condiciones establecidas por la federación estipulan que esta empresa habría de exportar diariamente un mínimo de 10 Tm del fruto 1; 5 Tm del fruto 2 y 5 Tm del fruto 3. Mientras que no podría superar el límite de 50 Tm del fruto 1; 75 Tm del fruto 2, y 50 Tm del fruto 3. Las ganancias ofrecidas por la federación son de 8 u.m. por cada tonelada del fruto 1 exportada, 12 u.m. y 10 u.m. por cada tonelada para los frutos 2 y 3 respectivamente.

Supuesto la empresa acepta incorporarse con estas condiciones a la federación hortofrutícola:

a) ¿Cuántas toneladas diarias de cada tipo de fruta habría de exportar para maximizar sus ganancias?

b) ¿Cuánto se estaría dispuesto a pagar por cada hora-hombre adicional tanto en la recolección como en el empaquetado? ¿Cuál podría ser la causa por la que se ha de retribuir más la hora-hombre en una actividad que en la otra?

c) Supuesto se produce una carencia de mano de obra para la recolección de fruta, a la dirección de la empresa le gustaría conocer cuál sería la disminución máxima diaria de mano de obra de recolección que le permitiría mantener su sistema productivo invariable.

SOLUCIÓN:

a) Llamando X_1: Tm del tipo de fruta 1 exportada.
X_2: Tm del tipo de fruta 2 exportada.
X_3: Tm del tipo de fruta 3 exportada.

Sobre la base del enunciado, la función a maximizar sería:

$$\text{Max} \quad Z = 8\cdot X_1 + 12\cdot X_2 + 10\cdot X_3$$

S.a.

$$\begin{array}{llll} X_1 & +2\cdot X_2 & +3\cdot X_3 & \leq 178 \\ 4\cdot X_1 & + \; X_2 & +5\cdot X_3 & \leq 226 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 10 \leq X_1 \leq 50 \\ 5 \leq X_2 \leq 75 \\ 5 \leq X_3 \leq 50 \end{array}$$

El problema puede ser abordado utilizando el algoritmo Simplex para variables acotadas. Pasamos el problema a la forma estándar de minimización.

$$-\text{Min} \quad Z = -8\cdot X_1 - 12\cdot X_2 - 10\cdot X_3$$

S.a.

$$\begin{array}{llllll} X_1 & +2\cdot X_2 & +3\cdot X_3 & +X_4 & & = 178 \\ 4\cdot X_1 & + \; X_2 & +5\cdot X_3 & & +X_5 & = 226 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} 10 \leq X_1 \leq 50 \\ 5 \leq X_2 \leq 75 \\ 5 \leq X_3 \leq 50 \end{array}$$

Por tratarse de un problema en el que se pretenden maximizar las ganancias parece lógico intentar situar en la cota superior a la variable que más contribuye al beneficio (la que tiene coeficiente de coste mayor).

$$\overline{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X}_{N_1} = [X_1, X_3]; \quad \overline{N}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}; \; \overline{l}_{N_1} = \quad \overline{X}_{N_1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\overline{X}_{N_2} = [X_2]; \quad \overline{N}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \overline{u}_{N_2} = (X_2) = (75)$$

Con estos valores, las variables básicas quedan:

$$\overline{X}_B = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 \cdot \overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 \cdot \overline{u}_{N_2}$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} 178 \\ 226 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 75 = \begin{pmatrix} 3 \\ 86 \end{pmatrix} \geq 0$$

$\hat{Z} = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \sum_{j \in \Re_1} (Z_j - C_j) \cdot X_j - \sum_{j \in \Re_2} (Z_j - C_j) \cdot X_j$; expresión análoga a:

$$\hat{Z} = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}\right) \cdot \overline{l}_{N_1} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 - \overline{C}_{N_2}\right) \cdot \overline{u}_{N_2}$$

Con $\overline{C}_B = (0, \quad 0)$

$$\Re_1 = (1, \quad 3) \begin{cases} Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = 8 \\ Z_3 - C_3 = 10 \end{cases}$$

$$\Re_2 = (2) \{ Z_2 - C_2 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_2 - c_2 = 12$$

Entonces $\hat{Z} = 0 - (8 \cdot X_1 + 10 \cdot X_3) - 12 \cdot X_2 = 0 - 130 - 900 = -1.030$

La primera tabla sería:

	l	u	l			
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**LD**
Z	8	12	10	0	0	-1.030
X_3	1	2	**3**	1	0	3
X_4	4	1	5	0	1	86

l: cota inferior
u: cota superior

$$\alpha_k = Max\left(\underset{j \in \Re_1}{Max}(Z_j - C_j); \ \underset{j \in \Re_2}{Max}(C_j - Z_j) \right)$$

$\alpha_k = Max(10, \quad -12) = 10 > 0 \Rightarrow$ Solución mejorable.

$\alpha_k = 10; k = 3; X_3$: variable candidata a entrar en la base

Como $k \in \Re_1$, tenemos el caso $X_k = l_k + \Delta_k$

Aplicando el algoritmo Simplex para variables acotadas:

$$\begin{cases} \gamma_1 = \underset{1 \le i \le m}{Min}\left(\dfrac{b_i - l_{B_i}}{y_{ik}}; y_{ik} > 0\right) = Min\left(\dfrac{3-0}{3}, \quad \dfrac{86-0}{5}\right) = 1 \\ \text{X}_4 \text{ candidata a salir de la base. } y_{13} \rightarrow \text{ Pivote} \\ \gamma_2 = \infty, \text{ ya que } \overline{y}_3 \ge \overline{0} \\ \\ \gamma_3 = u_3 - l_3 = 50 - 5 = 45 \end{cases}$$

$$\Delta_3 = Min(\gamma_1, \quad \gamma_2, \quad \gamma_3) = Min(1, \quad \infty, \quad 45) = 1$$

X_4 sale de la base y entra X_3. Pivoteo sobre $y_{13} = 3$

La columna de LD quedaría:

$Z = -1.030 - (Z_3 - C_3)\cdot\Delta_3 = -1.030 - 10\cdot 1 = -1.040$

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 86 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \Delta_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 81 \end{pmatrix}$$

$X_3 = 5 + \Delta_3 = 6$

Queda la tabla:

	l	u		l		
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**LD**
Z	4'67	5'33	0	-3'33	0	-1.040
X_3	**0'33**	0'67	1	0'33	0	6
X_5	2'33	-2'33	0	-1'67	1	81

Repitiendo el proceso:

$$\alpha_k = Max(4'67, \quad -5'33) = 4'67 > 0$$

k = 1 ; $k \in \Re_1$; X_1 candidata a entrar en la base

$$\begin{cases} \gamma_1 = Min\left(\dfrac{6-5}{0'33}, \quad \dfrac{81-0}{2'33}\right) = 3; \ X_3 \text{ candidata a salir de la base. } y_{11} \rightarrow \text{ Pivote} \\ \\ \gamma_2 = \infty \ ; \ \text{ya que } \bar{y}_1 \geq \bar{0} \\ \\ \gamma_3 = 50 - 10 = 40 \end{cases}$$

$$\Delta_k = \Delta_1 = Min(3, \quad \infty, \quad 40) = 3$$

X_3 sale de la base y se pivotea sobre y_{11} = 0'33

La columna de LD sería:

Z = -1.060- 4'67·3 = -1.054

$$\begin{pmatrix} X_3 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 81 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0'33 \\ 2'33 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 74 \end{pmatrix}$$

X_1 = 10 + 3 = 13

La nueva tabla quedaría:

		u	1	1		
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**LD**
Z	0	-4	-14	-8	0	-1.054
X_1	1	2	3	1	0	13
X_5	0	-7	-7	-4	1	74

Iterando nuevamente:

$$\alpha_k = Max(-8, \quad 4) = 4 > 0$$

k = 2 ; $k \in \Re_2$; X_2 candidata a entrar en la base.

En este caso, $X_k = u_k - \Delta_k$

$$\begin{cases} \gamma_1 = Min\left(\dfrac{\underline{b}_i - l_{B_i}}{-y_{ik}}: y_{ik} < 0\right) = \dfrac{74-0}{7} = 10'57 \\ \gamma_2 = Min\left(\dfrac{u_{B_i} - \underline{b}_i}{y_{ik}}: y_{ik} > 0\right) = \dfrac{50-13}{2} = 18'5 \\ \gamma_3 = u_k - l_k = 75 - 5 = 70 \end{cases}$$

$\Delta_3 = Min\ (10'57,\ 18'5\ ,\ 70) = 10'57 \equiv \gamma_1$

X_5 sale de la base y se pivotea sobre $y_{22} = -7$

El nuevo lado derecho (LD) queda:

$Z = -1.054 - (4 \cdot 10'57) = -1.096'28$

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 74 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \end{pmatrix} \cdot 10'57 = \begin{pmatrix} 34'14 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$X_2 = 75 - 10'57 = 64'43$

La nueva tabla quedaría:

			1	1	1	
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**LD**
Z	0	0	-10	-5’63	-0’59	-1.096’28
X_1	1	0	1	-0’14	0’29	34’14
X_2	0	1	1	0’57	-0’14	64’43

$\alpha_k < 0 \Rightarrow$ Solución óptima

X_1= 34'14 Tm de fruta tipo 1

X_2 = 64'43 Tm de fruta tipo 2

X_3 = 5 Tm de fruta tipo 3

Ganancias: 1.096'28 u.m.

Como X_4 y X_5 son nulos, implica que se utilizan todos los recursos de mano de obra.

b) El enunciado plantea aquí un problema que se resuelve obteniendo los valores de las variables duales. Para ello se utilizan los valores de la fila cero para las variables de holgura.

$$Z_4 - C_4 = \overline{\omega} \cdot \overline{a}_4 - c_4 = (\omega_1, \quad \omega_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -5'63$$

$$\left|\omega_1 = -5'63\right| \frac{\text{u.m.}}{\text{h - h (recolección)}}$$

$$Z_5 - C_5 = \overline{\omega} \cdot \overline{a}_5 - c_5 = (\omega_1, \quad \omega_2) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = -0'59$$

$$\left|\omega_2 = -0'59\right| \frac{\text{u.m.}}{\text{h - h (empaquetado)}}$$

La empresa estaría dispuesta a pagar hasta 5'63 u.m. por cada h-h contratada en la recolección y 0'59 u.m. por cada h-h de empaquetado.

La diferencia de estas posibles retribuciones se basa en que al disponerse inicialmente de menos horas para la recolección, esta restricción configura el problema más rígidamente que la restricción de empaquetado. Si hubiesen más horas para recolección sin variar las disponibles para empaquetado el problema se modificará en sus resultados, creciendo el beneficio en la proporción 5'63·(horas extras recolección). Mientras que si crecieran las horas disponibles para empaquetado solamente, el beneficio crecería en la forma 0'59·(horas extras empaquetado).

c) Se plantea cuál es el intervalo de variación para b_1 sin que cambie la base. Se trata de un análisis de sensibilidad en el que se busca el intervalo de valores para b_1 que mantiene la Base $\overline{B} = (\overline{a}_1, \overline{a}_2)$ como óptima:

La expresión para el lado derecho es:

$$\overline{X}_B = \underline{\overline{b}} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 \cdot \overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 \cdot \overline{u}_{N_2}$$

La expresión que dirige la perturbación sería (puesto que en el óptimo $\overline{N}_2 = \{0\}$)

$$\underline{\bar{b}}' = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b}' - \bar{B}^{-1} \cdot \bar{N}_1 \cdot \bar{l}_{N_1} \qquad \bar{b}' = \begin{pmatrix} 178 + \Delta_1 \\ 226 \end{pmatrix}$$

Sustituyendo:

$$\underline{\bar{b}}' = \begin{pmatrix} -0'14 & 0'29 \\ 0'57 & -0'14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 178 + \Delta_1 \\ 226 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0'14 & 0'29 \\ 0'57 & -0'14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \geq 0$$

Primera ecuación

$$-24'92 - 0'14 \cdot \Delta_1 + 65'54 - 5'15 \geq 0$$

$$-0'14 \cdot \Delta_1 + 35'47 \geq 0$$

$$-0'14 \cdot \Delta_1 \geq -35'47$$

$$\Delta_1 \leq \frac{35'47}{0'14} = 253'36$$

Segunda ecuación

$$101'46 + 0'57 \cdot \Delta_1 - 31'64 - 5'05 \geq 0$$

$$0'57 \cdot \Delta_1 + 64'77 \geq 0$$

$$\Delta_1 \geq -\frac{64'77}{0'57} = -113'63$$

Por tanto:

$$-113'63 \leq \Delta_1 \leq 253'36$$

$$-113'63 + 178 \leq b_1 \leq 178 + 253'36$$

$64'36 \leq b_1 \leq 431'36$ (horas-hombre dedicadas a recolección)

Para este intervalo la base actual $\bar{B} = (\bar{a}_1, \bar{a}_2)$ es óptima. Es decir, se seguirán recolectando las 5 Tm. obligatorias de fruta del tipo 3 y una cantidad variable de fruta del tipo 1 y 2 en función de la variación de disponibilidad de mano de obra de recolección. Si se pasa este intervalo una de las variables X_1 ó X_2 saldría de la base.

PROBLEMA 8

Un grupo empresarial de suministro de electricidad se enfrenta a un problema derivado del crecimiento en la demanda de energía eléctrica como consecuencia, fundamentalmente de un espectacular auge en el sector turístico, asociado al lógico consumo de electricidad. Esta situación se ve agravada porque la empresa no ha terminado las obras de construcción de una nueva central diseñada, en principio, para absorber la demanda eléctrica estimada para los próximos 25 años. Como consecuencia, y dado que las actuales instalaciones sólo generan suficiente energía eléctrica para satisfacer la demanda de las horas de consumo normal y valle, ha sido necesario la adquisición de máquinas de encendido rápido para poder generar la energía correspondiente a las horas pico que, aproximadamente, coinciden con el horario laboral matinal habitual. Esta demanda pico, por encima de la normal, se estima en un total de 180 Mw·h (Megawatios hora). Los citados motores de encendido rápido son tres, procedentes de distintos fabricantes y diferentes especificaciones técnicas. Así, el primero, de procedencia nacional, fabricado con el asesoramiento de insignes ingenieros, puede generar 5 Mw, con un coste estimado de funcionamiento de 40.000 pts la hora; el fabricante recomienda que no funcione nunca menos de media hora una vez haya sido puesto en marcha, con objeto de rentabilizar su funcionamiento, y que tampoco supere las 5 horas de trabajo, debido a problemas técnicos de diseño, ya que algunas piezas del motor podrían griparse con un funcionamiento excesivo. El segundo motor, fabricado en Taiwan, puede generar hasta 9 Mw, con un coste por hora de funcionamiento de 64.000 pts; por razones análogas a las del primer motor, no debe trabajar menos de 1 hora, una vez puesto en marcha, ni más de 8 horas. Finalmente, el tercer motor, de procedencia desconocida, puede generar hasta 12 Mw con un coste por hora de 170.000 pts; de forma similar a los anteriores, no debe estar en funcionamiento menos de 2 horas ni más de 12 una vez puesto en marcha. Además de los condicionamientos anteriores, debe sumarse que estos motores precisan de un elevado mantenimiento por parte de personal especializado, estimándose que el primero, el de fabricación nacional, necesita de la atención de media hora de técnico especializado por cada hora de funcionamiento; el segundo motor reduce su necesidad de atención a un cuarto de hora por cada hora de funcionamiento; el tercero, afortunadamente, precisa de menos mantenimiento, por lo que no es necesario la atención continua del técnico, no contabilizándose ésta. Debido a la marcha a otra empresa de uno de los dos técnicos especializados, y dado que la formación de un especialista de estas características puede llevar al menos un año, la empresa debe asignar lo más eficientemente al operario de que dispone. Por acuerdos sindicales, este empleado realiza solamente una jornada laboral diaria de 5 horas. Con los datos ofrecidos, calcular:

a) ¿Cuál es la asignación de funcionamiento de las distintas máquinas que minimiza el coste de generación eléctrica diaria con las condiciones mencionadas anteriormente?

b) ¿Cuál podría ser la variación posible en la disponibilidad diaria de mano de obra de técnico especializado para mantener la producción tal como se halló en el primer apartado?

c) ¿Cuánto pagaría la empresa en las actuales circunstancias por una hora adicional de mano de obra? ¿Cuál sería el coste de incrementar en 1 Megawatio·hora la producción diaria?

SOLUCIÓN:

a) Llamando:

X_1 al nº de horas de funcionamiento del motor 1.
X_2 al nº de horas de funcionamiento del motor 2.
X_3 al nº de horas de funcionamiento del motor 3.

El estudio se realiza tomando un día como base. En función del enunciado el programa lineal que recoge el planteamiento es:

$$Min\,Z = 40 \cdot X_1 + 64 X_2 + 170 \cdot X_3$$

S.a:

$$\begin{array}{lllllll} 5 \cdot X_1 & + & 9 \cdot X_2 & + & 12 \cdot X_3 & \geq & 180 \\ 0'5 \cdot X_1 & + & 0'25 \cdot X_2 & & & \leq & 5 \end{array}$$

$$0'5 \leq X_1 \leq 5$$
$$1 \leq X_2 \leq 8$$
$$2 \leq X_3 \leq 12$$

Se trata de un problema de variables acotadas donde es necesario añadir una variable artificial para obtener una base inicial. Se resolverá mediante el método de penalización.

$$Min\,Z = 40 \cdot X_1 + 64 X_2 + 170 \cdot X_3 + M \cdot X_6$$

S.a:

$$\begin{array}{lllllllllll} 5 \cdot X_1 & + & 9 \cdot X_2 & + & 12 \cdot X_3 & - & X_4 & & & + & X_6 & = & 180 \\ 0'5 \cdot X_1 & + & 0'25 \cdot X_2 & & & & & + & X_5 & & & = & 5 \end{array}$$

$$0'5 \le X_1 \le 5$$
$$1 \le X_2 \le 8 \qquad\qquad X_4, X_5, X_6 \ge 0$$
$$2 \le X_3 \le 12$$

Dando a M un valor, por ejemplo, de 200 entonces M=200

La matriz de restricciones sería:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 12 & -1 & 0 & 1 \\ 0'5 & 0'25 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{B} = [\overline{a}_6, \overline{a}_5] \ ; \ \overline{X}_B = (X_6 \ , \ X_5)$$

Interesa situar las variables X_1 y X_2 en la cota superior ya que son las que menos contribuyen al coste. La variable X_3 tomará posiblemente un valor intermedio en su margen de factibilidad.

$$\overline{X}_{N_1} = (X_3, X_4) \ ; \ \overline{N}_1 = [\overline{a}_3, \overline{a}_4]$$

$$\overline{X}_{N_2} = (X_1, X_2) \ ; \ \overline{N}_2 = [\overline{a}_1, \overline{a}_2]$$

Aplicando el algoritmo de variables acotadas:

$$\overline{X}_B = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 \cdot \overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 \cdot \overline{u}_{N_2}$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 12 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0'5 & 0'25 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 180 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 24 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 97 \\ 4'5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ 0'5 \end{pmatrix} > \overline{0}$$

Solución básica factible inicial.

A continuación se calcula los valores de la fila cero.

$$\overline{C}_B = (C_6, C_5) = (200,0)$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \, \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = (200,0) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0'5 \end{pmatrix} - 40 = 960$$

$$Z_2 - C_2 = (200,0)\cdot\begin{pmatrix}9\\0'25\end{pmatrix} - 64 = 1736$$

$$Z_3 - C_3 = (200,0)\cdot\begin{pmatrix}12\\0\end{pmatrix} - 170 = 2230$$

$$Z_4 - C_4 = (200,0)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} - 0 = -200$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}\right)\cdot \overline{l}_{N_1} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 - \overline{C}_{N_2}\right)\cdot \overline{u}_{N_2}$$

$$Z = (200,0)\cdot\begin{pmatrix}180\\5\end{pmatrix} - \left[(200,0)\cdot\begin{pmatrix}12 & -1\\0 & 0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}170\\0\end{pmatrix}\right]\cdot(2,0) -$$

$$-\left[(200,0)\cdot\begin{pmatrix}5 & 9\\0'5 & 0'25\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}40\\64\end{pmatrix}\right]\cdot(5,8) = 36000 - 4460 - 18688 = 12852$$

La primera tabla quedaría:

	u	u	l	l			
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	960	1736	2230	-200	0	0	12852
X_6	5	9	**12**	-1	0	1	59
X_5	0'5	0'25	0	0	1	0	0'5

l: cota inferior
u: cota superior

Aplicando el algoritmo:

$$\alpha_k = Max(2230, -960) = 2230 > 0$$

Solución mejorable.

$K = 3, K \in R_1$; X$_3$ candidata a entrar en la base.

$$\gamma_1 = \frac{\tilde{b}_1 - l_{B_1}}{y_{13}} = \frac{59-0}{12} = 4'92$$

X_6: candidato a salir de la base.
y_{13}: posible pivote.

$\gamma_2 = \infty$; debido a que $\bar{y}_3 \geq \bar{0}$

$\gamma_3 = u_3 - l_3 = 12 - 2 = 10$

Queda:

$$\Delta_3 = Min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = Min(4'92, \infty, 10) = 4'92 \equiv \gamma_1$$

La variable X_6 sale de la base y entra X_3. Se pivotea sobre y_{13} excepto el lado derecho, que quedaría:

$$Z = \hat{Z} - \Delta_3 \cdot \alpha_3 = 12852 - 2230 \cdot 4'92 = 1887'833$$

$$\bar{X}_B = \hat{\underline{b}} - \Delta_3 \cdot \bar{y}_3$$

$$\bar{X}_B = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 59 \\ 0'5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot 4'92 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0'5 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = l_3 + \Delta_3 \quad ; \quad X_3 = 2 + 4'92 = 6'92$$

La tabla, una vez realizada la iteración queda:

	u	u		l		l	
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	30'83	63'5	0	-14'17	0	-185'83	1887'833
X_3	0'42	0'75	1	-0'083	0	0'083	6'92
X_5	0'5	0'25	0	0	1	0	0'5

Como $\alpha_k = -14'17 < 0$ $\Rightarrow$ Solución óptima.

El motor 1 debe funcionar 5 horas en las horas pico de demanda
El motor 2 debe funcionar 8 horas en las horas pico de demanda
El motor 3 debe funcionar 6'92 horas en las horas pico de demanda

Como X_5 = 0'5 sobra media hora de especialista.
Coste de funcionamiento: Z = 1.887.833 pts.

b) Se solicita un análisis de sensibilidad en el vector de lado derecho para la segunda restricción. La expresión que rige la sensibilidad del lado derecho es:

$$\overline{X}'_B = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 \cdot \overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 \cdot \overline{u}_{N_2}$$

con $\overline{b}' = \overline{b} + \Delta \overline{b}$; $\overline{b}' = \begin{pmatrix} 180 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta b_2 \end{pmatrix}$

$$\overline{X}'_B = \begin{pmatrix} X_3' \\ X_5' \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0'083 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 180 \\ 5 + \Delta b_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0'083 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{bmatrix} 0'083 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 0'5 & 0'25 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14'94 \\ 5 + \Delta b_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8'051 \\ 4'5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6'92 \\ 0'5 + \Delta b_2 \end{pmatrix}$$

Se tiene que cumplir que:

$$X'_5 = 0'5 + \Delta b_2 \geq 0$$
$$\Delta b_2 \geq -0'5$$

Dado este intervalo, la variación de b'_2 sería:

$$b_2 + \Delta b_2^- \leq b_2' \leq b_2 + \Delta b_2^+$$

$5 - 0'5 \leq b'_2 \leq \infty$

$\mathbf{4'5 \leq b'_2 \leq \infty}$

El especialista debe estar disponible al menos cuatro horas y media al día, resultado previsible dado el valor de la variable X_5 obtenido en el apartado anterior. Aunque se dispusiese de mano de obra ilimitada la asignación del apartado a) se mantendrá ya que $b'_2 \leq \infty$

c) Se solicita en este apartado un análisis de las variables duales.

El coste de una hora adicional de mano de obra sería:

$\overline{a}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\qquad Z_5 - C_5 = \overline{C}_B \, \overline{B}^{-1} \, \overline{a}_5 - C_5$

$\overline{w} = (w_1, w_2)$; $\qquad Z_5 - C_5 = \overline{w}^* \, \overline{a}_5 - C_5$

Sustituyendo:

$$0=(w_1\,,w_2)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}-0\ ; \qquad w_2=0 \text{ pts. / h-h adicional.}$$

Resultado lógico, ya que la variable de holgura X_5 resultó positiva en la tabla óptima. No obstante, a efectos reales la empresa debe plantearse la necesidad de formar a otro técnico para posibles contingencias, dado que el técnico disponible puede fallar por cualquier motivo (enfermedad, vacaciones...)

El coste de generar 1 Mw·h adicional sería:

$$\bar{a}_4=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}\ ; \quad Z_4-C_4=(w_1\,,w_2)\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}-0$$

$-14'17=-w_1$; Multiplicado por 1.000 debido a que originalmente la función objetivo se dividió por dicho valor

$w_1 = \mathbf{14.170}$ pts./ Mw·h

Es decir, el coste total de producir 1 Mw·h adicional supone 14.170 pts.

PROBLEMA 9

Una fábrica se dedica a la producción y venta de electrodomésticos, ofertando en estos momentos tres productos: neveras, microondas y lavadoras, que puede vender a 80.000, 40.000 y 60.000 pesetas respectivamente. En el proceso productivo se dispone en fábrica de dos tipos diferentes de técnicos (A y B). Los primeros, de tipo A, se encargarán del montaje de los electrodomésticos, mientras que los segundos, los de tipo B, lo harán de la puesta a punto, entendiendo como tal las labores de ajuste de temperatura, revisión de circuitos y perfeccionamiento. La relación de horas-hombre necesarias por cada uno de los tipos de técnicos para realizar su misión en cada uno de los electrodomésticos con los que trabaja la fábrica vienen expresados en la siguiente tabla:

	Técnico Tipo A	Técnico Tipo B
Nevera	4	2
Microondas	1	1
Lavadora	3	2

La disponibilidad de horas diarias de estos técnicos alcanza un máximo de 180 horas para los de tipo A y de 200 horas para los técnicos de tipo B. Por otra parte, y por razones de competencia, el número total de electrodomésticos fabricados diariamente habrá de ser como mínimo de 40.

a) Estudiar cómo habría de ser la fabricación óptima para maximizar los ingresos.

b) Estudiar cuáles son los márgenes de variabilidad que puede tener el vector de lado derecho sin que se modifique la base óptima según se determinó en el apartado a).

SOLUCIÓN:

a) Llamando:

X_1: Cantidad de neveras a fabricar diariamente.
X_2: Cantidad de microondas a fabricar diariamente.
X_3: Cantidad de lavadoras a fabricar diariamente.

El programa lineal que corresponde al enunciado es el siguiente:

$$Max\, Z = 80 \cdot X_1 + 40 \cdot X_2 + 60 \cdot X_3$$

S.a:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4\cdot X_1 & + & X_2 & + & 3\cdot X_3 & \leq & 180 \\ 2\cdot X_1 & + & X_2 & + & 2\cdot X_3 & \leq & 200 \\ X_1 & + & X_2 & + & X_3 & \geq & 40 \end{array}$$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Pasando el problema a la forma estándar de minimización.

$$-Min\,Z = -80\cdot X_1 - 40\cdot X_2 - 60\cdot X_3 + X_7$$

S.a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} 4\cdot X_1 & + & X_2 & + & 3\cdot X_3 & + & X_4 & & & & & & & = & 180 \\ 2\cdot X_1 & + & X_2 & + & 2\cdot X_3 & & & + & X_5 & & & & & = & 200 \\ X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & & & & - & X_6 & + & X_7 & = & 40 \end{array}$$

$X_j (j = 1 \ldots 7) \geq 0$

X_7: variable artificial

Se ha añadido una variable artificial (X_7) que se incluye en la función objetivo con coeficiente M=1 para intentar reducirla mediante el método de penalización.

La matriz de restricciones y los valores de las variables básicas inicialmente son:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};\ \overline{B} \equiv \overline{I} = \left[\overline{a}_4 , \overline{a}_5 , \overline{a}_7\right]$$

$$\overline{X}_B = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 180 \\ 200 \\ 40 \end{pmatrix};\ \overline{C}_B = (0 , 0 , 1)$$

Los elementos de la fila cero para la primera tabla Simplex quedan:

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = (0 , 0 , 1)) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - (-80) = 81$$

$$Z_2 - C_2 = 41$$
$$Z_3 - C_3 = 61$$
$$Z_6 - C_6 = -1$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (0\ ,\ 0\ ,\ 1) \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 200 \\ 40 \end{pmatrix} = 40$$

La primera tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	81	41	61	0	0	-1	0	40
X_4	4	1	3	1	0	0	0	180
X_5	2	1	2	0	1	0	0	200
X_7	**1**	1	1	0	0	-1	1	40

Iterando:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	0	-40	-20	0	0	80	-81	-3200
X_4	0	-3	-1	1	0	**4**	-4	20
X_5	0	-1	0	0	1	2	-2	120
X_1	1	1	1	0	0	-1	1	40

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	0	20	0	-20	0	0	-1	-3600
X_6	0	-3/4	-1/4	1/4	0	1	-1	5
X_5	0	1/2	1/2	-1/2	1	0	0	110
X_1	1	**1/4**	3/4	1/4	0	0	0	45

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	LD
Z	-80	0	-60	-40	0	0	-1	-7200
X_6	3	0	2	1	0	1	-1	140
X_5	-2	0	-1	-1	1	0	0	20
X_2	4	1	3	1	0	0	0	180

Solución óptima

En la tabla de resultados anterior, podemos deducir los siguientes puntos:

De los tres productos posibles nos quedamos sólo con X_2 (El microondas), que será el único que fabriquemos. De este electrodoméstico produciremos 180 unidades diarias. De los otros no produciremos nada.

$\mathbf{X_1=0}$
$\mathbf{X_2=180}$
$\mathbf{X_3=0}$

Por otro lado, analizando las variables de holgura que habíamos situado en las restricciones, observamos que la primera restricción no tendrá holgura, mientras que la segunda y la tercera sí.

$X_4 = 0$
$X_5 = 20$
$X_6 = 140$

Estos valores se podrán interpretar en el sentido de que nos sobrarán 20 horas diarias de técnico B, y a su vez que cumpliremos la tercera restricción con una holgura de 140 unidades.

Por otro lado, los beneficios obtenidos con este esquema de producción serán de 7,200.000 pesetas.

Esta cantidad se obtiene de multiplicar los 180 microondas por el precio (40000) de cada uno en el mercado.

El resultado obtenido es ciertamente curioso, ya que al principio se podía haber pensado que al ser el microondas el producto más barato de todos, sería éste el producto que más claramente no iba a ser fabricado. Sin embargo, si nos fijamos en las restricciones, observamos que es éste el producto que menos horas requiere por parte de los técnicos, y por ser estas horas el bien más querido de la empresa (a tenor de las fuertes restricciones a las que está sometido) se concluye que para los coeficientes de costes y disponibilidades actuales, estos son los patrones de producción más adecuados.

A continuación, y con los análisis de sensibilidad, iremos observando hasta qué punto la modificación en los datos iniciales podrá o no ir variando estos resultados.

b) Análisis de sensibilidad para el vector de lado derecho original. Se trata de estudiar cuánto pueden variar las disponibilidades de técnicos de fabricación y los límites mínimos y máximos de fabricación de tal forma que se mantenga la base óptima hallada en el apartado a). Es decir, manteniendo sólo la fabricación del microondas.

En primer lugar se estudia la variabilidad de los técnicos de tipo A.

$b_1 \rightarrow b_1' = b_1 + \Delta b_1$

Para mantener la factibilidad se ha de cumplir que $\underset{\sim}{\overline{b}'} \geq \overline{0}$

$$\underset{\sim}{\overline{b}} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} \quad ; \quad \underset{\sim}{\overline{b}}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' \quad ; \quad \underset{\sim}{\overline{b}}' = \overline{B}^{-1} \begin{pmatrix} b_1 + \Delta b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

donde:

$b_1 = 180$
$b_2 = 200$
$b_3 = 40$

La base inversa actual obtenida de la Tabla Simplex óptima es:

$$\overline{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\overline{y}_{X_4}, \overline{y}_{X_5}, \overline{y}_{X_7}\right]$$

Que corresponde a los valores de los vectores columna situados debajo de las variables básicas iniciales del problema.

Sustituyendo:

$$\underset{\sim}{\overline{b}}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 180 + \Delta b_1 \\ 200 \\ 40 \end{bmatrix} \geq \overline{0}$$

Operando:

$$\begin{aligned} &180 + \Delta b_1 - 40 \geq 0 && ; \quad \Delta b_1 \geq -140 \\ &-180 - \Delta b_1 + 200 \geq 0 && ; \quad \Delta b_1 \leq 20 \\ &180 + \Delta b_1 \geq 0 && ; \quad \Delta b \geq -180 \end{aligned}$$

De las tres expresiones las más restrictivas son:

$-140 \leq \Delta b_1 \leq 20$

Por tanto, la variabilidad de b'$_1$ quedaría:

$$180+\Delta b_1^- \leq b_1^{'} \leq 180+\Delta b_1^+$$
$$\mathbf{40 \leq b_1^{'} \leq 200}$$

El intervalo de valores para b'_1 en el análisis de sensibilidad estará entre 40 y 200, siendo su valor original 180.

Mientras se mantenga en ese intervalo la base seguirá siendo óptima, aunque los beneficios disminuirán o aumentarán, ya que variará la cantidad de X_2 a producir.

Sin embargo, por debajo de los 40 obtendremos una solución no factible (por ser incompatible con la restricción 3), y por encima de los 200 ya no sería ésta la base óptima porque el principal cuello de botella del proceso productivo (los técnicos tipo A) dejaría de serlo para ocupar su lugar el otro factor productivo.

Calcularemos ahora la variabilidad de b$_2$.

$$b_2 \rightarrow b_2^{'} = b_2 + \Delta b_2$$

$$\underset{\sim}{\overline{b}}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}^{'} \geq 0\,; \quad \underset{\sim}{\overline{b}}^{'} = \overline{B}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 + \Delta b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \geq \overline{0}$$

Sustituyendo y operando:

$$\underset{\sim}{\overline{b}}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 200+\Delta b_2 \\ 40 \end{pmatrix} \geq \overline{0}$$

$$180-40 \geq 0$$
$$-180+200+\Delta b_2 \geq 0 \quad ; \quad \Delta b_2 \geq -20$$
$$180 \geq 0$$

De las tres expresiones anteriores deducimos que:

$$-20 \leq \Delta b_2 \leq \infty$$

Quedando, por tanto la variabilidad de b'$_2$ como:

$$200+\Delta b_2^- \leq b_2^{'} \leq 200+\Delta b_2^+$$
$$\mathbf{180 \leq b_2^{'} \leq \infty}$$

Vamos a analizar b'_2 cuyo valor original es 200. El intervalo de valores estará entre 180 e infinito.

La razón se encuentra en que en estos momentos la segunda restricción tiene una holgura de 20 horas del técnico tipo A. Es decir, a la solución en estos momentos planteada le están sobrando esas 20 horas.

Pero si b'_2 tomase un valor menor de 180, entonces la solución cambiaría, ya que entonces no podría fabricar 180 microondas, sino menos, lo cual también influiría en el beneficio, y la base óptima ya no tendría por qué ser la misma (es decir X_2 ya no tendría por qué ser el único producto fabricado).

Además, si en un momento dado la producción baja de los 40 electrodomésticos, tendríamos una solución no factible.

En cuanto a la cota superior, podemos ver que no hay nada que impida que aumente indefinidamente, pues lo único que conseguiremos será que la restricción tenga una mayor holgura.

Finalmente, se estudiará el intervalo de variación de b_3.

$$b_3 \rightarrow b_3' = b_3 + \Delta b_3$$

$$\underset{\sim}{\overline{b}'} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' \geq \overline{0}; \quad \underset{\sim}{\overline{b}'} = \overline{B}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq \overline{0}$$

Sustituyendo y operando:

$$\underset{\sim}{\overline{b}'} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 180 \\ 200 \\ 40 + \Delta b_3 \end{pmatrix} \geq \overline{0}$$

$$180 - 40 - \Delta b_3 \geq 0 \ ; \ \Delta b_3 \leq 140$$
$$-180 + 200 \geq 0$$
$$180 \geq 0$$

De las tres expresiones anteriores deducimos que:

$$-\infty \leq \Delta b_3 \leq 140$$

Quedando entonces la variabilidad de b'_3 como:

$$40 + \Delta b_3^- \leq b_3' \leq 40 + \Delta b_3^+$$
$$\mathbf{-\infty \leq b_3' \leq 180}$$

Ahora analizaremos b'_3, cuyo intervalo resulta entre menos infinito (aunque en términos reales será cero porque no puede fabricarse negativamente) y 180. Parece claro que como la restricción nos dice que el total de productos debe ser mayor que 40 y al final el óptimo es 180, cualquier b'_3 que no pase de 180 no afectará para nada al problema (ya que la holgura de la restricción es de 140).

Sin embargo, si b'_3 es mayor de 180, tendremos entonces un problema no factible, al no permitirlo la primera restricción.

PROBLEMA 10

Una empresa se dedica a fabricar tubos de PVC para su uso en fontanería. En la actualidad, su gama de productos se reduce a tres tipos de tubos con características diferentes y que se venden a precios distintos. La fabricación consiste en dos etapas muy sencillas en las que se ha de someter a cada tipo de tubo a un proceso de inyección y a otro de pulido. Las unidades de fabricación se miden por hectómetros. Cada Hm de tubo tipo 1 genera unos beneficios de 10.000 pesetas, el de tipo 2 implica 12.000 pesetas, mientras que los del tipo 3 producen unos beneficios de 7.000 pesetas. La tabla muestra las horas que necesita cada Hm producido en cada uno de los dos procesos a los que se somete al PVC para producir los tubos; también ofrece las disponibilidades máximas de funcionamiento mensual de cada uno de los trenes de maquinaria.

	Horas necesarias por cada Hm de tubo producido			
	Tubo 1	Tubo 2	Tubo 3	Disponibilidades máximas de horas mensuales
Pulido	14	8	5	110
Inyección	22	17	1	250

Con los datos ofrecidos, calcular:

a) Los hectómetros a fabricar mensualmente de cada uno de los tipos de tubo con objeto de maximizar los beneficios

b) Los hectómetros a fabricar mensualmente de cada uno de los tipos de tubo con objeto de maximizar los beneficios suponiendo que se introducen cambios en las máquinas de fabricación, que permiten que el tubo de tipo 2 no necesite pasar por el proceso de pulido pero, sin embargo, necesite 18 horas de inyección por cada hectómetro producido.

SOLUCIÓN:

a) Llamando:

X_1: Hm de tubo 1 fabricado mensualmente.
X_2: Hm de tubo 2 fabricado mensualmente.

En función del enunciado, el planteamiento quedaría:

$$Max\,Z = 10 \cdot X_1 + 12 \cdot X_2 + 7 \cdot X_3$$

S.a:

$$\begin{array}{lllllll} 14 \cdot X_1 & + & 8 \cdot X_2 & + & 5 \cdot X_3 & \leq & 110 \\ 22 \cdot X_1 & + & 17 \cdot X_2 & + & X_3 & \leq & 250 \end{array}$$

$X_1 , X_2 , X_3 \geq 0$

Pasando a la forma estándar de minimización:

$$-\,Min\,Z = -10 \cdot X_1 - 12 X_2 - 7 \cdot X_3$$

S.a:

$$\begin{array}{lllllllllll} 14 \cdot X_1 & + & 8 \cdot X_2 & + & 5 \cdot X_3 & + & X_4 & & & = & 110 \\ 22 \cdot X_1 & + & 17 \cdot X_2 & + & X_3 & & & + & X_5 & = & 250 \end{array}$$

$X_1 , X_2 , X_3 , X_4 , X_5 \geq 0$

Variables básicas y no básicas:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 14 & 8 & 5 & 1 & 0 \\ 22 & 17 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \overline{B} = \left[\overline{a}_{X4} , \overline{a}_{X5} \right]$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 250 \end{pmatrix} ; \; \overline{X}_N = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Valores de la fila cero para la primera tabla:

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 0$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = 10$$
$$Z_2 - C_2 = 12$$
$$Z_3 - C_3 = 7$$

La primera tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	10	12	7	0	0	0
X_4	14	**8**	5	1	0	110
X_5	22	17	1	0	1	250

Aplicando el algoritmo Simplex.

$$Z_K - C_K = \underset{j \in R}{Max}\left(Z_j - C_j\right) = Z_2 - C_2 = 12$$

K=2 ; X_2 entra en la base.

$$X_2 = \underset{1 \le i \le m}{Min}\left(\frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right) = Min\left(\frac{110}{8}, \frac{250}{17}\right) = 13'75 = \frac{b_1}{y_{12}}$$

X_4 sale de la base. Pivote: y_{12}

Tras el pivoteo, la nueva tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD	
Z	-11	0	-1/2	-3/2	0	-165	
X_2	7/4 1'75	1	0'625 5/8	0'125 1/8	0	55/4	13'75
X_5	-31/4 7'75	0	9'625 -77/8	2'125 -17/8	1	65/4	16'25

Solución óptima:

Z = 165.000 pesetas de beneficios mensuales
X_1 = 0 No se fabrica tubo tipo 1
X_2 = 55/4 ≈ 13'75 Hm del tubo tipo 2
X_3 = 0 No se fabrica tubo tipo 3

b) Al producirse un cambio en los coeficientes tecnológicos significa que la matriz de restricciones cambia. Estamos ante un caso de sensibilidad sobre la matriz de restricciones.

Actualmente $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 8 \\ 17 \end{pmatrix}$; tras el cambio $\bar{a}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$

Por tanto, $\bar{y}_2' = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{a}_2' = \begin{pmatrix} 1/8 & 0 \\ -17/8 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix}$

$$(Z_2 - C_2)' = \bar{C}_B \cdot \bar{B}^{-1} \cdot \bar{a}_2' - C_2 = (-12,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 18 \end{pmatrix} - (-12) = 12$$

$y_{12}' = 0$; la base actual deja de generar el espacio vectorial correspondiente. Es necesario introducir una variable artificial (X_6) con $Z_6 - C_6 = 0$; $\bar{y}_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

La variable artificial X_6 tomará categoría de variable básica y pasará a ocupar la posición de X_2 que ha dejado de ser básica, quedando la tabla Simplex:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	**LD**
Z	-11	12	-1/2	-3/2	0	0	-165
X_6	7/4	0	5/8	1/8	0	1	55/4
X_5	-31/4	18	-77/8	-17/8	1	0	65/4

Con la función objetivo: (Para resolver el problema utilizando el método de penalización dado que es necesario eliminar la variable artificial introducida)

$$-Min\,Z = -10 \cdot X_1 - 12X_2 - 7 \cdot X_3 + M \cdot X_6$$

Con M=1 es suficiente para penalizar la variable artificial.

Por tratarse X_6 de una variable básica significa que es necesario hacer también un análisis de sensibilidad para el vector de costes con un cambio desde C_6=0 (valor inicial) a C_6=1 (valor con M=1).

La regla de sensibilidad para la fila cero es:

$(Z_j - C_j)' = (Z_j - C_j) + \Delta c_{Bt} \cdot y_{tj}$ Para todo $j \neq K$; con k = 6 y t = 1

Donde:
$\Delta c_{Bt} = 1 - 0 = 1$

La nueva fila cero quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-37/4	12	1/8	-11/8	0	0	-605/4
X_6	7/4	0	5/8	1/8	0	1	55/4
X_5	-31/4	**18**	-77/8	-17/8	1	0	65/4

X_2 entra en la base y sale X_5. Pivote: y_{22}
Iterando sucesivamente según el algoritmo Simplex.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-49/12	0	157/24	1/24	-2/3	0	-1945/12
X_6	7/4	0	**5/8**	1/8	0	1	55/4
X_2	-31/72	1	-77/144	-17/144	1/18	0	65/72

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-22'4	0	0	-1'27	-0'67	-10'47	-306
X_3	2'8	0	1	0'2	0	1'6	22
X_2	1'16	1	0	-0'003	0'06	0'91	12'67

Solución óptima:

X_1 = 0 Hm. No se fabrica tubo tipo 1
X_2 = 12'67 Hm fabricados del tubo tipo 2
X_3 = 22 Hm fabricados del tubo tipo 3

Beneficios 306.000 pts. ⟶ Este proceso ofrece mayores beneficios que el anterior.

X_4 y $X_5 = 0$ ⟶ Se aprovechan totalmente los recursos.

PROBLEMA 11

Un conjunto de socios ha decidido introducirse en el mercado de venta de productos gaseosos derivados del petróleo para consumo hotelero y de grandes talleres mecánicos. Inicialmente se plantean comercializar tres productos: gas-A, gas-B y gas-C. Tras estudiar detenidamente el proceso de almacenaje y distribución, partiendo además de experiencias de otras empresas similares, obtienen como datos los siguientes:

Horas-hombre necesarias para la distribución por cada tonelada de los respectivos gases:

Gas-A:	2
Gas-B:	7
Gas-C:	4

Metros cúbicos necesarios para almacenar una tonelada de los diversos gases considerados:

Gas-A:	3
Gas-B:	3
Gas-C:	5

En el caso particular de esta sociedad, los costes en que van a incurrir por cada tonelada de gas distribuida ascienden a 10.000 pts en el caso del gas-A, 12.000 pts para el gas-B y 30.000 pts para el gas-C. La inversión realizada exige que, al menos, se aprovechen las 100 horas diarias de mano de obra disponible (ampliables fácilmente) y los 70 m^3 que, diariamente, pueden transportar los vehículos adquiridos (también fácilmente ampliable la capacidad).

Dada las relaciones de estos accionistas con otras empresas ya instaladas se ha llegado al acuerdo de operar por cuotas, permitiéndose que se pueda distribuir un máximo diario de 25 toneladas de gas-A y 30 toneladas de gas-B; la distribución de gas-C no está limitada por ningún acuerdo. Sin embargo, el trato obliga a distribuir un mínimo diario de 5 toneladas de gas-A y 11 de gas-B.

Con el objetivo de minimizar los costes de operación calcular:

a) Cantidad de toneladas de los distintos gases que deben distribuirse diariamente (utilizar para obtener una solución inicial del problema el método de dos fases).

b) El rango de variabilidad del coste unitario del gas-A que garantiza la no variación de la solución óptima obtenida.

SOLUCIÓN:

a) Llamando:

X_1: Tm de gas-A distribuidas diariamente.
X_2: Tm de gas-B distribuidas diariamente.
X_3: Tm de gas-C distribuidas diariamente.

En función del enunciado el planteamiento del problema sería:

$$Min\, Z = 10 \cdot X_1 + 12 \cdot X_2 + 30 \cdot X_3$$

S.a:

$$\begin{array}{lllllll} 2 \cdot X_1 & + & 7 \cdot X_2 & + & 4 \cdot X_3 & \geq & 100 \\ 3 \cdot X_1 & + & 3 \cdot X_2 & + & 5 \cdot X_3 & \geq & 70 \end{array}$$

$$5 \leq X_1 \leq 25 \qquad X_3 \geq 0$$
$$11 \leq X_2 \leq 30$$

Expresando el problema en forma estándar de minimización para aplicar el Método Simplex para variables acotadas:

$$Min\, Z = 10 \cdot X_1 + 12 \cdot X_2 + 30 \cdot X_3$$

S.a:

$$\begin{array}{lllllllllll} 2 \cdot X_1 & + & 7 \cdot X_2 & + & 4 \cdot X_3 & - & X_4 & & & = & 100 \\ 3 \cdot X_1 & + & 3 \cdot X_2 & + & 5 \cdot X_3 & & & - & X_5 & = & 70 \end{array}$$

$$5 \leq X_1 \leq 25 \qquad X_3, X_4, X_5 \geq 0$$
$$11 \leq X_2 \leq 30$$

Como no tenemos una submatriz identidad para asignarle la función de base inicial del problema, añadimos variables artificiales y las eliminamos mediante el método de dos fases.

1ª Fase:

$$Min\, X_0 = X_6 + X_7$$

S.a:

$$\begin{array}{lcccccccccccccc}
2\cdot X_1 & + & 7\cdot X_2 & + & 4\cdot X_3 & - & X_4 & & & + & X_6 & & & = & 100 \\
3\cdot X_1 & + & 3\cdot X_2 & + & 5\cdot X_3 & & & - & X_5 & & & + & X_7 & = & 70
\end{array}$$

$$5 \leq X_1 \leq 25$$
$$11 \leq X_2 \leq 30 \qquad X_3, X_4, X_5, X_6, X_7 \geq 0$$

X_6, X_7: Variables artificiales.

Para resolver esta 1ª fase utilizamos el método Simplex para variables acotadas. Hacemos un primer tanteo para asignar variables a sus cotas inferiores o superiores.

$$\overline{B} \equiv \overline{I} = [\overline{a}_6, \overline{a}_7]$$

$$\overline{N}_1 = [\overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4, \overline{a}_5]\ ;\ \overline{X}_{N_1} = \overline{l}_{N_1} = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{N}_2 = [\overline{a}_1]\ ;\ \overline{X}_{N_2} = \overline{u}_{N_2} = (X_1) = 25$$

Hemos situado a la variable X_1 en su cota superior por ser la que menor coste asociado tiene. Las demás variables las asignamos a su cota inferior.

Comprobamos si es factible el valor de las variables básicas.

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1}\cdot\overline{b} - \overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_1\cdot\overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_2\cdot\overline{u}_{N_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 7 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot 25 = \begin{pmatrix} -27 \\ -38 \end{pmatrix} < \overline{0}$$

Solución no factible. Esta solución sí es factible para el problema original, pero como hemos añadido variables artificiales hemos cambiado el problema inicial, de ahí la necesidad de eliminar las variables artificiales para mantener el problema como estaba al principio. Realizamos una segunda asignación y tanteamos:

$$\overline{B} \equiv \overline{I} = [\overline{a}_6, \overline{a}_7]$$

$$\overline{N}_1 = [\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3, \overline{a}_4, \overline{a}_5]\ ;\ \overline{X}_{N_1} = \overline{l}_{N_1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comprobamos la factibilidad de las variables básicas.

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 22 \end{pmatrix} \geq \overline{0}$$

Solución factible. Esta asignación es válida.

El valor de la función objetivo X_0 es:

$$X_0 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}\right) \cdot \overline{l}_{N_1} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 - \overline{C}_{N_2}\right) \cdot \overline{u}_{N_2} =$$

$$= (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 70 \end{pmatrix} - \left[(1,1) \cdot \begin{bmatrix} 2 & 7 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 0 & -1 \end{bmatrix} - (0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0) \right] \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= (170) - \left[(5 \quad 10 \quad 9 \quad -1 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 35$$

Los demás elementos de la fila cero quedan:

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \, \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = (1,1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 0 = 5$$

$Z_2 - C_2 = 10$
$Z_3 - C_3 = 9$
$Z_4 - C_4 = -1$
$Z_5 - C_5 = -1$

Con los valores obtenidos formamos la 1ª tabla.

	l	l	l	l	l			
	X₁	**X₂**	**X₃**	**X₄**	**X₅**	**X₆**	**X₇**	**LD**
X₀	5	10	9	-1	-1	0	0	35
X₆	2	7	4	-1	0	1	0	13
X₇	3	3	5	0	-1	0	1	22

l: cota inferior
u: cota superior

Aplicando el algoritmo para variables acotadas:

$$\alpha_k = Max\left[\underset{j\in R_1}{Max}\left(Z_j - C_j\right) ; \underset{j\in R_2}{Max}\left(C_j - Z_j\right)\right]$$

$\alpha_k = Max\ (5, 10, 9, -1, -1) = 10 > 0$; Solución mejorable.

$\alpha_k = Z_2 - C_2$; $K = 2$; $K \in R_1$; X_2: variable candidata a entrar en la base.

$$\gamma_1 = Min\left(\frac{13-0}{7}, \frac{22-0}{3}\right) = \frac{13}{7} = \frac{b_1 - l_{B_1}}{y_{12}}$$

X_6: variable candidata a salir de la base.
y_{12}: posible pivote.

$\gamma_2 = \infty$ debido a que $\overline{y}_2 > \overline{0}$

$\gamma_3 = u_2 - l_2 = 30 - 11 = 19$

Por tanto, $\Delta_2 = Min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = Min\left(\frac{13}{7}, \infty, 19\right) = \frac{13}{7} \equiv \gamma_1$

X_6 desciende hasta su cota inferior saliendo de la base. En su lugar entra X_2. Se realiza un pivoteo sobre el término $y_{12} = 7$ excepto la columna de lado derecho que se calcula aparte.

$$X_0 = \hat{X} - \alpha_k \cdot \Delta_k = \hat{X} - \alpha_2 \cdot \Delta_2 = 35 - \left(10 \cdot \frac{13}{7}\right) = \frac{115}{7} = 16'43$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_7 \end{pmatrix} = \underline{\hat{b}} - \overline{y}_k \cdot \Delta_k = \underline{\hat{b}} - \overline{y}_2 \cdot \Delta_2 = \begin{pmatrix} 13 \\ 22 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{13}{7} = \begin{pmatrix} 0 \\ 16'43 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = l_2 + \Delta_2 = 11 + \frac{13}{7} = \frac{90}{7} = 12'86$$

Tras realizar un pivoteo y sustituir valores queda la tabla:

	1		1	1	1	1		
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**LD**
X_0	2'14	0	3'28	0'43	-1	-1'43	0	16'43
X_2	0'28	1	**0'57**	-0'14	0	0'14	0	12'86
X_7	2'14	0	3'28	0'43	-1	-0'43	1	16'43

l: cota inferior
u: cota superior

Repitiendo el proceso:

$\alpha_k = Max\,(2'14,\ 3'28,\ 0'43,\ -1,\ -1'43) = 3'28 > 0$
Solución mejorable. $\alpha_k = Z_3 - C_3$; $K = 3$; $K \in R_1$

X_3 variable candidata a entrar en la base.

$$\gamma_1 = Min\left(\frac{12'86 - 11}{0'57}, \frac{16'43 - 0}{3'28}\right) = 3'25 = \frac{\underline{b_1} - l_{B_1}}{y_{13}}$$

X_2: variable candidata a salir de la base.
y_{13}: posible pivote.

$\gamma_2 = \infty$ debido a que $\overline{y}_3 > \overline{0}$

$\gamma_3 = u_3 - l_3 = \infty - 0 = \infty$

Entonces, $\Delta_3 = Min(3'25, \infty, \infty) = 3'25 \equiv \gamma_1$

X_2 desciende hasta su cota inferior y sale de la base; en su lugar entra la variable X_3.

Se pivotea sobre el elemento y_{13}=0'57 excepto la columna de lado derecho que se actualiza aparte.

$$X_0 = \hat{X} - \alpha_k \cdot \Delta_k = 16'43 - (3'28 \cdot 3'25) = 5'77$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_2 \\ X_7 \end{pmatrix} = \underline{\hat{b}} - \overline{y}_k \cdot \Delta_k = \begin{pmatrix} 12'86 \\ 16'43 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0'57 \\ 3'28 \end{pmatrix} \cdot 3'25 = \begin{pmatrix} 11 \\ 5'77 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = l_3 + \Delta_3 = 0 + 3'25 = 3'25$$

La nueva tabla queda:

	1	1		1	1	1		
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**LD**
X_0	0'53	-5'75	0	1'24	-1	-2'24	0	5'77
X_3	0'49	1'75	1	-0'24	0	0'24	0	3'25
X_7	0'53	-5'75	0	**1'24**	-1	-1'24	1	5'77

Aplicando nuevamente el algoritmo:

$$\alpha_k = Max(0'53, -5'75, 1'24, -1, -2'24) = 1'24 > 0$$

Solución mejorable.

$$\alpha_K = Z_4 - C_4;\ K = 4;\ K \in R_1$$

X_4: variable candidata a entrar en la base.

$$\gamma_1 = \frac{5'77 - 0}{1'24} = 4'65 = \frac{\underline{b}_2 - l_{B_2}}{y_{24}}$$

X_7: variable candidata a salir de la base.
y_{24}: posible pivote.

$$\gamma_2 = \frac{\infty - 3'25}{0'24} = \infty$$

$$\gamma_4 = u_4 - l_4 = \infty - 0 = \infty$$

Por tanto, $\Delta_4 = Min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = Min(4'65, \infty, \infty) = 4'65$

X_7 desciende hasta su cota inferior y sale de la base, en su lugar entre X_4. Se realiza un pivoteo sobre el término y_{24}=1'24, excepto para la columna de lado derecho que se actualiza aparte.

$$X_0 = \hat{X} - \alpha_k \cdot \Delta_k = 5'77 - (1'24 \cdot 4'65) = 0'004 \approx 0$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_7 \end{pmatrix} = \underline{\hat{b}} - \overline{y}_k \cdot \Delta_k = \begin{pmatrix} 3'25 \\ 5'77 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0'24 \\ 1'24 \end{pmatrix} \cdot 4'65 = \begin{pmatrix} 4'37 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_4 = l_4 + \Delta_4 = 0 + 4'65 = 4'65$$

Tras el pivoteo la nueva tabla es:

	1	1			1	1	1	
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**X_7**	**LD**
X_0	0	0	0	0	0	-1	-1	0
X_3	0'59	0'64	1	0	-0'2	0	0'2	4'37
X_4	0'43	-4'64	0	1	-0'81	-1	0'81	4'65

Como $\alpha_k = Max(0, 0, 0, -1, -1)=0$ la solución actual es óptima, hemos llegado al final de la 1ª fase.

2ª Fase:

Una vez eliminadas las variables artificiales de la base, pasaremos a la segunda fase, en la que la función objetivo es la original del problema:

$$Min\, Z = 10 \cdot X_1 + 12 X_2 + 30 \cdot X_3$$

Se eliminan de la tabla las columnas correspondientes a X_6 y X_7 y se obtiene la nueva fila cero. Primeramente se identifican las variables básicas y no básicas.

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \; ; \; \overline{C}_B = (30, 0)$$

$$\overline{X}_{N_1} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_5 \end{pmatrix} \; ; \; \overline{C}_{N_1} = (10, 12, 0)$$

$$\overline{X}_{N_2} = [0]$$

A continuación se obtienen los nuevos valores Z_j - C_j

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B\,\overline{B}^{-1}\cdot \overline{a}_1 - C_1 = \overline{C}_B\,\overline{y}_1 - C_1 = (30,0)\cdot\begin{pmatrix}0'59\\0'43\end{pmatrix} - 10 = 7'7$$

$$Z_2 - C_2 = \overline{C}_B\,\overline{y}_2 - C_2 = (30,0)\cdot\begin{pmatrix}0'64\\-4'64\end{pmatrix} - 12 = 7'2$$

$$Z_5 - C_5 = \overline{C}_B\,\overline{y}_5 - C_5 = (30,0)\cdot\begin{pmatrix}-0'2\\-0'81\end{pmatrix} - 30 = -36$$

La función objetivo tendrá como valor:

$$Z = 10\cdot X_1 + 12X_2 + 30\cdot X_3 = 10\cdot(5) + 12\cdot(11) + 30\cdot(4'37) = 313'1$$

Por tanto la tabla Simplex queda:

	l	l			l	
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**LD**
Z	7'7	7'2	0	0	-36	313'1
X_3	**0'59**	0'64	1	0	-0'2	4'37
X_4	0'43	-4'64	0	1	-0'81	4'65

l: cota inferior

u: cota superior

Aplicando nuevamente el algoritmo para variables acotadas:

$\alpha_k = Max\,(7'7,\, 7'2,\, -24) = 7'7 > 0$ Solución mejorable.

$$\alpha_K = Z_1 - C_1 \;;\; K = 1 \;;\; K \in R_1$$

La variable X_1 es candidata a entrar en la base.

$$\gamma_1 = Min\left[\frac{4'37-0}{0'59},\ \frac{4'65-0}{0'43}\right] = 7'41 = \frac{b_1 - l_{B_1}}{y_{11}}$$

La variable X_3 es candidata a salir de la base. El elemento y_{11} es posible pivote.

$\gamma_2 = \infty$ debido a que $\overline{y}_1 > \overline{0}$

$\gamma_3 = u_1 - l_1 = 25 - 5 = 20$

Entonces, $\Delta_1 = Min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = 7'41 \equiv \gamma_1$

La variable X_3 desciende hasta su cota inferior y sale de la base. En su lugar entra la variable X_1. Se realiza un pivoteo sobre el elemento y_{11}=0'59 excepto la columna de lado derecho.

$$Z = \hat{Z} - \alpha_k \cdot \Delta_k = \hat{Z} - \alpha_1 \cdot \Delta_1 = 313'1 - (7'7 \cdot 7'41) = 256'04$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \underline{\hat{b}} - \overline{y}_k \cdot \Delta_k = \underline{\hat{b}} - \overline{y}_1 \cdot \Delta_1 = \begin{pmatrix} 4'37 \\ 4'65 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0'59 \\ 0'43 \end{pmatrix} \cdot 7'41 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1'46 \end{pmatrix}; \qquad X_1 = l_1 + \Delta_1 = 5 + 7'41 = 12'41$$

Tras el pivoteo la tabla queda:

		1	1		1	
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	-1'15	-13'05	0	-33'39	256'04
X_1	1	1'08	1'69	0	0'34	12'41
X_4	0	-5'11	-0'73	1	-0'66	1'46

l: cota inferior
u: cota superior

$\alpha_k = Max(-1'15, -13'05, -33'39) = -1'15 < 0$

Solución óptima de la 2ª fase y del problema.

La solución es:

X_1 = 12'41 Tm de gas-A a distribuir diariamente.
X_2 = 11 Tm de gas-B a distribuir diariamente.
X_3 = 0 No distribuir gas-C.

$X_4 = 1'46$ Horas de operario hace falta contratar además de las 100 horas disponibles para que se puedan cumplir las demás restricciones.

$X_5 = 0$ m^3 de volumen sobran en los vehículos, es decir, se aprovecha toda la capacidad de éstos.

$Z = 256.043$ Pts. de costes diarios en distribución.

b) Se trata de realizar un análisis de sensibilidad para conocer el margen posible de variación de C_1 sin que cambie la solución óptima.

El vector de costes básicos es: $\overline{C}_B = (C_1\ ,\ C_4)$

El nuevo vector de costes básicos será: $\overline{C}_B\,' = \left(C_1 + \Delta_{C_1}\ ,\ C_4\right)$

En nuestro caso, $\overline{C}_B\,' = \left(\left(10 + \Delta_{C_1}\right), 0\right)$

Para que se mantenga la optimalidad de la solución actual se tiene que cumplir que:

$$(Z_2 - C_2)' \leq 0$$
$$(Z_3 - C_3)' \leq 0$$
$$(Z_5 - C_5)' \leq 0$$

Sustituyendo y desarrollando las anteriores expresiones:

$$(Z_2 - C_2)' = \overline{C}'_B\, \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_2 - C_2 = \overline{C}'_B\, \overline{y}_2 - C_2 \leq 0$$

$$\left(\left(10 + \Delta_{C_1}\right), 0\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -5'11 \end{pmatrix} - 12 \leq 0$$

$$10 + \Delta_{C_1} - 12 \leq 0\ ;\ \Delta_{C_1} \leq 2$$

$$(Z_3 - C_3)' = \overline{C}_B\,'\, \overline{y}_3 - C_3 \leq 0$$

$$\left(\left(10 + \Delta_{C_1}\right), 0\right) \cdot \begin{pmatrix} 1'69 \\ -0'73 \end{pmatrix} - 30 \leq 0$$

$$16'9 + 1'69\, \Delta_{C_1} - 30 \leq 0$$

$$\Delta_{C_1} \leq \frac{-13'1}{1'69} = 7'75 \ ; \ \Delta_{C_1} \leq 7'75$$

La expresión anterior ($\Delta_{c_1} \leq 2$) es más restrictiva que esta última, por lo que nos quedamos con la anterior.

$$\left(Z_5 - C_5\right)' = \overline{C}_B{}' \, \overline{y}_5 - C_5 \leq 0$$

$$\left(\left(10 + \Delta_{C_1}\right), 0\right) \cdot \begin{pmatrix} 0'34 \\ -0'66 \end{pmatrix} - 0 \leq 0$$

$$3'4 + 0'34 \, \Delta_{C_1} \leq 0$$

$$\Delta_{C_1} \geq \frac{-3'4}{0'34} = -10 \ ; \ \Delta_{C_1} \geq -10$$

Nos queda entonces que $-10 \leq \Delta_{c_1} \leq 2$ o lo que referido al coeficiente de coste queda:

$$10 + \Delta^-_{C_1} \leq C_1' \leq 10 + \Delta^+_{C_1}$$

$$\mathbf{0 \leq C_1' \leq 12}$$

Ante una disminución total del coste del gas-A (un coste negativo es absurdo) el resultado se mantiene igual, es decir, se distribuyen 12'41 Tm. Por el contrario, si aumenta el coste de distribución, el resultado se mantendrá hasta que $C_1' = 12$, momento a partir del cual interesará dejar de distribuir gas-A (salvo el mínimo impuesto por las restricciones) y dedicar la distribución básicamente al gas-B que además hace cumplir más rápidamente las restricciones por tener el coeficiente tecnológico en horas-hombre más elevado.

PROBLEMA 12

Se han de fabricar 2 tipos de piezas en cantidades X_1 y X_2. Se sabe que cada pieza de tipo 1 y de tipo 2 requieren respectivamente 3 y 10 unidades de tiempo en determinado puesto de trabajo, cuyo máximo de ocupación posible es de 60 unidades.

Cada pieza de tipo 1 y de tipo 2 requiere respectivamente 4 y 1 m^2 para su fabricación, existiendo una superficie límite disponible de 15 m^2 en el taller a estos efectos. Las unidades de energía consumidas son 3 y 2 para cada tipo de pieza, con un total disponible de 16 unidades de energía.

a) Determinar el programa óptimo de fabricación, sabiendo que cada pieza de tipo 1 supone un beneficio de 11 u.m., y cada pieza de tipo 2 proporciona un beneficio de 7 u.m.. (Las piezas fabricadas permiten que los resultados sean fraccionarios).

b) Suponiendo que el beneficio unitario de 11 u.m. correspondientes a las piezas de tipo 1 a que acabamos de referirnos, pudiera variar obedeciendo a la expresión $11\cdot(1+\lambda)$, $\lambda \geq 0$. Establézcanse los programas óptimos de fabricación en función de los distintos valores de λ.

c) ¿Se debería pagar alguna cantidad por unidad adicional de energía contratada?

SOLUCIÓN:

a) Llamando: X_1: unidades fabricadas de la pieza tipo 1.
X_2: unidades fabricadas de la pieza tipo 2.

El programa lineal que obedece al enunciado es el siguiente:

$$\text{Max } Z = 11\cdot X_1 + 7\cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot X_1 + 10\cdot X_2 \leq 60 \\ 4\cdot X_1 + X_2 \leq 15 \\ 3\cdot X_1 + 2\cdot X_2 \leq 16 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Unidades de tiempo} \\ m^2 \text{ en el taller} \\ \text{Unidades de energía} \end{array}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Expresando el problema en formato estándar de minimización:

$$-\text{Min } Z = -11\cdot X_1 - 7\cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot X_1+10\cdot X_2+X_3 \qquad\qquad =60 \\ 4\cdot X_1+\quad X_2 \qquad +X_4 \qquad =15 \\ 3\cdot X_1+2\cdot X_2 \qquad\qquad +X_5=16 \end{array}\right\}$$

$$X_1,\, X_2,\, X_3,X_4,\, X_5\geq 0$$

Los valores de la primera tabla para aplicar el método Simplex son:

$$\overline{B}=[\overline{a}_3,\quad \overline{a}_4,\quad \overline{a}_5] \quad ;\overline{N}=[\overline{a}_1,\quad \overline{a}_2]$$

$$\overline{X}_B=\begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix}=\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}=\begin{Bmatrix} 60 \\ 15 \\ 16 \end{Bmatrix}; \qquad \overline{X}_N=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\overline{0}$$

$$Z=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}=(0,\quad 0,\quad 0)\cdot\begin{pmatrix} 50 \\ 15 \\ 16 \end{pmatrix}=0$$

$$Z_1-C_1=\overline{C}_B\overline{B}^{-1}\cdot\overline{a}_1-C_1=(0,\quad 0,\quad 0)\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}-(-11)=11$$

Z_2-C_2= 7

La primera tabla simplex queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	11	7	0	0	0	0
X_3	3	10	1	0	0	60
X_4	**4**	1	0	1	0	15
X_5	3	2	0	0	1	16

Aplicando el algoritmo Simplex e iterando:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	17/4	0	-11/4	0	-165/4
X_3	0	37/4	1	-3/4	0	195/4
X_1	1	1/4	0	1/4	0	15/4
X_5	0	**5/4**	0	-3/4	1	19/4

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	0	-1/5	-17/5	-287/5
X_3	0	0	1	24/5	-37/5	68/5
X_1	1	0	0	2/5	-1/5	14/5
X_2	0	1	0	-3/5	4/5	19/5

Solución óptima

$X_1 = \frac{14}{5}$ **piezas tipo 1.** (Hemos supuesto que las piezas pueden ser fraccionarias)

$X_2 = \frac{19}{5}$ **piezas tipo 2**

$Z = \frac{287}{5}$ **unidades monetarias**

$X_3 = \frac{68}{5}$ Uds. de tiempo sobrante

b) Análisis Paramétrico.

El vector de costes es $\overline{C} = (-11, \quad -7)$ y se pretende perturbar en la dirección

$$\overline{C}' = (-11, \quad 0).$$

De la tabla óptima calculamos la nueva fila cero para las variables no básicas.

$$Z'_4 - C'_4 = \overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_4 - c'_4 = \overline{C}'_B \cdot \overline{y}_4 - c'_4 = (0, \quad -11, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 24/5 \\ 2/5 \\ -3/5 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{22}{5}$$

$$Z'_5 - C'_5 = \overline{C}'_B \cdot \overline{y}_5 - c'_5 = (0, \quad -11, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -37/5 \\ -1/5 \\ 4/5 \end{pmatrix} - 0 = \frac{11}{5}$$

Como $Z'_5 - C'_5 > 0$ formamos el conjunto S, y como corresponde a la variable

$X_5 \rightarrow \; S = (5) \; (S = (j: \; z'_j - c'_j > 0))$.

Por tanto, el valor $\hat{\lambda}$ queda:

$$\hat{\lambda} = \frac{-(Z_5 - C_5)}{Z'_5 - C'_5} = \frac{17/5}{11/5} = \frac{17}{11}$$

$$\forall \; \lambda \in \left[0, \; \frac{17}{11}\right] \text{ la solución actual es óptima.}$$

con

$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \underline{b} + \lambda \cdot \overline{C}'_B \cdot \underline{b} = (0, \quad -11, \quad -7) \cdot \begin{pmatrix} 68/5 \\ 14/5 \\ 19/5 \end{pmatrix} + \lambda \cdot (0, \quad -11, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 68/5 \\ 14/5 \\ 19/5 \end{pmatrix} = -\frac{287}{5} - \lambda \cdot \frac{154}{5}$$

La siguiente corresponde a una tabla parametrizada.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	0	-1/5-λ22/5	-17/5+λ11/5	-287/5-λ154/5
X_3	0	0	1	24/5	-37/5	68/5
X_1	1	0	0	2/5	-1/5	14/5
X_2	0	1	0	-3/5	4/5	19/5

Para $\lambda = \frac{17}{11} \Rightarrow Z_5 - C_5 = 0$, con lo que se obtiene una solución alternativa y X_5 entra en la base.

Con $\lambda = \frac{17}{11}$ la tabla sería:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	0	-7	0	-105
X_3	0	0	1	24/5	-37/5	68/5
X_1	1	0	0	2/5	-1/5	14/5
X_2	0	1	0	-3/5	**4/5**	19/5

Realizando una iteración Simplex:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	0	-7	0	-105
X_3	0	37/4	1	-3/4	0	195/4
X_1	1	1/4	0	1/4	0	15/4
X_5	0	5/4	0	-3/4	1	19/4

Tenemos una solución óptima alternativa con $\lambda = \frac{17}{11}$, ahora estudiamos para qué intervalo esta solución es óptima.

$$Z'_2 - C'_2 = \overline{C}'_B \cdot \overline{y}_2 - c'_2 = \begin{pmatrix} 0, & -11, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 37/4 \\ 1/4 \\ 5/4 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{11}{4}$$

$$Z'_4 - C'_4 = \overline{C}'_B \cdot \overline{y}_4 - c'_4 = \begin{pmatrix} 0, & -11, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/4 \\ 1/4 \\ -3/4 \end{pmatrix} - 0 = -\frac{11}{4}$$

Como $S = \{\varnothing\}$ ya que no existe ningún $Z'_j - C'_j > 0 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Para $\frac{17}{11} \leq \lambda \leq \infty$ la solución actual es óptima.

Con

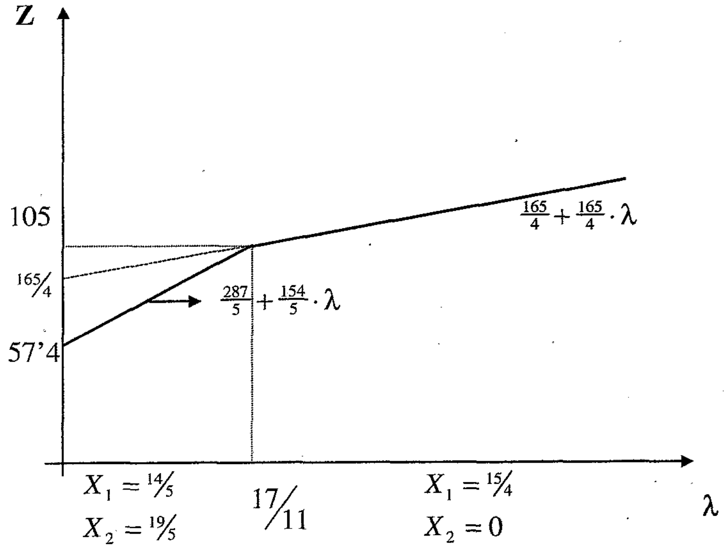
$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} + \lambda \cdot \overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}$$

$$\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (0, \quad -11, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 195/4 \\ 15/4 \\ 19/4 \end{pmatrix} = -\frac{165}{4}$$

$$\overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (0, \quad -11, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 195/4 \\ 15/4 \\ 19/4 \end{pmatrix} = -\frac{165}{4}$$

$$Z(\lambda) = -\frac{165}{4} - \lambda \cdot \frac{165}{4}$$

Gráficamente,



c) Por energía adicional sí pagaríamos dinero, concretamente:

La restricción asociada a la energía es la 3ª, con variable de holgura X_5.

La variable dual correspondiente a dicha restricción indicará el valor máximo que podemos pagar por cada unidad adicional de energía.

$$Z_5 - C_5 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_5 - c_5 = \overline{\omega}^* \cdot \overline{a}_5 - c_5 = (\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = \omega_3$$

$\omega_3 = \left| \frac{17}{5} \right|$ u.m. pagaríamos por cada unidad adicional de energía.

PROBLEMA 13

Una pequeña empresa de producción de fármacos elabora dos tipos de medicinas A y B, a granel de tal forma que las ganancias netas por cada kilogramo de fármaco A son 40.000 pts, y 30.000 pts por cada kilogramo de fármaco B.

Para la elaboración de cada kilogramo de A son necesarias 2 horas de trabajo por parte de técnicos X, 2 horas por parte de técnicos Y, y 5 horas de operario. Por otro lado, para fabricar un kilogramo de B son necesarias 3 horas de técnico X, 1 hora de técnico Y, y 7 horas de operario. Las disponibilidades diarias máximas de mano de obra son de 13 horas de técnicos X, 6 horas de técnicos Y y 25 horas de operarios.

Los resultados de la producción hacen pensar al director que los beneficios podrían ser mayores, debido a que no existe en el momento actual limitaciones de materias primas, ni se espera que las haya a corto y medio plazo, con lo que únicamente se necesitaría contratar mano de obra adicional. El agobio con el que trabajan los técnicos induce al director a considerar que lo que hace falta únicamente es contratar de éstos para mejorar la producción. Puesto al habla con la correspondiente Facultad, le comunican que hasta que no terminen los alumnos de 5° no existe posibilidad de contratar nuevos técnicos X, por lo que esta posibilidad ha de ser, al menos a corto plazo, descartada. Sin embargo, sí existe posibilidad de contratar horas adicionales de técnicos Y, pero por el convenio colectivo firmado en la empresa existe el compromiso de contratar una hora de operario por cada hora adicional de técnico Y.

En esta situación, y no siendo la intención de la empresa contratar operarios únicamente, estudiar qué beneficios le reportaría a la empresa contratar horas adicionales diarias de empleados y hasta qué límite.

SOLUCIÓN:

Primeramente se estudiará cuál es el esquema óptimo de producción diaria

Sea X_1: kilogramos de fármaco A producidos
X_2: kilogramos de fármaco B producidos

$$\text{Max } Z = 40.000 \cdot X_1 + 30.000 \cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 \leq 13 \\ 2 \cdot X_1 + X_2 \leq 6 \\ 5 \cdot X_1 + 7 \cdot X_2 \leq 25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Tecnicos tipo X} \\ \text{Tecnicos tipo Y} \\ \text{Operarios} \end{array}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Expresamos el problema en forma estándar de minimización:

- Min $Z = -40.000 \cdot X_1 - 30.000 \cdot X_2$

S.a.

$$\left.\begin{array}{l} 2\cdot X_1 + 3\cdot X_2 + X_3 \qquad\qquad = 13 \\ 2\cdot X_1 + \quad X_2 \qquad + X_4 \qquad = \ 6 \\ 5\cdot X_1 + 7\cdot X_2 \qquad\qquad + X_5 = 25 \end{array}\right\}$$
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \geq 0$$

La matriz de restricciones y la matriz básica serían:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \overline{B} = [\overline{a}_3, \quad \overline{a}_4, \quad \overline{a}_5] \equiv \overline{\text{I}}$$

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{Bmatrix} 13 \\ 6 \\ 25 \end{Bmatrix}; \qquad \overline{X}_N = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \overline{0}$$

Los elementos de la fila cero son:

$$Z_1\text{-}C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = (0 \quad 0 \quad 0) \cdot \overline{\text{I}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} - (-40.000) = 40.000$$

$Z_2\text{-}C_2 = 30.000$

$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 0$

La 1ª tabla Simplex queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	40.000	30.000	0	0	0	0
X_3	4	3	1	0	0	13
X_4	**2**	1	0	1	0	6
X_5	5	7	0	0	1	25

Aplicando el algoritmo Simplex:

$$Z_1\text{-}C_1 = Z_k\text{-}C_k = \underset{j\in\Re}{Max}(Z_j - C_j) = 40.000\text{ ; k} = 1$$

$$X_1 = \frac{b_2}{y_{21}} = \frac{b_r}{y_{rk}} = Min\left(\frac{b_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right) \text{ ; Pivote} \rightarrow y_{21} = 2$$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	10.000	0	-20.000	0	-120.000
X_3	0	2	1	-1	0	7
X_1	1	1/2	0	1/2	0	3
X_5	0	**9/2**	0	-5/2	1	10

Iterando de forma similar sobre el pivote $y_{32} = {}^{9}\!/_{2}$

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	0	-130.000/9	-20.000/9	-1,280.000/9
X_3	0	0	1	1/9	-4/9	23/9
X_1	1	0	0	7/9	-1/9	17/9
X_2	0	1	0	-5/9	2/9	20/9

Como todos los Z_j-$C_j \leq 0$ para las variables no básicas la solución es óptima.

$X_1 = \frac{17}{9}$ **= 1,899 kg. de fármaco tipo A diario.**

$X_2 = \frac{20}{9}$ **= 2,22 kg. de fármaco tipo B diario.**

$Z = \frac{1{,}280.000}{9}$ **= 142.222,22 pts de beneficio.**

$X_1 = \frac{23}{9}$ = 2,556 horas de técnico *X* ociosas al día.

Ante esta situación a la empresa le interesa aumentar horas de contrato de técnico tipo Y y de operario. En este caso podría ser favorecedor el convenio colectivo.

Se trata, a continuación, de hacer un análisis paramétrico en el que el vector de lado derecho se perturbe bajo la consideración de aumentar equitativamente las horas de operario y de técnico Y.

$$\overline{b}'=\begin{Bmatrix}0\\1\\1\end{Bmatrix}\text{; La nueva dirección es: }\overline{\text{b}}+\lambda\cdot\overline{\text{b}}' \Rightarrow \begin{pmatrix}13\\6\\25\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

Para λ=0 la solución anterior es óptima, el intervalo para el que dicha solución es óptima lo obtenemos de las condiciones de factibilidad del problema principal.

$$\overline{X}_B(\lambda)=\underline{\overline{b}}+\lambda\cdot\underline{\overline{b}}'=\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}+\lambda\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}'$$

$$\text{Donde }\underline{\overline{b}}=\begin{Bmatrix}23/9\\17/9\\20/9\end{Bmatrix};\quad \underline{\overline{b}}'=\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}'=\begin{bmatrix}1 & 1/9 & -4/9\\0 & 7/9 & -1/9\\0 & -5/9 & 2/9\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3/9\\6/9\\-3/9\end{bmatrix}$$

$$S=\{i:\underline{b}'_i\le 0\},\ S=\{1,3\}$$

$$\hat{\lambda}=\underset{i\in S}{Min}\left\{\frac{\underline{b}_i}{-\left(\underline{b}'_i\right)}\right\}=Min\left\{\frac{\frac{23}{9}}{\frac{3}{9}},\ \frac{\frac{20}{9}}{\frac{3}{9}}\right\}=\frac{20}{3}=\frac{\underline{b}_3}{-\underline{b}'_3}$$

Para λ ∈ [0, 20/3] la solución actual es óptima

$$Z(\lambda)=Z+\lambda\cdot\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}'=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}+\lambda\cdot\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}'=-\frac{1.280.000}{9}-\frac{150.000}{9}\cdot\lambda=$$

$$\left(\text{Para }\lambda=\frac{20}{3}\right)=-\frac{2.280.000}{9}$$

$$\overline{X}_B(\lambda)=\begin{Bmatrix}\frac{23}{9}-\lambda\cdot\frac{3}{9}\\ \frac{17}{9}+\lambda\cdot\frac{6}{9}\\ \frac{20}{9}-\lambda\cdot\frac{3}{9}\end{Bmatrix}=\left(\text{Para }\lambda=\frac{20}{3}\right)=\begin{Bmatrix}3/9\\57/9\\0\end{Bmatrix}$$

Sustituyendo estos valores en la tabla óptima:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	0	-130.000/9	-20.000/9	-2,280.000/9
X_3	0	0	1	1/9	-4/9	3/9
X_1	1	0	0	7/9	-1/9	57/9
X_2	0	1	0	**-5/9**	2/9	0

Como se mantiene el criterio de optimalidad primal (factibilidad dual) y tenemos una variable X_2 nula, buscamos una solución alternativa utilizando el Método Simplex Dual.

El pivote lo obtenemos según la expresión :

$$\frac{Z_K - C_K}{y_{rk}} = \underset{j \in \Re}{Min}\left(\frac{Z_j - C_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right) = \frac{Z_4 - C_4}{y_{34}}; \quad y_{34}\text{: pivote}$$

Iterando:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	-26.000	0	0	-8.000	-760.000/3
X_3	0	1/5	1	0	-2/5	1/3
X_1	1	7/5	0	0	1/5	19/3
X_4	0	-9/5	0	1	-2/5	0

Se observa que la producción ha cambiado, dejándose de producir el fármaco tipo B. Siguen sobrando horas de técnico tipo X. Estudiamos ahora para qué valor de $\lambda > 20/3$ la solución actual es óptima.

En nuestro caso, se calcularán los nuevos valores de λ de forma relativa al resultado obtenido en la última tabla.

$$\underline{b}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2/5 \\ 0 & 0 & 1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 3/5 \end{bmatrix}$$

$$S = \{1\};\ \hat{\lambda}' = \underset{i \in S}{Min}\left\{\frac{\underline{b}_1}{-\underline{b}'_1}\right\} = \left\{\frac{1/3}{2/5}\right\} = \frac{5}{6}$$

$$\text{Para } \frac{20}{3} \le \lambda \le \frac{20}{3} + \frac{5}{6}$$

(El valor $5/6$ se ha obtenido con relación al valor $\lambda = 20/3$ de la última tabla)

$\frac{20}{3} \le \lambda \le \frac{45}{6}$ La nueva solución es óptima.

Los nuevos valores de la función objetivo y de las variables básicas son:

$$Z(\lambda') = -\frac{760.000}{3} + \lambda' \cdot (0, \quad -40.000, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -2/5 \\ 1/5 \\ 3/5 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{760.000}{3} - \frac{40.000}{5} \cdot \lambda' = \left(\text{Para } \lambda' = \frac{5}{6} \right) = -\frac{1.560.000}{6} = -260.000$$

$$\overline{X}_B(\lambda') = \begin{Bmatrix} 1/3 - \lambda' \, 2/5 \\ 19/3 + \lambda' \, 1/5 \\ 0 + \lambda' \, 3/5 \end{Bmatrix} = \left(\text{Para } \lambda' = \frac{5}{6} \right) = \begin{Bmatrix} 0 \\ 39/6 \\ 1/2 \end{Bmatrix}$$

Sustituyendo estos valores, la nueva tabla que obtenemos es:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	-26.000	0	0	-8.000	-260.000
X_3	0	1/5	1	0	**-2/5**	0
X_1	1	7/5	0	0	1/5	39/6
X_4	0	-9/5	0	1	-2/5	1/2

Aplicando el método Simplex Dual:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	-30.000	-20.000	0	0	-260.000
X_5	0	-1/2	-5/2	0	1	0
X_1	1	3/2	1/2	0	0	13/2
X_4	0	-2	-1	1	0	1/2

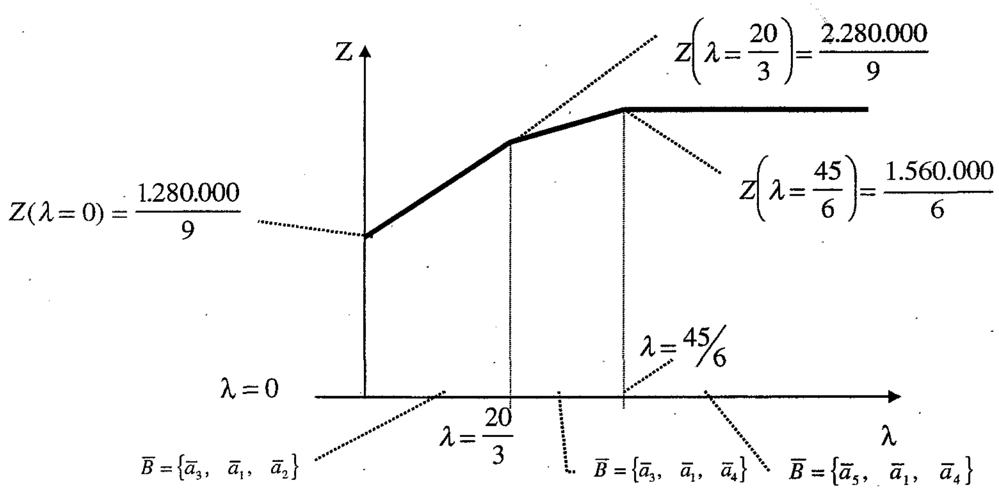
Vemos que se sigue fabricando únicamente el fármaco tipo A. Ahora comienzan a sobrar horas de técnico tipo Y.

Estudiamos si para $\lambda > \dfrac{45}{6}$ la solución es mejorable.

$$\underline{\overline{b}}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' = \begin{bmatrix} -5/2 & 0 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como S = {ø} la solución no es mejorable, la base actual es óptima. El cuello de botella ahora lo provoca el técnico tipo X.

Los resultados se muestran en el gráfico:



Los beneficios se incrementan hasta λ = 45/6 = 7'5, es decir, si la hora extra del técnico Y y de operario sigue la misma función de coste, a la empresa le interesa contratar operarios y técnicos de tipo Y hasta un total de 7'5 horas más diarias. A partir de ahí, el cuello de botella lo forman los técnicos X, y lógicamente, no interesa seguir contratando técnicos tipo Y y operarios.

Se observa que los beneficios aumentan constantemente, y que toda la producción se vuelca sobre el fármaco A que es el que más beneficios produce.

PROBLEMA 14

Una empresa de manufacturas se plantea la búsqueda de mayores niveles de eficacia optimizando la asignación de recursos humanos. En la actualidad, dicha empresa fabrica dos líneas de productos A y B con una demanda diaria diferente, siendo aproximadamente la del producto A de 160 unidades, mientras que el producto B experimenta una demanda cercana a las 105 unidades diarias. La empresa, consciente de que uno de sus mayores puntos fuertes debe ser mantener la lealtad de los clientes hacia sus artículos, tiene como principio de funcionamiento el que cada día se fabrique, como mínimo, la cantidad de piezas que se demandan, con el objetivo de que nunca se quede un cliente sin el producto que desea.

En el proceso de fabricación pueden intervenir tres tipos diferentes de personal con distinta cualificación. En primer lugar, se pueden contratar operarios no especializados cuya capacidad productiva se cifra en 3 unidades tanto del producto A como B por hora de trabajo, con un coste para la empresa de 1.000 pts/hora, que incluye retribuciones y pagos de impuestos y Seguridad Social. En segundo lugar, se encuentran los técnicos de grado 2, con una mayor especialización en la fabricación del producto A, del que pueden llegar a producir 12 unidades por hora de trabajo; sin embargo, su rendimiento decrece considerablemente cuando se trata de fabricar el producto B del que sólo llegan a fabricar del orden de 2 unidades por hora. Independientemente del trabajo que realicen, los costes por hora que este tipo de técnicos suponen para la empresa se elevan a 2.000 pts. Por último, también se pueden contratar técnicos de grado 3, cuya especialización se centra en el producto B, del que pueden llegar a producir 13 unidades/hora; por el contrario, con el producto A sus niveles de productividad decrecen hasta un máximo de 5 unidades/hora. Éstos técnicos son los más salados a la hora de hablar de costes, repercutiendo sobre la empresa unos gastos de 4.000 pts por cada hora de trabajo.

Los tres tipos de empleados pueden ser contratados sobre una base diaria en cualquier cantidad y combinación, con tal que aseguren los objetivos de satisfacción de la demanda anteriormente citados. La única restricción limitativa que existe es la capacidad de la sala de trabajo, en la que, a máxima carga de trabajo, se estima que no podrían trabajar juntos más de 6 personas a razón de 8 horas diarias como máximo.

Supuesto se realiza la contratación por horas y fracciones de éstas:

a) ¿Cuál habría de ser la distribución óptima de los recursos humanos diariamente para reducir al máximo los gastos que en este capítulo incurre la empresa?

b) ¿Qué sobrecostes se producen por cada unidad adicional de producto A que se fabrique?

c) ¿Cómo evolucionaría la contratación de personal si los sindicatos representantes de los operarios y los técnicos de grado 2 se ponen de acuerdo para, manteniendo la actual relación de costes, exigir un aumento indeterminado de sus ingresos?

SOLUCIÓN:

a) Se trata de un problema de minimización de costes en el que hay que asignar la contratación diaria de horas de mano de obra. Sea:

X_1 : nº horas diarias contratadas de operario.
X_2 : nº horas diarias contratadas de técnico de grado 2.
X_3 : nº horas diarias contratadas de técnico de grado 3.

El programa lineal al que obedece el problema es el siguiente:

$$\text{Min } Z = X_1 + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llll} 3 \cdot X_1 & +12 \cdot X_2 & +5 \cdot X_3 & \geq 160 \\ 3 \cdot X_1 & +2 \cdot X_2 & +13 \cdot X_3 & \geq 105 \\ X_1 & + \ X_2 & + \ X_3 & \leq 6 \cdot 8 \end{array}\right\} \quad X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Añadiendo variables de holgura y artificiales el problema queda: (resolviendo mediante el método de penalización)

$$\text{Mín } Z = X_1 + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 + M \cdot X_7 + M \cdot X_8$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llllllllll} 3 \cdot X_1 & +12 \cdot X_2 & +5 \cdot X_3 & - X_4 & & & + X_7 & & = 160 \\ 3 \cdot X_1 & +2 \cdot X_2 & +13 \cdot X_3 & & - X_5 & & & + X_8 & = 105 \\ X_1 & + X_2 & + X_3 & & & + X_6 & & & = 48 \end{array}\right\} \quad X_j(1,\dots 8) \geq 0$$

Asignamos el valor M = 10

Los valores correspondientes a la primera solución básica factible son:

$$\overline{B} = [\overline{a}_7, \quad \overline{a}_8, \quad \overline{a}_6]; \quad \overline{N} = [\overline{a}_1, \quad \overline{a}_2, \quad \overline{a}_3, \quad \overline{a}_4, \quad \overline{a}_5]$$

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} X_7 \\ X_8 \\ X_6 \end{Bmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{Bmatrix} 160 \\ 105 \\ 48 \end{Bmatrix}$$

Los valores de la fila cero para la tabla inicial serían:

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = (10, \quad 10, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 = 59$$

$$Z_2 - C_2 = (10, \quad 10, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 = 138$$

$$Z_3 - C_3 = (10, \quad 10, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 13 \\ 1 \end{pmatrix} - 4 = 176$$

$$Z_4 - C_4 = (10, \quad 10, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -10$$

$$Z_5 - C_5 = (10, \quad 10, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -10$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (10, \quad 10, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 160 \\ 105 \\ 48 \end{pmatrix} = 2.650$$

La primera tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	LD
Z	59	138	176	-10	-10	0	0	0	2.650
X_7	3	12	5	-1	0	0	1	0	160
X_8	3	2	**13**	0	-1	0	0	1	105
X_6	1	1	1	0	0	1	0	0	48

Iterando:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	LD
Z	18'344	110'89	0	-10	3'552	0	0	-13'552	1.228'3
X_7	1'846	**11'23**	0	-1	0'385	0	1	-0'385	119'6
X_3	0'231	0'154	1	0	-0'077	0	0	0'077	8'077
X_6	0'769	0'846	0	0	0'077	1	0	-0'077	39'92

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	LD
Z	0'158	0	0	-0'130	-0'218	0	-9'87	-9'78	47'052
X_2	1'164	1	0	-0'089	0'034	0	0'089	-0'034	10'65
X_3	**0'205**	0	1	0'014	0'082	0	-0'014	0'082	6'438
X_6	0'630	0	0	0'075	0'048	1	-0'075	-0'048	30'91

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	LD
Z	0	0	-0'768	-0'140	-0'155	0	-9'859	-9'84	42'33
X_2	0	1	-0'8	-0'1	0'1	0	0'1	-0'1	5'500
X_1	1	0	4'867	0'067	-0'4	0	-0'067	0'400	31'33
X_6	0	0	-3'07	0'033	0'3	1	-0'033	-0'300	11'17

Solución óptima:

X_1 = 31'33 horas diarias de operario.
X_2 = 5'5 horas diarias de técnico tipo 2
X_3 = 0 horas diarias de técnico tipo 3 (No se contrata este tipo de técnico)

Z = 42.330 pts diarias en coste de personal

Quedan un total de X_6 = 11'17 horas de personal. Es decir, el taller no trabaja con el total de capacidad humana. Sería utilizado por:

$$\frac{31'33 \text{ (horas operario)}}{8 \text{ (horas laborables)}} \approx 4 \text{ personas (operarios)}$$

$$\frac{5'5 \text{ (horas técnico tipo 2)}}{8 \text{ (horas laborables)}} \approx 1 \text{ persona (técnico tipo 2)}$$

Total : 5 personas.

b) Se trata de un análisis de dualidad para el producto A.

$$\frac{\partial Z}{\partial b_1} = \omega_1 \text{ ; De la tabla óptima:}$$

$$Z_4 - C_4 = \overline{\omega}^* \cdot \overline{a}_4 - c_4 \text{ ;}$$

$$-0'140 = (\omega_1 \quad ,\omega_2 \quad ,\omega_3) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \text{ ;}$$

$\omega_1 = 0'140$ por cada unidad adicional de A fabricada

El incremento en costes sería aproximadamente de 140 pts por unidad adicional producida

c) Se trata de un problema de análisis paramétrico en el que la perturbación se produce en el vector de costes como consecuencia de que aumentan los costes para la empresa.

La relación de costes se mantiene, luego la perturbación del vector de costes sería en la dirección $\overline{C}' = (C'_1, C'_2, C'_3) = (1, \quad 2, \quad 0)$. ; C'_3=0 Los técnicos de grado 3 no están en el sindicato.

Entonces, el vector $\overline{C}_B'$ sería: $\overline{C}_B' = (C'_2, C'_1, C'_6) = (2, \quad 1, \quad 0)$.

Es necesario calcular ahora los siguientes valores:

$$Z_3' - C_3' = \overline{C}_B' \cdot \overline{y}_3 - c_3' = (2, \quad 1, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -0'8 \\ 4'867 \\ -3'07 \end{pmatrix} - 0 = 3'267$$

Este valor es 0 porque no existe variación de costes para el operario tipo 3.

$$Z_4^{'} - C_4^{'} = \overline{C}_B^{'} \cdot \overline{y}_4 - c_4^{'} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0'1 \\ 0'067 \\ 0'033 \end{pmatrix} = -0'133$$

$$Z_5^{'} - C_5^{'} = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0'1 \\ -0'4 \\ 0'3 \end{pmatrix} = -0'2$$

Se observa que Z'_3 - C'_3 es el único que podría tomar valor positivo ante un crecimiento de λ.

$$S = \{3\}\, ; \quad \hat{\lambda} = \frac{-(Z_3 - C_3)}{Z_3^{'} - C_3^{'}} = \frac{-(-0'768)}{3'267};$$

$$\hat{\lambda} = 0'24$$

Para λ ∈ [0, 0'24] la solución actual es óptima. Los valores parametrizados de la fila cero resultan:

$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \underline{\overline{b}} + \lambda \cdot \overline{C}_B^{'} \cdot \underline{\overline{b}} = 42'33 + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5'5 \\ 31'33 \\ 11'17 \end{pmatrix}$$

$$Z(\lambda) = 42'33 + \lambda \cdot 42'33$$

$$(Z_3 - C_3) + \lambda \cdot (Z_3^{'} - C_3^{'}) = -0'768 + \lambda \cdot 3'267$$

$$(Z_4 - C_4) + \lambda \cdot (Z_4^{'} - C_4^{'}) = -0'140 - \lambda \cdot 0'133$$

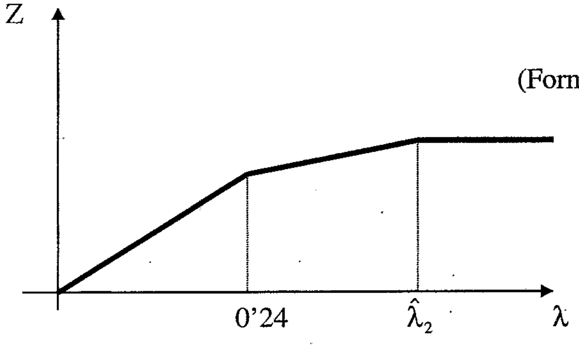
$$(Z_5 - C_5) + \lambda \cdot (Z_5^{'} - C_5^{'}) = -0'155 - \lambda \cdot 0'2$$

La tabla para λ = 0'24 sería:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	**LD**
Z	0	0	0	-0'17	-0'20	0	52'49
X_2	0	1	-0'8	-0'1	0'1	0	5'5
X_1	1	0	**4'867**	0'067	-0'4	0	31'33
X_6	0	0	-3'07	0'033	0'3	1	11'17

Existe una solución alternativa en la que sale X_1 y entra X_3.

Llegado este punto se observa que la producción óptima implicaría deshacerse de los operarios (X_1) ocupando su puesto los operarios del tipo 3. En la siguiente iteración saldrán los técnicos tipo 2 quedándose solamente los del tipo 3. Esto significa que el sindicato de operarios nunca debe exigir más de un 24% de aumento de sueldo.



(Forma aproximada de la evolución)

$\overline{B}=\{\overline{a}_1,\overline{a}_2\}$ $\quad \overline{B}=\{\overline{a}_3,\overline{a}_2\}$ $\quad \overline{B}=\{\overline{a}_3,\overline{a}_5\}$

PROBLEMA 15

Una consultoría dedicada a la realización de proyectos de ingeniería tiene contratados en la actualidad a un total de 28 técnicos de grado A, 10 técnicos de grado B y 35 técnicos de grado C. Dicha empresa se dedica a la elaboración de tres tipos de proyectos: el tipo 1, que reporta un total de 4 millones de beneficios netos a la empresa; el proyecto tipo 2, que supone 18 millones de beneficios y, finalmente, el proyecto tipo 3 que implica unos beneficios de 46 millones de pesetas.

Para la realización de un proyecto tipo 1 se necesita un técnico de grado A y 2 técnicos de grado C. Un proyecto de tipo 2 implica la dedicación por parte de 2 técnicos de grado A, 1 técnico de grado B y 4 técnicos de grado C. Por último, cada proyecto tipo 3 necesita la participación de 6 técnicos de grado A, 2 técnicos de grado B y 6 técnicos de grado C.

a) Supuesto que cada uno de los tipos de proyectos indicados se elaboran en un tiempo promedio de 2 meses, indicar cuál es la programación óptima de proyectos a realizar el próximo bimestre.

b) Calcular los incrementos que se producirían en los beneficios obtenidos por cada técnico adicional que se incorporara a la plantilla de la consultoría.

c) Con la irrupción de varias empresas extranjeras en el mercado de realización de proyectos de ingeniería se produce una sobreoferta que el mercado no es capaz de absorber, por lo que los propietarios de la empresa se plantean la necesidad de llevar a cabo una reducción de la plantilla. Por ello, desean realizar un estudio de las consecuencias de efectuar una reducción indeterminada en la cantidad de personal contratado. Esta reducción la plantean sólo para los técnicos de grado A y B, que son los que perciben los salarios más altos, manteniendo constante la plantilla de técnicos de grado C. La reducción se efectuaría sobre la base de despedir a 2 técnicos de grado A por cada técnico de grado B. Estudiar las consecuencias de esta reducción en los beneficios de la empresa y en los tipos de proyectos que deben ser realizados. Comentar también si el planteamiento efectuado por los propietarios es óptimo.

SOLUCIÓN:

a) Sea:

X_1 : nº de proyectos de tipo 1 a realizar.
X_2 : nº de proyectos de tipo 2 a realizar.
X_3 : nº de proyectos de tipo 3 a realizar.

El programa lineal al que obedece el problema es el siguiente:

Max $Z = 4 \cdot X_1 + 18 \cdot X_2 + 46 \cdot X_3$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llll} X_1 & +2\cdot X_2 & +6\cdot X_3 & \le 28 \\ & X_2 & +2\cdot X_3 & \le 10 \\ 2\cdot X_1 & +4\cdot X_2 & +6\cdot X_3 & \le 35 \end{array}\right\} \qquad X_1, X_2, X_3 \ge 0$$

Expresando en forma estándar de minimización y añadiendo variables de holgura:

-Min $Z = -4 \cdot X_1 - 18 \cdot X_2 - 46 \cdot X_3$

S.a.

$$\left.\begin{array}{lllllll} X_1 & +2\cdot X_2 & +6\cdot X_3 & + X_4 & & & =28 \\ & X_2 & +2\cdot X_3 & & + X_5 & & =10 \\ 2\cdot X_1 & +4\cdot X_2 & +6\cdot X_3 & & & + X_6 & =35 \end{array}\right\} \; X_j(j=1,\ldots 6) \ge 0$$

Los valores correspondientes a la primera tabla Simplex quedan:

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{Bmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{Bmatrix} 28 \\ 10 \\ 35 \end{Bmatrix} \qquad Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 0$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = (0, 0, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - (-4) = 4$$

$$Z_2 - C_2 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_2 - c_2 = 18$$

$$Z_3 - C_3 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_3 - c_3 = 46$$

La primera tabla quedaría:

	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	4	18	46	0	0	0	0
X_4	1	2	**6**	1	0	0	28
X_5	0	1	2	0	1	0	10
X_6	2	4	6	0	0	1	35

Iterando según el algoritmo Simplex:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-11/3	8/3	0	-23/3	0	0	-644/3
X_3	1/6	1/3	1	1/6	0	0	14/3
X_5	-1/3	**1/3**	0	-1/3	1	0	2/3
X_6	1	2	0	-1	0	1	7

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-1	0	0	-5	-8	0	-220
X_3	1/2	0	1	1/2	-1	0	4
X_2	-1	1	0	-1	3	0	2
X_6	3	0	0	1	-6	1	3

Solución óptima:

X_1 = 0 proyectos tipo 1 el próximo bimestre
X_2 = 2 proyectos tipo 2 el próximo bimestre
X_3 = 4 proyectos tipo 3 el próximo bimestre
Z = 220 millones de pts de beneficios netos

X_6 = 3 empleados grado C que sobran

b) Un cálculo de las variables duales indica lo que se aumentaría en beneficios por cada técnico de grado A y B que se contratase. Por el contrario, no interesa contratar técnicos tipo C. En este momento sobran 3 de los que podría prescindirse.

$$Z_4 - C_4 = \overline{w}^* \cdot \overline{a}_4 - C_4 \; ; \; -5 = (w_1, \quad w_2, \quad w_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \; ; \; w_1 = 5$$

ω_1 = 5 M. pts. de incrementos de beneficios por cada técnico tipo A adicional que se contratase.

$$Z_5 - C_5 = \overline{w}^* \cdot \overline{a}_5 - C_5 \;;\; -8 = \begin{pmatrix} w_1, & w_2, & w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \;;\; w_2 = 8$$

$\omega_2 = 8$ M. pts. de incrementos de beneficios por cada técnico tipo B adicional que se contratase.

$$Z_6 - C_6 = \overline{w}^* \cdot \overline{a}_6 - C_6 \;;\; 0 = \begin{pmatrix} w_1, & w_2, & w_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 \;;\; w_3 = 0$$

$\omega_3 = 0$ pts por cada técnico tipo C que se quisiera contratar (resultado lógico debido a que sobran empleados de grado C).

c) En este momento, el enunciado indica una disminución indeterminada de los técnicos A y B en una proporción 2 a 1. Se trata de realizar un análisis paramétrico para un intervalo de λ en el eje negativo.

La dirección de perturbación es $\overline{b}' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Para $\lambda \leq 0$.

Como λ es, por definición, un valor positivo, se cambia el signo del vector $\overline{b}'$ y podemos así considerar a λ como positivo.

$$\overline{b}' \to \overline{b}' = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{Con } \lambda \geq 0$$

Calculamos $\underline{b}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}'$

$$\underline{b}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -6 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\overline{X}_B(\lambda) = \underline{b} + \lambda \cdot \underline{b}' = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \underline{\overline{b}} + \overline{C}_B \cdot \underline{\overline{b}}' \cdot \lambda = \begin{pmatrix}-46, & -18 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\2\\3\end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix}-46, & -18, & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\-1\\4\end{pmatrix} = -220 + 18 \cdot \lambda$$

El conjunto S queda:

$$S = \{2\}; \quad \hat{\lambda} = Min\left\{\frac{2}{-(-1)}\right\} = \left\{\frac{\underline{b}_2}{-\underline{b}_2'}\right\} = 2$$

Para $\lambda \in [-2, \ 0]$ la solución actual es óptima. Para $\lambda = |-2|$ la tabla quedaría:

	X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**LD**
Z	-1	0	0	-5	-8	0	-184
X3	1/2	0	1	1/2	-1	0	4
X2	-1	1	0	-1	3	0	0
X6	3	0	0	1	-6	1	11

En este punto se han despedido a 4 técnicos Tipo A y 2 Técnicos Tipo B.

Aplicando el Método Simplex Dual se obtiene la siguiente tabla óptima alternativa.

	X1	**X2**	**X3**	**X4**	**X5**	**X6**	**LD**
Z	0	-1	0	-4	-11	0	-184
X3	0	1/2	1	0	1/2	0	4
X1	1	-1	0	1	-3	0	0
X6	0	3	0	-2	3	1	11

A continuación se estudia para qué intervalo es óptima esta base $\overline{B} = \begin{pmatrix}\overline{a}_3, & \overline{a}_1, & \overline{a}_6\end{pmatrix}$

$$\underline{\overline{b}} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\1 & -3 & 0\\-2 & 3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}28\\10\\35\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\9\end{pmatrix}$$

$$\underline{\overline{b}}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' = \begin{pmatrix}0 & \frac{1}{2} & 0\\1 & -3 & 0\\-2 & 3 & 1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-2\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$$

Queda: $S = \{ 3 \} \Rightarrow \hat{\lambda} = \dfrac{\underline{b}_r}{-\underline{b}'_r} = \dfrac{5}{-(-\frac{1}{2})} = 10 = \dfrac{\underline{b}_1}{-\underline{b}'_1}$

Para $\lambda \in [\,-10,\ -2]$ la base actual es óptima.

$$\overline{X}_B(\lambda) = \underline{\overline{b}} + \lambda \cdot \underline{\overline{b}}' = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\frac{1}{2}\cdot\lambda \\ -2+\lambda \\ 9+\lambda \end{pmatrix}$$

$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \underline{\overline{b}} + \lambda \overline{C}_B \cdot \underline{\overline{b}}' = \begin{pmatrix} -46, & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -46, & -4, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -222 + 19 \cdot \lambda$$

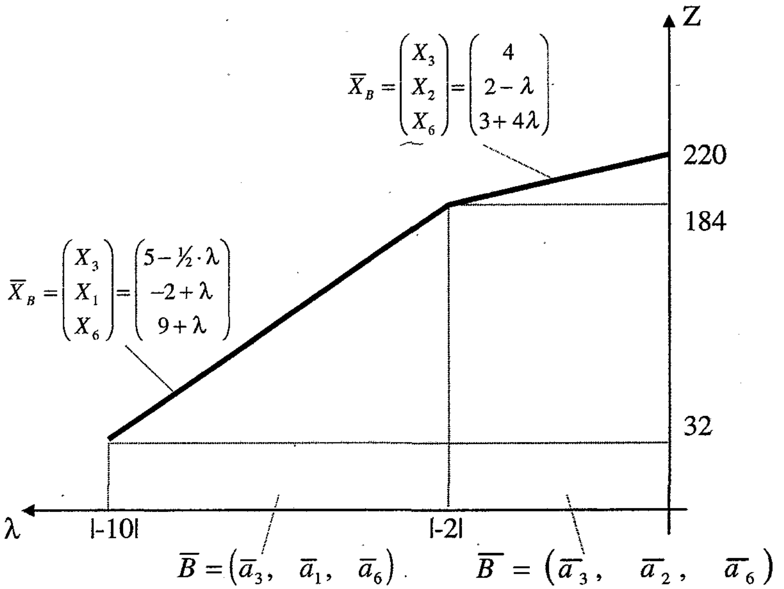
Para $\lambda = |-10|$ la tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	-1	0	-4	-11	0	-32
X_3	0	1/2	1	0	1/2	0	0
X_1	1	-1	0	1	-3	0	8
X_6	0	3	0	-2	3	1	19

Si se intenta aplicar el Método Simplex Dual en la fila 1 se comprueba que la solución **no es factible** ya que no existe ningún coeficiente negativo en dicha fila.

Para $\lambda = |-10|$ significa que se han despedido a 20 técnicos de grado A y a todos los del grado B. En este momento quedan 8 de A y los 35 de C, de los que, a su vez, sobran 19 (X_6=19). Esto explica que no se puedan realizar proyectos de tipo 2 y 3. La solución es no factible porque se ha llegado al tope en la reducción de técnicos grado B. Una mayor reducción de técnicos A implicaría técnicos B negativos, si se quiere mantener la relación de despidos, lo cual es imposible.

A partir de este momento sólo se pueden despedir técnicos grado A. Al sobrar 19 técnicos grado C no parece que el planteamiento de despidos haya sido el más apropiado. Un esquema del análisis sería:


Z
$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_2 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2-\lambda \\ 3+4\lambda \end{pmatrix}$
220
184
$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_1 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5-\frac{1}{2}\cdot\lambda \\ -2+\lambda \\ 9+\lambda \end{pmatrix}$
32
λ
|-10|
|-2|
$\overline{B} = (\overline{a}_3, \overline{a}_1, \overline{a}_6)$
$\overline{B} = (\overline{a}_3, \overline{a}_2, \overline{a}_6)$

PROBLEMA 16

Una factoría fabrica tornillos y tuercas que distribuye mediante cajas que significan 30.000 pesetas de beneficios, cada una, en el caso de los tornillos y 80.000 pts de beneficios por cada caja de tuercas producidas. La demanda de tornillos es ilimitada, mientras que la demanda de tuercas es menor, por lo que no deben producirse más de 200 cajas de éstas. Los requerimientos para la fabricación y las disponibilidades máximas de recursos se muestran en la tabla:

	Caja tornillos	Caja tuercas	Disponibilidades máximas
horas-hombre	2	4	1.000
kg. de acero	6	2	1.200

Con estos datos establecer:

a) ¿Cuál es el sistema productivo que maximiza el beneficio?

b) ¿Cuál sería el incremento en el beneficio si se pudiesen aumentar los recursos disponibles?

c) Una vez se han fabricado las cajas de cada producto, según los resultados obtenidos en el apartado a), se recibe una demanda ilimitada de tuercas adicionales que la empresa desea cubrir utilizando su propia mano de obra. Según el contrato de trabajo, resulta que la retribución de horas extras laborales para satisfacer esta demanda habría de ser 15.000 pts/hora adicionales al sueldo habitual. En este caso, ¿Se obtendrían beneficios por parte de la empresa si se fabricasen más cajas de tuercas? Si es así, ¿Qué cantidad podría fabricarse si resulta que el próximo envío de acero no se recibirá hasta dentro de un mes? ¿Cuáles serían los beneficios?

SOLUCIÓN:

a) Llamando:

X_1 : Cajas de tornillos a fabricar
X_2 : Cajas de tuercas a fabricar

El problema planteado obedece al siguiente programa lineal:

Max $Z = 30 \cdot X_1 + 80 \cdot X_2$

S.a.

$$\left.\begin{array}{lll} 2 \cdot X_1 & +4 \cdot X_2 & \leq 1.000 \\ 6 \cdot X_1 & +2 \cdot X_2 & \leq 1.200 \\ & X_2 & \leq 200 \end{array}\right\} \qquad X_1, X_2 \geq 0$$

Pasando el problema a forma estándar de minimización:

$$-\text{Min } Z = -30 \cdot X_1 - 80 \cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llllll} 2 \cdot X_1 & +4 \cdot X_2 & +X_3 & & & =1.000 \\ 6 \cdot X_1 & +2 \cdot X_2 & & +X_4 & & =1.200 \\ & X_2 & & & +X_5 & =200 \end{array}\right\} \quad X_j(j=1,\ldots 5) \geq 0$$

Los valores correspondientes a la primera solución básica factible son:

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1.000 \\ 1.200 \\ 200 \end{Bmatrix} \qquad \overline{X}_N = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} = \overline{0}$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + 30 = 30$$

$$Z_2 - C_2 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_2 - c_2 = 80$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 0$$

La primera tabla Simplex quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	**LD**
Z	30	80	0	0	0	0
X_3	2	4	1	0	0	1.000
X_4	6	2	0	1	0	1.200
X_5	**0**	**1**	0	0	1	200

Iterando:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	30	0	0	0	-80	-16.000
X_3	2	0	1	0	-4	200
X_4	6	0	0	1	-2	800
X_2	0	1	0	0	1	200

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	-15	0	-20	-19.000
X_1	1	0	1/2	0	-2	100
X_4	0	0	-3	1	10	200
X_2	0	1	0	0	1	200

La solución actual es óptima:

$$\left.\begin{array}{l}\boldsymbol{X_1 = 100 \text{ cajas de tornillos}}\\ \boldsymbol{X_2 = 200 \text{ cajas de tuercas}}\end{array}\right\} \quad \boldsymbol{Z = 19{,}000.000 \text{ de pts. de beneficio}}$$

$X_4 = 200$ kg. de acero sobrante

b) Se trata de obtener los valores de las variables duales en función de las variables de holgura iniciales.

$$Z_3 - C_3 = \overline{\omega}^* \cdot \overline{a}_3 - c_3 \; ; \quad -15 = (\omega_1 \quad ,\omega_2 \quad ,\omega_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 \; ; \; \omega_1 = |-15|$$

$$Z_4 - C_4 = 0 \Rightarrow \omega_2 = 0$$

$$Z_5 - C_5 = -20 \Rightarrow \omega_3 = 20$$

- Nuestros beneficios se incrementarán en 15.000 pts por cada hora-hombre más que pudiéramos contratar supuestos permanecen constantes los costes.
- No aumentarían los beneficios si compramos acero porque en este momento nos sobran 200 kg.
- Los beneficios aumentarían en 20.000 pts por cada caja de tuercas adicional a las 200 permitidas que se fabricase.

c) En este caso el coste adicional de mano de obra extra sería de 15.000 pts, que es lo que hemos visto serían los posibles beneficios por cada hora extra. La variable dual ω_3 =20.000 pts/ud nos indica lo que se obtendría por cada caja adicional de tuercas que se fabricase [1], ya que habría que descontar a las 80.000 pts de beneficio iniciales los beneficios implícitos en la mano de obra, es decir:

Beneficios iniciales$\leftarrow$ $80.000 - 15.000 \cdot 4 = 20.000$ $\rightarrow$Beneficio por cada caja de más fabricada.

Incremento coste mano de obra | 4 horas por cada caja de tuercas.

C_2'=20.000

Sin embargo, las cajas adicionales de tornillos darían un beneficio de:

$30.000 - 15.000 \cdot 2 = 0$ pts. $\qquad$ $C'_1=0$

Es decir, en condiciones de trabajo extra sale rentable producir tuercas, pero no tornillos. La causa de que el beneficio adicional por cada hora extra sea de 15.000 pts (ω_1 =15.000) obedece a que 2 horas que es lo que necesita cada caja de tornillos son 30.000 pts de beneficios, que, sin embargo, coincide con los costes de una caja de tornillos.

Como nos preguntan cuántas cajas más de tuercas hay que fabricar, lo que se ha de hacer es un análisis paramétrico **que acabe** cuando los recursos de acero se agoten. Por tanto hay que hacer un análisis paramétrico en el que la perturbación sería:

$$\bar{b}'=\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix};\quad \bar{b}+\lambda\cdot\bar{b}'\rightarrow\begin{pmatrix}1.000\\1.200\\200\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}$$

4 horas-hombre por cada caja adicional de tuercas

No hay incremento de acero

Una caja más de tuercas

$$\underline{b}'=\bar{B}^{-1}\cdot\bar{b}'=\begin{pmatrix}½ & 0 & -2\\-3 & 1 & 10\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$$

$$S=\{i:\underline{b}'_i<0\}:\ S=\{2\};\ \hat{\lambda}=\underset{i\in S}{Min}\left(\frac{\underline{b}_i}{-\underline{b}'_i}\right)=\frac{200}{2}$$

1 Supuesto nos encontramos en un mercado de competencia perfecta, que es una de las hipótesis implícitas en la interpretación económica del problema Dual. Según esta hipótesis el precio justo por cada hora adicional de mano de obra debería coincidir con el incremento en el beneficio que se produce por cada hora adicional contratada, esto es 15.000 pts./hora adicional. En nuestro caso existe un equilibrio de coincidir el coste con los beneficios de cada hora adicional.

$\hat{\lambda} = 100\ ;\ \forall\, \lambda \in [0\,,100]$ la base actual es óptima

$$\overline{X}_B(\lambda) = \underline{\overline{b}} + \lambda \cdot \underline{\overline{b}}' = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 200 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 200 - 2 \cdot \lambda \\ 200 + 1 \cdot \lambda \end{pmatrix}$$

$$Z(\lambda) = Z + \lambda \cdot \overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' = -19.000 + \lambda \cdot (0 \quad ,0 \quad ,-20) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = -19.000 - 20 \cdot \lambda$$

$\overline{C}'_B = (0 \quad ,0 \quad ,-20)$ ← Costes (beneficios) analizados anteriormente. Utilizamos un nuevo vector de costes porque las condiciones económicas del problema han cambiado.

La tabla para λ=100 sería:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	-15	0	-20	-21.000
X_1	1	0	1/2	0	-2	100
X_4	0	0	**-3**	1	10	0
X_2	0	1	0	0	1	300

← Para λ=100 se ha agotado todo el acero

Aplicando el Método Simplex Dual tendremos una solución alternativa.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	LD
Z	0	0	0	-5	-70	-21.000
X_1	1	0	0	1/6	-1/3	100
X_3	0	0	1	-1/3	-10/3	0
X_2	0	1	0	0	1	300

Donde vemos que es la misma que antes en el sentido que los recursos de acero se han acabado. Si seguimos adelante sería producir X_2 a costa de X_1, como se ve:

$$\underline{\overline{b}}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' = \begin{pmatrix} 0 & 1/6 & -1/3 \\ 1 & -1/3 & -10/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{(Nota al pie }^2\text{)}$$

2 El valor negativo que aparece en $\underline{\overline{b}}$' indica que se dejaría de fabricar X_1 si creciera λ por encima de 100. Pero como según el enunciado, no podemos hacer eso porque ya se han producido las cajas de tornillos, hay que parar aquí el problema.

Solución:

Se fabricarían 100 cajas de tuercas con un incremento en el beneficio de 2.000.000 de pts.

PROBLEMA 17

Una compañía dedicada a la confección de trajes de caballero de alta costura centra su actividad en la fabricación de dos tipos de traje, A y B. El traje tipo B se vende en varias boutiques locales con un nombre de marca propia que es percibido por el público en general como símbolo de calidad y, por tanto, se pagan precios elevados por cada traje de estas características. Sin embargo, el traje tipo A es fabricado siguiendo un proceso menos riguroso que se nota en la calidad final del producto. Por esta razón, se vende en las mismas boutiques, pero con otro nombre de marca para un público con menor poder adquisitivo.

El gerente de esta empresa, estudiando el proceso productivo, llega a la conclusión de que la función de costes de producción depende directamente del número de trajes fabricados diariamente según la relación $50000 / (2x_1 + 5x_2)$, en donde x_1 representa el número de trajes de tipo A fabricados diariamente y x_2 el número de trajes de tipo B también fabricados diariamente. Las restricciones con las que se encuentra el gerente a la hora de programar la producción son las debidas a las unidades de materia prima de que se disponen, que se cifran en 3000 uds. diarias, para una demanda por parte de cada traje que se eleva a 25 uds. para el tipo A y 30 uds. para el traje de tipo B. Por otra parte, se dispone de un máximo de 20 operarios, que trabajan a razón de 8 horas diarias, necesitándose 1 hora para la confección del traje de tipo A y de 2 horas para la realización de cada traje de tipo B.

El contrato que tiene en la actualidad esta empresa con las boutiques de venta al público especifica que, diariamente, deben enviarse, al menos, 12 trajes, por lo que ésta es la cantidad mínima a producir, aunque en realidad la demanda es mucho mayor.

Calcular:

a) La cantidad de trajes de cada tipo que se deberían fabricar diariamente para minimizar los costes de fabricación.

b) ¿Cómo evolucionaría la producción si, dado un incremento en las ventas de trajes en las boutiques se solicita un número indeterminado de trajes a la empresa de fabricación?

SOLUCIÓN:

a) El problema debería solucionarse partiendo de la base de que se trata de un problema de programación entera. No obstante, inicialmente se aplican las técnicas habituales de programación lineal, y como los resultados son enteros no es preciso utilizar algoritmos específicos orientados a lograr alcanzar resultados enteros puros.

Llamando:

X_1: nº uds. del traje A, a fabricar diariamente.
X_2: nº uds. del traje B, a fabricar diariamente.

Según el enunciado, la función a minimizar es:

$Min\, Z = \dfrac{50000}{2 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2}$, expresada en miles de pesetas diarias.

Esta expresión no es lineal, y por tanto no se puede aplicar directamente el algoritmo Simplex. Es necesario modificar el problema, de tal forma que, utilizando el denominador, que sí es una expresión lineal, se puede minimizar toda la expresión si se maximiza el denominador. Por tanto, la función objetivo del problema quedaría:

$$Max\, Z' = 2 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2$$

Al final del problema se retoma la expresión original y, dado que el numerador es una constante se divide por el valor de Z' obtenido al resolver el problema de programación lineal.

El problema, entonces, queda:

$$Max\, Z' = 2 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2$$

S.a:

$$\begin{array}{rcrcr}
25 \cdot X_1 & + & 30 \cdot X_2 & \leq & 3000 \\
X_1 & + & 2X_2 & \leq & 160 \\
X_1 & + & X_2 & \geq & 12
\end{array}$$ (20 obreros x 8 horas)

$$X_1, X_2 \geq 0$$

Pasando a la forma estándar de minimización:

$$-\,Min\ Z' = -2 \cdot X_1 - 5 \cdot X_2$$

S.a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
25 \cdot X_1 & + & 30 \cdot X_2 & + & X_3 & & & & & = & 3000 \\
X_1 & + & 2X_2 & & & + & X_4 & & & = & 160 \\
X_1 & + & X_2 & & & & & - & X_5 & = & 12
\end{array}$$

$$X_j \geq 0 \qquad j = 1,\ldots,5$$

Se añade una variable artificial. Para seleccionar la solución básica factible inicial utilizamos el método de penalización:

$$-\,Min\,Z' = -2\cdot X_1 - 5\cdot X_2 + M\cdot X_6$$

S.a:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 25\cdot X_1 & + & 30\cdot X_2 & + & X_3 & & & & & & & = & 3000 \\ X_1 & + & 2X_2 & & & + & X_4 & & & & & = & 160 \\ X_1 & + & X_2 & & & & & - & X_5 & + & X_6 & = & 12 \end{array}$$

$$X_j \geq 0 \qquad\qquad j = 1,\ldots,6$$

X_3, X_4, X_5: Variables de holgura.
X_6: Variable artificial.

Damos a M un valor de, por ejemplo, M=20 de modo que, al final, el algoritmo asigne a X_6 un valor nulo.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 25 & 30 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \overline{b} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 160 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Tomamos como base:

$$\overline{B} = \left(\overline{a}_3, \overline{a}_4, \overline{a}_6\right) = \overline{I} \Rightarrow \overline{B}^{-1} = \overline{I}$$

luego: $\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_6 \end{pmatrix}$

$$\underset{\sim}{\overline{b}} = \overline{B}^{-1}\cdot\overline{b} = \overline{I}\cdot\overline{b} = \overline{b} = \begin{pmatrix} 3000 \\ 160 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Cálculo de la fila cero de la primera tabla Simplex:

$$Z_j - C_j = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_j - C_j$$

$$Z_1 - C_1 = (0,0,20) \cdot \begin{pmatrix} 25 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 = 22$$

$$Z_2 - C_2 = (0,0,20) \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 5 = 20 + 5 = 25$$

$$Z_5 - C_5 = (0,0,20) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -20$$

$$Z' = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (0,0,20) \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 160 \\ 12 \end{pmatrix} = 240\text{uds.}$$

La primera tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z'	22	25	0	0	-20	0	240
X_3	25	30	1	0	0	0	3000
X_4	1	2	0	1	0	0	160
X_6	1	**1**	0	0	-1	1	12

Iterando:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z'	-1/2	0	0	-5/2	0	-20	-400
X_3	10	0	1	-15	0	0	600
X_5	-1/2	0	0	1/2	1	-1	68
X_2	1/2	1	0	1/2	0	0	80

Solución óptima.

La solución óptima para minimizar costes será:

$\mathbf{X_1 = 0}$
$\mathbf{X_2 = 80}$ **uds** Sólo se fabrican trajes del tipo B en una cantidad de 80 uds.

-Z'=-400

Cambiando el signo debido a que el problema era originariamente de maximización:

$$Z' = 400 \qquad \Rightarrow \qquad Z = \frac{50000}{Z'} = 125$$

El coste mínimo de producción para esta solución óptima asciende a 125 uds. monetarias:

$X_3 = 600$; Nos sobran 600 uds. de materia prima por día.

$X_5 = 68$; Enviamos a las boutiques 68 trajes más de los 12 mínimos contratados.

b) Se trata de un problema de análisis paramétrico donde se introduce una variación en el vector del lado derecho:

$$\bar{b} + \lambda\, \bar{b}' = \begin{pmatrix} 3000 \\ 160 \\ 12 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

$$\bar{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -15 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \bar{C}_B = (C_3, C_5, C_2) = (0, 0, -5)$$

Calculando:

$$\underset{\sim}{\bar{b}} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 600 \\ 68 \\ 80 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\bar{b}}' = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b}' = \begin{pmatrix} 1 & -15 & 0 \\ 0 & 1/2 & -1 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por tanto, el conjunto S queda:

$$S = \{j / \underset{\sim}{b}'_j < 0\} = \{2\}$$

Podemos ahora calcular el valor máximo de λ para el cual la solución actual sigue siendo óptima.

$$\hat{\lambda} = \underset{j \in S}{Min}\left\{\frac{\underset{\sim}{b}_j}{-\underset{\sim}{b}'_j}\right\} = Min\left\{\frac{68}{12}\right\} = \frac{68}{12} = \frac{17}{3}; \qquad \forall \lambda \in \left[0, {}^{17}\!/_{3}\right] \text{ la solución actual es óptima.}$$

Calculamos los nuevos valores de la columna de lado derecho:

$$\overline{X}'_B(\lambda) = \underset{\sim}{\overline{b}} + \lambda\, \underset{\sim}{\overline{b}}' = \begin{pmatrix} 600 \\ 68 \\ 80 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$Z'(\lambda) = \overline{C}_B \underset{\sim}{\overline{b}} + \lambda\, \overline{C}_B \underset{\sim}{\overline{b}}' = \overline{C}_B \cdot \overline{X}'_B(\lambda) = (0,0,-5)\cdot \begin{pmatrix} 600 \\ 68 \\ 80 \end{pmatrix} + \lambda(0,0,-5)\cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -12 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= -400 + \lambda \cdot 0 = -400$$

Particularizando:

Para $\lambda = \hat{\lambda} = \dfrac{17}{3}$

$$\overline{X}'_B = \begin{pmatrix} 600 \\ 0 \\ 80 \end{pmatrix} \quad ; \qquad Z' = -400$$

Sustituyendo los valores obtenidos en la tabla óptima nos queda:

	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z'	-1/2	0	0	-5/2	0	-20	-400
X_3	10	0	1	-15	0	0	600
X_5	**-1/2**	0	0	1/2	1	-1	0
X_2	1/2	1	0	1/2	0	0	80

Esta es la solución óptima en el intervalo de $\lambda \in \left[0,\ \dfrac{17}{3}\right]$. Observamos en la tabla que para $\lambda = {}^{17}\!/_{3}$ aparece una solución dual alternativa.

$$\overline{B} = \left(\overline{a}_3, \overline{a}_5, \overline{a}_2\right)$$

luego: $$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_3 \\ X_5 \\ X_2 \end{pmatrix}$$

Aplicamos el Simplex dual para analizar la solución alternativa:

$$\frac{Z_k - C_k}{y_{rk}} = \underset{j \in R}{Min}\left[\frac{Z_j - C_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right]$$

$r = 2$, La segunda fila corresponde a la variable X_5 que deja la base.

$$\frac{Z_k - C_k}{y_{rk}} = Min\left[\frac{-1/2}{-1/2}, \frac{-20}{-1}\right] = 1$$

K = 1, es decir la variable X_1 entra en la base ocupando el lugar de X_5.

pivote: $y_{21} = -1/2$

Pivoteando, la nueva tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z'	0	0	0	-3	-1	-19	-400
X_3	0	0	1	-5	20	-20	600
X_1	1	0	0	-1	-2	2	0
X_2	0	1	0	1	1	-1	80

De nuevo calculamos la columna de lado derecho.

$$\overline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -20 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{C}_B = \left(C_3, C_1, C_2\right) = \left(0, -2, -5\right)$$

Los cálculos se realizarán de forma absoluta tomando como referencia los valores originales del problema.

$$\underset{\sim}{\bar{b}} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -20 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 160 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1960 \\ -136 \\ 148 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\bar{b}}' = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b}' = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -20 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -240 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$S = \left\{ j \,/\, \underset{\sim}{\bar{b}}'_j < 0 \right\} = \{1,3\}$$

$$\hat{\lambda} = \underset{j \in S}{Min} \left\{ \frac{\underset{\sim}{b}_j}{-\underset{\sim}{b}'_j} \right\} = Min \left\{ \frac{1960}{240}, \frac{148}{12} \right\} = Min \left\{ \frac{49}{6}, \frac{37}{3} \right\} = \frac{49}{6}$$

Es decir, $\forall \lambda \in \left[{}^{17}\!/_{3}, {}^{49}\!/_{6} \right]$ la solución actual es óptima.

Para este intervalo, los valores parametrizados de las variables básicas y de la función objetivo quedan:

$$\bar{X}'_B(\lambda) = \begin{pmatrix} 1960 \\ -136 \\ 148 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -240 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

$$Z'(\lambda) = (0,-2,-5) \cdot \begin{pmatrix} 1960 \\ -136 \\ 148 \end{pmatrix} + \lambda\,(0,-2,-5) \cdot \begin{pmatrix} -240 \\ 24 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Solución óptima en el intervalo $\lambda \left[\frac{17}{3}, \frac{49}{6} \right]$

Para $\lambda = \hat{\lambda} = \dfrac{49}{6}$

$$\bar{X}'_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}; \quad Z' = -370 \text{ u.m.}$$

Sustituyendo estos valores en la tabla anterior nos queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	0	0	-3	-1	-19	-370
X_3	0	0	1	**-5**	20	-20	0
X_1	1	0	0	-1	-2	2	60
X_2	0	1	0	1	1	-1	50

La solución alternativa aplicando el algoritmo Simplex dual sería:

Sale $X_3 \Rightarrow r = 1$

$$\frac{Z_k - C_k}{y_{rk}} = Min\left[\frac{-3}{-5}, \frac{-19}{-20}\right] = \frac{3}{5} \Rightarrow K = 4$$

X_4: entra en la base.
X_3: sale de la base.
y_{14}: pivote $y_{14} = -5$.

Pivoteando obtenemos una solución alternativa:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	0	-3/5	0	-13	-7	-370
X_4	0	0	-1/5	1	-4	4	0
X_1	1	0	-1/5	0	-6	6	60
X_2	0	1	1/5	0	5	-5	50

Repetimos nuevamente el proceso, analizando la perturbación de la columna de lado derecho.

$$\overline{B}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1 & 4 \\ -1/5 & 0 & 6 \\ 1/5 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\overline{b}} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} -1/5 & 1 & 4 \\ -1/5 & 0 & 6 \\ 1/5 & 0 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 160 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -392 \\ -528 \\ 540 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{\bar{b}}'=\bar{B}^{-1}\cdot\bar{b}'=\begin{pmatrix}-1/5 & 1 & 4\\ -1/5 & 0 & 6\\ 1/5 & 0 & -5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\72\\-60\end{pmatrix}$$

$$S=\{3\}$$

$$\hat{\lambda}=\left\{\frac{540}{60}\right\}=9$$

Solución óptima en el intervalo $\lambda\left[\frac{49}{6},9\right]$. En este intervalo, los valores parametrizados de las variables básicas y de la función objetivo son:

$$\bar{X}'_B(\lambda)=\begin{pmatrix}-392\\-528\\540\end{pmatrix}+\lambda\begin{pmatrix}48\\72\\-60\end{pmatrix}$$

$$Z'(\lambda)=(0,-2,-5)\cdot\bar{X}_B(\lambda)$$

$$\text{Para } \lambda=\hat{\lambda}=9\begin{cases}\bar{X}'_B=\begin{pmatrix}40\\120\\0\end{pmatrix}\\ Z'=-240\end{cases}$$

Sustituyendo estos valores en la tabla anterior obtenemos la tabla para λ=9:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z'	0	0	-3/5	0	-13	-7	-240
X_4	0	0	-1/5	1	-4	4	40
X_1	1	0	-1/5	0	-6	6	120
X_2	0	1	1/5	0	5	**-5**	0

Aplicando el método Simplex dual obtenemos una solución alternativa.

Entra una variable artificial en la base (X_6). Con valor nulo ocupando la posición de la variable X_2 que abandona la base.

Tras pivotear, la nueva tabla quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z'	0	-7/5	-22/25	0	-20	0	-240
X_4	0	4/5	-1/25	1	0	0	40
X_1	1	6/5	1/25	0	0	0	120
X_6	0	-1/5	-1/25	0	-1	1	0

$$\underset{\sim}{\bar{b}} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} -1/25 & 1 & 0 \\ 1/25 & 0 & 0 \\ -1/25 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3000 \\ 160 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 120 \\ -108 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\sim}{\bar{b}'} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b}' = \begin{pmatrix} -1/25 & 1 & 0 \\ 1/25 & 0 & 0 \\ -1/25 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} > \bar{0}$$

$S = \{0\}$ Matemáticamente significa que la solución actual es óptima $\forall \lambda \in [9, \infty]$

Sin embargo, para $\lambda>9$ la variable artificial X_6 de la base tomaría valor no nulo, por lo que a partir de $\lambda=9$ la solución es no factible.

La expresión que dirige los costes es: $Z = \dfrac{50000}{2 \cdot X_1 + 5 \cdot X_2} = \dfrac{50000}{Z'(\lambda)}$

Recapitulando:

- Si el pedido mínimo es de 0 a 68 $\left(\lambda \cdot 12 = \dfrac{17 \cdot 12}{3} = 68\right)$ trajes, el coste de fabricación permanece constante en 125 uds. monetarias.

  La producción sigue la ley:

  $X_1 = 0$ Trajes tipo A.
  $X_2 = 80$ Trajes tipo B.

- Si el pedido mínimo va de 68 a 98 $\left(\lambda \cdot 12 = \dfrac{49 \cdot 12}{6} = 98\right)$ trajes, el coste de fabricación varía del siguiente modo:

$Z = \dfrac{50000}{Z'(\lambda)}$ desde 125 a 135'13 u.m.

Se fabrica X_1 y X_2 según $\overline{X}'_B(\lambda)$

- Si el pedido aumenta de 98 a 108 $(\lambda \cdot 12 = 9 \cdot 12 = 108)$ trajes, el coste de fabricación varía del siguiente modo: $Z = \dfrac{50.000}{Z'(\lambda)}$ desde 135'13 a 208'3 u.m.

Se fabrica X_1 y X_2 según $\overline{X}'_B(\lambda)$

- Si el pedido aumenta a más de 108 trajes, Z permanece constante en 208'3 u.m.

No se puede fabricar más porque en este punto se han agotado los recursos, por esta razón entra la variable artificial nuevamente en la base.

PROBLEMA 18

Una compañía filial de unos grandes almacenes fabrica dos tipos de productos del género de alta costura: vestidos para señora y trajes para caballero. Un contrato previo establece que la empresa ha de producir al menos 30 vestidos o trajes en cualquier combinación de cantidades a la semana. Además, los acuerdos sindicales del sector exigen que las máquinas de costura funcionen al menos 40 horas por semana, que es lo que se considera un período de producción. Cada traje de caballero necesita dos horas de costura por parte de la única máquina disponible, mientras que cada vestido de señora lleva una hora de máquina. Asimismo, cada vestido realizado cuesta 20.000 pts y cada traje 24.000 pts.

a) Formular un problema que minimice los costes totales de producción.

b) Formular el problema suponiendo que tuviésemos como objetivos no tener costes superiores a 600.000 pts y utilizar exactamente 40 horas de máquina a la semana, siendo el primer objetivo doblemente importante que el segundo.

c) Formular y resolver el problema de minimización de costes suponiendo que el contrato previo establece además que el número mínimo de vestidos a fabricar sea 10, y el de trajes 5. Por el contrario, el mismo contrato estipula que no se pueden producir más de 10 trajes de caballero.

SOLUCIÓN:

a) Se trata de establecer una planificación semanal de la producción.

Llamando:

X_1 : nº de vestidos fabricados.
X_2 : nº de trajes fabricados.

Este problema habría de resolverse teniendo en consideración que se trata de variables enteras. No obstante, dado que aplicando el Método Simplex se obtiene una solución entera no es necesario recurrir a técnicas propias de la programación entera para obtener la solución correcta.

La formulación del problema corresponde a la siguiente expresión:

$$\text{Min } Z = 20 \cdot X_1 + 24 \cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{lll} X_1 & + X_2 & \geq 30 \\ X_1 & +2\cdot X_2 & \geq 40 \end{array}\right\} \qquad X_1, X_2 \geq 0$$

b) Programación por objetivos. La formulación de este problema queda:

Función objetivo:

$$\text{Min } Z = 2\cdot y_1^+ + y_2^+ + y_2^-$$

$S.a.$

Restricción no flexible: $\qquad X_1 + X_2 \geq 30$

$$\begin{array}{llll} 20\cdot X_1 & +24\cdot X_2 & -600 & = y_1^+ - y_1^- \\ X_1 & +2\cdot X_2 & -40 & = y_2^+ - y_2^- \end{array}$$

Restricciones flexibles:

$$X_1,\ X_2,\ y_i^+,\ y_i^- \geq 0 \quad (i = 1, 2)$$

c) El planteamiento para esta parte del problema corresponde a la expresión:

$$\text{Min } Z = 20\cdot X_1 + 24\cdot X_2$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llr} X_1 & + X_2 & \geq 30 \\ X_1 & +2\cdot X_2 & \geq 40 \\ X_1 & & \geq 10 \\ & X_2 & \geq 5 \\ & X_2 & \leq 10 \end{array}\right\} \qquad X_1, X_2 \geq 0$$

Resolvemos el problema como uno de variables acotadas en el que hay que introducir variables artificiales. Utilizamos el método de penalización con M=50.

$$\text{Min } Z = 20\cdot X_1 + 24\cdot X_2 + 50\cdot X_5 + 50\cdot X_6$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llllll} X_1 & + X_2 & - X_3 & & + X_5 & = 30 \\ X_1 & + 2\cdot X_2 & & - X_4 & + X_6 & = 40 \end{array}\right\}$$

$$X_1 \geq 10; \quad 5 \leq X_2 \leq 10; \quad X_3, X_4, X_5, X_6 \geq 0$$

X_5, X_6 : Variables artificiales.

Como se trata de un problema de minimización interesa asignar inicialmente las variables a su cota inferior.

$$X_1 = l_1 = 10 \qquad\qquad X_2 = l_2 = 5$$

$$\overline{B} = [\overline{a}_5 \quad ,\overline{a}_6]; \quad \overline{N}_1 = [\overline{a}_1 \quad ,\overline{a}_2 \quad ,\overline{a}_3 \quad ,\overline{a}_4]; \quad \overline{N}_2 = [0]$$

$$\overline{l}_{N_1} = \overline{X}_{N_1} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \overline{u}_{N_2} = \overline{X}_{N_2} = \{0\}$$

Valores de las variables básicas

$$\overline{X}_B = \underline{b} = \overline{B}^{-1}\cdot\overline{b} - \overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_1\cdot\overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_2\cdot\overline{u}_{N_2} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 20 \end{pmatrix} \geq \overline{0} \quad \text{Solución factible}$$

Los valores de la fila cero para la primera tabla quedan:

$$Z = \overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b} - \left(\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}\right)\cdot\overline{l}_{N_1} = (50, 50)\cdot\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \end{pmatrix} -$$

$$-\left((50, \quad 50)\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix} - (20, \quad 24, \quad 0, \quad 0)\right)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 3.500 - 1.430 = 2.070$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \overline{B}^{-1} \overline{a}_1 - c_1 = (50, \quad 50) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 20 = 80$$

$$Z_2 - C_2 = (50, \quad 50) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 24 = 126$$

$$Z_3 - C_3 = (50, \quad 50) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -50$$

$$Z_4 - C_4 = (50, \quad 50) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -50$$

La primera tabla sería:

	l	l	l	l			
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	80	126	-50	-50	0	0	2.070
X_5	1	1	-1	0	1	0	15
X_6	1	2	0	-1	0	1	20

l: cota inferior
u: cota superior

Aplicando el algoritmo Simplex para variables acotadas:

$$\alpha_k = \underset{j \in \Re_1}{Max}(Z_j - C_j) = 126 = Z_2 - C_2 \; ; \quad K = 2 \; ; \quad K \in R_1$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} \underset{1 \le i \le 2}{Min}\left\{\dfrac{15-0}{1}, \quad \dfrac{20-0}{2}\right\} = 10 = \dfrac{\underline{b}_2 - l_{B_2}}{y_{22}} \\ X_6\text{: Candidata a salir de la base.} \end{cases}$$

$$\gamma_2 = \infty \text{ ; ya que } \overline{y}_2 \geq \overline{0}$$

$$\gamma_3 = u_2 - l_2 = 10 - 5 = 5$$

$$\Delta_2 = Min(10, \quad \infty, \quad 5) = 5 \equiv \gamma_3$$

Según el algoritmo Simplex para variables acotadas no hay cambio de base, $X_2 = u_2 = 10$ (X_2 pasa a su cota superior sin que en su crecimiento desde su cota inferior sea bloqueada por ninguna variable básica). Sin embargo, es necesario calcular aparte los nuevos valores de la columna de LD:

$$Z = \hat{Z} - (Z_k - C_k)\cdot\Delta_k = 2.070 - (126)\cdot 5 = 1.440$$

$$\underline{\bar{b}} = \underline{\hat{b}} - \bar{y}_k \cdot \Delta_k = \begin{pmatrix}15\\20\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\cdot 5 = \begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}$$

Sustituyendo en la nueva tabla y repitiendo el proceso:

	1	u	1	1			
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**X_5**	**X_6**	**LD**
Z	80	126	-50	-50	0	0	1.440
X_5	**1**	1	-1	0	1	0	10
X_6	1	2	0	-1	0	1	10

$$\alpha_k = Max\left(\underset{j\in\Re_1}{Max}(z_j - c_j),\ \underset{j\in\Re_2}{Max}(c_j - z_j)\right)$$

$$\alpha_k = Max(80, -126) = 80 = Z_1 - C_1;\quad K = 1\ ;\ K \in R_1$$

$$\gamma_1 = \begin{cases} Min\left(\dfrac{10-0}{1}, \dfrac{10-0}{1}\right) = 10 \text{ Es indiferente coger una u otra variable para salir de la base} \\ X_5\text{: candidata a salir de la base (podría haber sido } X_6\text{)} \end{cases}$$

$\gamma_2 = \infty$; debido a que $\bar{y}_1 \geq \bar{0}$

$\gamma_3 = u_1 - l_1 = \infty - 10 = \infty$

$\Delta_1 = Min\{10,\ \infty,\ \infty\} = 10 \equiv \gamma_1$

X_1 entra en la base y sale X_5.

Pivoteamos sobre y_{11} excepto la columna de LD que se calcula aparte:

$$Z = \hat{Z} - (Z_k - C_k)\cdot\Delta_k = 1.440 - (80)\cdot 10 = 640$$

$$\underline{\bar{b}} = \underline{\hat{b}} - \bar{y}_k\Delta_k = \begin{Bmatrix}10\\10\end{Bmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\cdot 10 = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$b_k = l_k + \Delta_k$; $b_1 = l_1 + \Delta_1 = 10 + 10 = 20$

Tras el pivoteo y sustituir los valores de la columna de lado derecho, la siguiente tabla queda:

		u	1	1	1		
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	**LD**
Z	0	46	30	-50	-80	0	640
X_1	1	1	-1	0	1	0	20
X_6	0	1	**1**	-1	-1	1	10

Repitiendo el proceso:

$$\alpha_k = Max(30, -46) = 30 = Z_3 - C_3; \quad K = 3 \quad ; \quad K \in R_1$$

$$\gamma_1 = \left(\frac{0-0}{1}\right) = 0 \ ; \ X_6 \text{ candidata a salir de la base}$$

$$\gamma_2 = \left(\frac{\infty - 20}{1}\right) = \infty$$

$$\gamma_3 = u_3 - l_3 = \infty - 0 = \infty$$

$$\Delta_3 = Min(0, \quad \infty, \quad \infty) = 0 \equiv \gamma_1$$

X_6 sale de la base y entra X_3.

Pivoteo sobre y_{23}. La nueva columna de LD queda:

Z = 640 - (30)·0 = 640

$$\underline{\bar{b}} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 0 = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}_2 = 0 + 0 = 0$$

Tras el pivoteo y sustitución de los valores de la columna de lado derecho, la siguiente tabla quedaría:

		u		1	1	1	
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	**LD**
Z	0	16	0	-20	-50	-30	640
X_1	1	2	0	-1	0	1	20
X_3	0	1	1	-1	-1	1	10

$\alpha_k < 0$. La tabla actual es óptima.

Planificación semanal:

$X_1 = 20$ vestidos.
$X_2 = 10$ trajes.
Z = 640.000 pts de coste.
X_3, $X_4 = 0$ Se cumplen los requisitos estrictamente.

PROBLEMA 19

Una factoría de fabricación de muebles de cocina produce mesas plegables especiales para ganar espacios útiles. En la actualidad comercializa únicamente dos modelos de mesas. El pequeño, que supone unos beneficios netos de 10.000 pts por unidad, siendo el tiempo necesario para su fabricación de 1 hora. El modelo grande implica unos beneficios netos de 15.000 pts por unidad siendo necesarias 2 horas para la fabricación de cada mesa. El incremento experimentado en la compra de viviendas hace que la demanda haya crecido notablemente en los últimos tiempos, hasta tal punto que la demanda de mesas pequeñas es, cuando mínimo, superior a las 300 unidades semanales. Sin embargo, el segmento de las mesas grandes está restringido a una demanda máxima de 400 unidades semanales.

Esta empresa ha establecido dos objetivos que pretende cumplir por orden de importancia:

a) Alcanzar unos beneficios netos semanales de al menos 11 millones de pts.

b) Evitar una utilización inferior a la capacidad productiva semanal de la empresa, que en la actualidad se cifra en 1.300 horas.

Establecer cómo habría de ser el esquema productivo semanal para esta empresa con objeto de intentar satisfacer ambos objetivos.

SOLUCIÓN:

Según el enunciado se trata de un problema con dos objetivos de distinta importancia en el que las variables de producción se encuentran acotadas. El planteamiento sería:

Llamando:

X_1= unidades de mesas pequeñas por semana.
X_2= unidades de mesas grandes por semana.

Dado que las cantidades previsibles que pueden tomar las variables X_1 y X_2 en el óptimo son elevadas se puede considerar como válida la resolución del problema como uno de programación lineal sin atender a consideraciones relacionadas con los necesarios valores enteros que han de tener las variables al final del problema.

$$Min \quad Z = M \cdot y_1^- + y_2^-$$

S.a.

$$\begin{array}{lllll} 10 \cdot X_1 & +15 \cdot X_2 & -11.000 & = y_1^+ - y_1^- & \\ X_1 & +2 \cdot X_2 & -1.300 & = y_2^+ - y_2^- & y_1^+ \cdot y_1^- = 0 \\ X_1 & & & \geq 300 & y_2^+ \cdot y_2^- = 0 \\ & X_2 & & \leq 400 & \end{array}$$

Con $y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0$

En cuanto a M, lo podemos hacer M = 10, indicando que el primer objetivo es más importante que el segundo. Quedando:

$$Min \quad Z = 10 \cdot y_1^- + y_2^-$$

S.a.

$$\begin{array}{llllll} 10 \cdot X_1 & +15 \cdot X_2 & -y_1^+ + y_1^- & & = 11.000 \\ X_1 & + 2 \cdot X_2 & & - y_2^+ + y_2^- & = 1.300 \\ X_1 & & & & \geq 300 \\ & X_2 & & & \leq 400 \end{array}$$

Con $y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0$

Dado que existen dos variables acotadas es por lo que resulta conveniente resolver el problema mediante el algoritmo de variables acotadas.

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 10 & 15 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad \overline{B} = \left[\overline{a}_{y_1^-}, \ \overline{a}_{y_2^-}\right]$$

Inicialmente situamos a X_1 en su cota inferior y a X_2 en su cota superior debido a que X_2 lleva asociado un mayor beneficio unitario, y_1^+, y_2^+ en su cota inferior.

$$\left.\begin{array}{l} l_1 = X_1 = 300 \\ u_2 = X_2 = 400 \end{array}\right\| \qquad \overline{N}_1 = \begin{bmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad \overline{l}_{N_1} = \overline{X}_{N_1} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \overline{a}_{X_1} & \overline{a}_{y_1^+} & \overline{a}_{y_2^+} \end{array}$$

$$\overline{N}_2 = \begin{bmatrix} 15 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \overline{u}_{N_2} = \overline{X}_{N_2} = (400)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \overline{a}_{X_2} \end{array}$$

Valores de las variables básicas:

$$\begin{pmatrix} y_1^- \\ y_2^- \end{pmatrix} = \overline{X}_B = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 \cdot \overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 \cdot \overline{u}_{N_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11.000 \\ 1.300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot (400) =$$

$$= \begin{pmatrix} 11.000 \\ 1.300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3.000 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6.000 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 200 \end{pmatrix} \geq \overline{0} \quad \text{(Solución factible)}$$

Valor de la función objetivo:

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - (\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}) \cdot \overline{l}_{N_1} - (\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 - \overline{C}_{N_2}) \cdot \overline{u}_{N_2} =$$

$$= (10, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 11.000 \\ 1.300 \end{pmatrix} - \left[(10, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 10 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - (0, \quad 0, \quad 0) \right] \cdot \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \left[(10, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 \right] \cdot 400 =$$

$$= 111.300 - 30.300 - 60.800 = 20.200$$

Lógicamente, equivale a $Z = 10 \cdot y_1^- + y_2^- = 10 \cdot 2.000 + 200 = 20.200$

Resto de valores de la fila cero:

$$Z_{X_1} - C_{X_1} = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_{X_1} - c_1 = (10, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 101$$

$$Z_{X_2} - C_{X_2} = (10, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 152$$

$$Z_{y_1^+} - C_{y_1^+} = (10, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -10$$

$$Z_{y_2^+} - C_{y_2^+} = (10, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 0 = -1$$

La primera tabla sería:

	l	u	l		l		
	X_1	**X_2**	**y_1^+**	**y_1^-**	**y_2^+**	**y_2^-**	**LD**
Z	101	152	-10	0	-1	0	20.200
y_1^-	**10**	15	-1	1	0	0	2.000
y_2^-	1	2	0	0	-1	1	200

l: cota inferior
u: cota superior

$$\left.\begin{array}{l} \underset{j\in\Re_1}{Max}\left(Z_j - C_j\right) = 101 \\ \underset{j\in\Re_2}{Max}\left(C_j - Z_j\right) = -152 \end{array}\right\} \quad \alpha_K = 101 > 0;\ K = X_1 \quad K \in \Re_1$$

$$\begin{cases} \gamma_1 = \underset{1\le i\le m}{Min}\left(\dfrac{b_i - l_{B_i}}{y_{iK}} : y_{iK} > 0\right) = Min\left(\dfrac{2.000-0}{10},\ \dfrac{200-0}{1}\right) = Min(200,\ 200) = 200 = \dfrac{b_1 - l_{B_1}}{y_{11}} \\ \text{(Se ha cogido el primer valor aunque cualquiera de los dos hubiese sido válido)} \\ \gamma_2 = \infty \ ;\ \text{ ya que } \bar{y}_1 \ge \bar{0} \\ \gamma_3 = u_1 - l_1 = \infty - 300 = \infty \end{cases}$$

$$\Delta_{X_1} = Min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$

$$\Delta_{X_1} = Min(200,\ \infty,\ \infty) = 200$$

y_1^- sale de la base y entra X_1. Pivoteo sobre y_{11}.

La columna de LD quedaría:

$$Z = \hat{Z} - \left(Z_K - C_K\right) \cdot \Delta_K = 20.200 - 101 \cdot 200 = 0$$

$$\underline{\bar{b}} = \underline{\hat{b}} - \bar{y}_K \cdot \Delta_K = \begin{pmatrix} 2.000 \\ 200 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot 200 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = l_{X_1} + \Delta_{X_1} = 300 + 200 = 500$$

Tras el pivoteo y sustituyendo la columna de lado derecho, la nueva tabla queda:

		u	l	l	l		
	X_1	X_2	y_1^+	y_1^-	y_2^+	y_2^-	**LD**
Z	0	0'5	0'1	-10'1	-1	0	0
X_1	1	1'5	-0'1	0'1	0	0	500
y_2^-	0	0'5	**0'1**	-0'1	-1	1	0

l: cota inferior

u: cota superior

Repitiendo el proceso:

$$\left.\begin{array}{l} \underset{j\in\Re_1}{Max}\left(Z_j - C_j\right) = 0'1 \\ \underset{j\in\Re_2}{Max}\left(C_j - Z_j\right) = -0'5 \end{array}\right\} \qquad \alpha_K = 0'1 > 0;\ K = y_1^+ \quad K \in \Re_1$$

$$\left.\begin{array}{l} \gamma_1 = \dfrac{0-0}{0'1} = 0 \\ \gamma_2 = \dfrac{\infty - 500}{0'1} = \infty \\ \gamma_3 = \infty - 0 = \infty \end{array}\right\} \quad \Delta y_1^+ = Min(0,\ \ \infty,\ \ \infty) = 0$$

Sale y_2^- de la base y entra y_1^+. Pivoteo sobre y_{23}.

Actualización de la columna de LD.

$$Z = \hat{Z} - \left(Z_K - C_K\right)\cdot\Delta_K = 0 - 0'1\cdot 0 = 0$$

$$\underline{\bar{b}} = \underline{\hat{b}} - \bar{y}_k\Delta_k = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -0'1 \\ 0'1 \end{pmatrix}\cdot 0 = \begin{pmatrix} 500 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$y_1^+ = l_{y_1^+} + \Delta_{y_1^+} = 0 + 0 = 0$$

Tras pivotear nos queda:

		u		l	l	l	
	X_1	X_2	y_1^+	y_1^-	y_2^+	y_2^-	**LD**
Z	0	0	0	-10	0	-1	0
X_1	1	2	0	0	-1	1	500
y_1^+	0	5	1	-1	-10	10	0

$$\left.\begin{array}{l} \underset{j\in\Re_1}{Max}\left(z_j - c_j\right) = 0 \\ \underset{j\in\Re_2}{Max}\left(c_j - z_j\right) = 0 \end{array}\right\} \quad \alpha_K = 0 \quad \text{Solución óptima (degenerada)}$$

Existen también dos soluciones alternativas dado que en la fila cero hay dos variables no básicas con valores nulos.

$$\left.\begin{array}{l} y_1^- = 0 \\ y_2^- = 0 \end{array}\right\} \quad \text{Se cumplen los dos objetivos}$$

Como $\left.\begin{array}{l} y_1^+ = 0 \\ y_2^+ = 0 \end{array}\right\}$

Se cumplen estrictamente, es decir, se alcanzan unos beneficios netos semanales de 11 M. pts. Y se utilizan 1.300 horas de capacidad productiva semanal.

Por tanto, el esquema de producción semanal sería:

X_1= 500 mesas pequeñas/semana
X_2= 400 mesas grandes/semana
Z = 0 Este valor representa que se han anulado completamente las desviaciones indeseables.

PROBLEMA 20

Un grupo de inversionistas se plantea la posibilidad de crear una empresa que compita en el mercado de aerosoles para limpieza del hogar. Para hacer realidad esta idea pueden conseguir a buen precio la patente de dos productos líquidos de limpieza que en otro país han tenido muy buena acogida, lo que les permite ser optimistas sobre el éxito del negocio. No obstante, deciden hacer números y llegan a la conclusión de que podrían ganar 20.000 pesetas por cada tonelada del producto A que fabriquen, mientras que cada tonelada del producto B les supondría unos beneficios de 27.000 pesetas. En cuanto a recursos humanos, consideran que la planta de fabricación funcionaría perfectamente con 5 personas, actualmente disponibles, trabajando a razón de 8 horas diarias, pues saben que, en promedio, cada tonelada del producto A requiere de 2 horas de mano de obra, mientras que cada tonelada del producto B implica 3 horas de mano de obra. La cuestión del almacenamiento del aerosol producido se soluciona fácilmente porque habría una elevada rotación con envío todos los días de producción; sin embargo, la fabricación del día sí debe ser almacenada en una serie de tanques con capacidad inicial máxima de 1.500 m^3. En este sentido, cada tonelada del producto A ocupa 8 m^3, mientras que cada tonelada del producto B ocupa 10 m^3.

Por condiciones del entorno empresarial, si se deciden a participar en la fabricación de alguno de los dos productos, deben comprometerse a fabricar una cantidad diaria mínima, mientras que, también para no provocar una guerra de precios con la competencia, no deben fabricar más de una determinada cantidad diaria de productos. De esta forma, estiman que la cantidad mínima de A que se debe producir ha de ser de 1 tonelada, mientras que para el elemento B debe ser 2 toneladas. Las cantidades máximas, por el contrario, serían 15 toneladas para el producto A y 10 toneladas para el B.

Finalmente, como condición absolutamente indispensable para hacer la inversión, se plantean que los beneficios sean como mínimo de 500.000 pesetas diarias por la fabricación de estos productos. Por otra parte se plantean como objetivos a intentar cumplir el no usar más mano de obra que la disponible diaria con que cuentan, ni tampoco tener que utilizar mayor capacidad de almacenamiento de la que actualmente poseen.

Con estas condiciones, ¿cuál habría de ser la cantidad diaria de cada producto a fabricar?

SOLUCIÓN:

Se trata de un problema en el que existe una condición que ha de cumplirse forzosamente (restricción no flexible) y dos objetivos que se ha de intentar cumplir (restricciones flexibles).

Llamando:

X_1: Toneladas del producto A que se fabrican diariamente.
X_2: Toneladas del producto B que se fabrican diariamente.

La formulación del problema, en función del enunciado quedaría:

$$Min\ Z = y_1^+ + y_2^+$$

S.a:

$$\begin{array}{lclclclcl} 20\cdot X_1 & + & 27\cdot X_2 & \geq & 500 & & & & \\ 2\cdot X_1 & + & 3\cdot X_2 & = & 40 & + & y_1^+ & - & y_1^- \\ 8\cdot X_1 & + & 10\cdot X_2 & = & 1500 & + & y_2^+ & - & y_2^- \end{array}$$

Con:

$$1 \leq X_1 \leq 15 \qquad y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0 \qquad 2 \leq X_2 \leq 10$$

Al añadir variables de holgura se observa que no se obtiene una base identidad inicial, por lo que es necesario añadir una variable artificial. Para eliminar esta variable se utilizará el método de penalización con M=10.

$$Min\ Z = y_1^+ + y_2^+ + M \cdot X_4$$

S.a:

$$\begin{array}{lclclclclclclclcl} 20\cdot X_1 & + & 27\cdot X_2 & - & X_3 & + & X_4 & & & & & & & & & = & 500 \\ 2\cdot X_1 & + & 3\cdot X_2 & & & & & - & y_1^+ & + & y_1^- & & & & & = & 40 \\ 8\cdot X_1 & + & 10\cdot X_2 & & & & & & & & & - & y_2^+ & + & y_2^- & = & 1500 \end{array}$$

$$1 \leq X_1 \leq 15 \qquad X_3, X_4 \geq 0$$

$$2 \leq X_2 \leq 10 \qquad y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0$$

La matriz de restricciones correspondiente a este problema queda:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 20 & 27 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La base sería: $\overline{B} = \left[\overline{a}_{X_4}, \overline{a}_{y_1^-}, \overline{a}_{y_2^-} \right]$

Como el problema debe resolverse por variables acotadas, primero se hace un tanteo para asignar las variables no básicas a sus cotas superiores e inferiores y comprobar si la solución es factible.

$$\overline{N}_1 = \left[\overline{a}_{X_3}, \overline{a}_{y_1^+}, \overline{a}_{y_2^+} \right] \; ; \; \overline{N}_2 = \left[\overline{a}_{X_1}, \overline{a}_{X_2} \right]$$

Ya que interesa que X_1 y X_2 sean lo más grande posible.

Para comprobar la factibilidad se utiliza la expresión correspondiente del algoritmo de variables acotadas.

$$\overline{X}_B = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \left(\overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 \cdot \overline{l}_{N_1} \right) - \left(\overline{B}^{-1} \cdot \overline{\mathrm{N}}_2 \cdot \overline{u}_{N_2} \right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 500 \\ 40 \\ 1500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & 27 \\ 2 & 3 \\ 8 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 500 \\ 40 \\ 1500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 570 \\ 60 \\ 220 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -70 \\ -20 \\ 280 \end{pmatrix} \text{Asignación no factible}$$

Se prueba otra asignación de variables no básicas situando únicamente en su cota superior a la variable con mayores beneficios asociados.

$$\overline{N}_1 = \left[\overline{a}_{X_1}, \overline{a}_{X_3}, \overline{a}_{y_1^+}, \overline{a}_{y_2^+} \right] \; ; \; \overline{N}_2 = \left[\overline{a}_{X_2} \right]$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} 500 \\ 40 \\ 1500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 27 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \cdot 10 =$$

$$= \begin{pmatrix} 500 \\ 40 \\ 1500 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 270 \\ 30 \\ 100 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 8 \\ 1392 \end{pmatrix} \text{Asignación factible}$$

X_2: Cota superior.
X_1: Cota inferior.

Valor de la función objetivo.

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}\right) \cdot \overline{l}_{N_1} - \left(\overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{N}_2 - \overline{C}_{N_2}\right) \cdot \overline{u}_{N_2} =$$

$$= (10,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 40 \\ 1500 \end{pmatrix} - \left[(10,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 20 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$- \left[(10,0,0) \begin{pmatrix} 27 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} - 0 \right] \cdot 10 = 5000 - 200 - 2700 = 2100$$

Los valores de la fila cero para la primera tabla quedan:

$$Z_{X_1} - C_{X_1} = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_{X_1} - c_{X_1} = (10,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} - 0 = 200$$

$$Z_{X_2} - C_{X_2} = (10,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 27 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} - 0 = 270$$

$$Z_{X_3} - C_{X_3} = (10,0,0) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -10$$

$$Z_{y_1^+} - C_{y_1^+} = (10,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

$$Z_{y_2^+} - C_{y_2^+} = (10,0,0) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = -1$$

La primera tabla sería:

	l	u	l		l		l		
	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1^+	y_1^-	y_2^+	y_2^-	**LD**
Z	200	270	-10	0	-1	0	-1	0	2100
X_4	20	27	-1	1	0	0	0	0	210
y_1^-	**2**	3	0	0	-1	1	0	0	8
y_2^-	8	10	0	0	0	0	-1	1	1392

l: cota inferior
u: cota superior

Aplicando el algoritmo de variables acotadas:

$$\alpha_K = Max(200, -270) = 200; \ K = 1$$

$K \in R_1$; X_1 es candidato a entrar en la base.

$$\gamma_1 = \underset{1 \le i \le m}{Min}\left(\frac{b_i - l_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0\right) = Min\left(\frac{210-0}{20}, \frac{8-0}{2}, \frac{1392-0}{8}\right) =$$

$= Min(10'5, 4, 696) = 4$; y_1^- candidata a salir de la base.

$$\gamma_2 = \infty \ ; \ \overline{y}_1 \ge \overline{0}$$
$$\gamma_3 = u_{X_1} - l_{X_1} = 15 - 1 = 14$$
$$\Delta_1 = Min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) = Min(4, \infty, 14) = 4 \equiv \gamma_1$$

Por tanto, y_1^- sale de la base. Pivote y_{21}.

Valores de la columna de lado derecho:

$$\overline{X}_B = \underline{\hat{b}} - \overline{y}_1 \cdot \Delta_1 ; \quad \begin{pmatrix} X_4 \\ y_1^- \\ y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 210 \\ 8 \\ 1392 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 2 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot 4 = \begin{pmatrix} 130 \\ 0 \\ 1360 \end{pmatrix}$$

$X_1 = l_1 + \Delta_1$; Con $X_1 = 1+4 = 5$

$$Z = \hat{Z} - (Z_k - C_k)\cdot\Delta_k = \hat{Z} - (Z_{X_1} - C_{X_1})\cdot\Delta_{X_1} = 2100 - 200\cdot 4 = 1300$$

La nueva tabla, tras el pivoteo queda:

	u	1			1	1	1		
	X_1	**X_2**	**X_3**	**X_4**	**y_1^+**	**y_1^-**	**y_2^+**	**y_2^-**	**LD**
Z	0	-30	-10	0	99	-100	-1	0	1300
X_4	0	-3	-1	1	**10**	-10	0	0	130
X_1	1	1'5	0	0	-0'5	0'5	0	0	5
y_2^-	0	-2	0	0	4	-4	-1	1	1360

Repitiendo el proceso:

$\alpha_K = Max(99,\ 30) = 99\,;\ K = y_1^+;\ K \in R_1$

y_1^+ cadidata a entrar en la base.

$\gamma_1 = Min\left(\dfrac{130-0}{10}, \dfrac{1360-0}{4}\right) = 13$; X_4 candidata a salir de la base.

$\gamma_2 = \dfrac{15-5}{0'5} = 20$; X_1 candidata a salir de la base.

$\gamma_3 = \infty$

$\Delta y_1^+ = Min(13,\ 20,\ \infty) = 13 \equiv \gamma_1$

X_4 sale da la base. Pivote y_{15}.

La nueva columna de lado derecho queda:

$$\begin{pmatrix} X_4 \\ X_1 \\ y_2^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 130 \\ 5 \\ 1360 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ -0'5 \\ 4 \end{pmatrix}\cdot 13 = \begin{pmatrix} 0 \\ 11'5 \\ 1308 \end{pmatrix}$$

$y_1^+ = 0 + 13 = 13$

$Z = 1300 - (99 \cdot 13) = 13$ (Coincidiendo con el exceso de horas hombre)

Tras el pivoteo, la tabla queda:

		u	1	1	—	1	1		
	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1^+	y_1^-	y_2^+	y_2^-	**LD**
Z	0	-0'33	-0'1	-9'9	0	-1	-1	0	13
y_1^+	0	-0'3	-0'1	0'1	1	-1	0	0	13
X_1	1	**1'35**	-0'05	0'05	0	0	0	0	11'5
y_2^-	0	-1'7	-0'1	-0'1	0	-3	-1	1	1308

Esta solución se acerca mucho al óptimo, siendo lo único que lo evita el valor $Z_{X_2} - C_{X_2} < 0$ y corresponde a una variable en su cota superior. Este resultado podría considerarse como bueno, habida cuenta que el valor -0'33, al ser casi cero indica que existe una solución alternativa, en este caso un poco mejor ya que será: $(Z_{X_2} - C_{X_2})\,\Delta_K$ y como ya se ha indicado, el valor $Z_{X_2} - C_{X_2}$ es bastante pequeño.

No obstante, continuando con el proceso:

$$\alpha_K = Max\big(Max(-0'1, -1, -9'9)\ ;\ Max(0'33)\big) = 0'33 > 0\ ;\ \text{Solución mejorable.}$$

X_2 candidata a entrar en la base; $K \in R_2$

$$\gamma_1 = Min\left(\frac{15-0}{-(-0'3)}\ ;\ \frac{(1308-0)}{-(-1'7)}\right) = Min(50\ ,\ 769'4) = 50\ ;\ y_1^+$$

candidata a salir de la base.

$$\gamma_2 = Min\left(\frac{15-11'5}{1'35}\right) = 2'6\ ;\quad X_1 \text{ candidata a salir de la base.}$$

$$\gamma_3 = u_2 - l_2 = 15 - 1 = 14$$

$$\Delta_K = \Delta_2 = Min(50, 2'6, 14) = 2'6 \equiv \gamma_2$$

X_2 entra en la base.
X_1 sale porque alcanza su cota superior.

La nueva columna de lado derecho queda entonces:

$$Z = 13 + (-0'33) \cdot 2'59 = 12'223$$

$$\underline{\bar{b}} = \begin{pmatrix} 13 \\ 11'5 \\ 1308 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0'3 \\ 1'35 \\ -1'7 \end{pmatrix} \cdot 2'59 = \begin{pmatrix} 12'223 \\ 15 \\ 1303'6 \end{pmatrix} \leftarrow X_1 \text{ en su cota superior.}$$

$$b_2 = u_2 - \Delta_2 = 10 - 2'59 = 7'41$$

Pivoteando sobre el término y_{22}, la tabla queda:

	u		1	1		1	1		
	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1^+	y_1^-	y_2^+	y_2^-	LD
Z	0'24	0	-0'11	-9'89	0	-1	-1	0	12'223
y_1^+	0'22	0	-0'1	0'1	1	-1	0	0	12'223
X_2	0'7	1	-0'03	0'03	0	0	0	0	7'41
y_2^-	1'26	0	0'03	-0'03	0	-3	1	1	1303'6

$$\alpha_K = Max\big(Max(-0'11\,,\,-9'89\,,\,-1\,,\,-1)\,,\ Max(-0'24)\big) \le 0$$

Solución óptima.

Resultados:

X_1= 15 Tm del producto A a fabricar diariamente
X_2= 7'41 Tm del producto B a fabricar diariamente

y_1^+= 12'233 horas hombre adicionales a las 40 que se consideraban inicialmente que se hacen necesarias para cumplir el objetivo inflexible de beneficios. No se cumple el objetivo de la mano de obra.

y_2^- = 1303'6 m^3 de capacidad de almacenamiento diaria sobran con este esquema productivo. Se cumple el objetivo de almacenamiento.

La función objetivo Z=12'223 coincide con el exceso de mano de obra (y_1^+) al estar esta variable en la función objetivo.

PROBLEMA 21

El discreto y formal cantante *Jèsulín de Lubrique* ha decidido que lo suyo no son ni los cuernos ni los focos del escenario, sino la producción de los compact-discs (CD's) y de los casetes tradicionales debido a que, según él, "er productó se lleva lo mejó del pastel". Ante tamaño argumento ha montado su propia firma musical, en la que, como no, él mismo constituye la principal estrella.

Tras estudiar el proceso de grabación y elaboración descubre que la producción de una batería de CD's (que incluye 10 unidades de éstos) le puede generar unos beneficios netos de 15.000 pts. Por otra parte, una batería de casetes (también con 10 unidades) le puede reportar unos beneficios netos de 10.000 pts. El tiempo necesario en la estampación y embalaje de una batería de CD's es de 2 horas, mientras que el necesario para la grabación y embalaje de una batería de casetes es de 1 hora. El éxito experimentado por este personaje en el mundo de la canción le ha significado un incremento notable en las ventas de CD's, hasta tal punto que la demanda de éstos es, cuando mínimo, superior a las 300 baterías semanales. Sin embargo, en lo que respecta a la venta de casetes, al tratarse de un tipo de sistema musical en declive, su producción ha de estar restringida a un máximo de 400 baterías semanales.

Al frente de su nueva empresa, los objetivos que se ha propuesto cumplir, por orden de importancia, son los siguientes:

a) Alcanzar unos beneficios netos semanales de al menos 11 millones de pts.

b) Evitar una utilización inferior a la capacidad productiva semanal de su empresa, que en la actualidad se cifra en 1300 horas.

Establecer cuál habría de ser la producción óptima que debería definir para intentar cumplir tales condiciones.

SOLUCIÓN:

Este problema responde a una formulación matemática idéntica a la del problema 19, por lo que se aplican las mismas consideraciones con respecto a los valores enteros del resultado. Se ilustrará obteniendo una solución altenativa.

Llamando:

X_1: nº de baterías de CD's.
X_2: nº de baterías de casetes.

Se trata de un problema de Programación por Objetivos.

El planteamiento obedece al siguiente esquema: (Donde el valor M representa la ponderación asignada a uno de los objetivos para potenciarlo más que al otro)

$Min\ Z = M\ y_1^- + y_2^-$

S.a:

$$\begin{array}{ccccccccc} 15\cdot X_1 & + & 10\cdot X_2 & - & 11000 & = & y_1^+ & - & y_1^- \\ 2\cdot X_1 & + & X_2 & - & 1300 & = & y_2^+ & - & y_2^- \end{array}$$

$X_1 \geq 300$

$X_2 \leq 400$

$y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0$

Pasando a la forma estándar y dándole a M el valor de 10 tenemos:

$Min\ Z = 10\cdot y_1^- + y_2^-$

S.a:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} 15\cdot X_1 & + & 10\cdot X_2 & + & y_1^- & - & y_1^+ & & & & & = & 11.000 \\ 2\cdot X_1 & + & X_2 & & & & & + & y_2^- & - & y_2^+ & = & 1300 \end{array}$$

$300 \leq X_1 \leq \infty$

$0 \leq X_2 \leq 400$ $\qquad y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^- \geq 0$

Resolvemos por el método de variables acotadas:

Inicialmente situamos a X_2 en su cota superior y a X_1 en su cota inferior. En este punto se realiza una asignación contraria a la efectuada en el problema 19.

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} y_1^- \\ y_2^- \end{Bmatrix}$$

$$\overline{X}_{N1} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ y_1^+ \\ y_2^+ \end{Bmatrix}$$

$$\overline{X}_{N2} = \{X_2\}$$

$$\overline{C}_B = (10,1)$$

Valores de las variables básicas:

$$\underset{\sim}{\overline{b}} = \overline{B}^{-1}\overline{b} - \overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_1\cdot\overline{l}_{N_1} - \overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_2\cdot\overline{u}_{N_2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 11.000 \\ 1300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot 400 =$$

$$= \begin{pmatrix} 11.000 \\ 1300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4500 \\ 600 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4000 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 300 \end{pmatrix} \geq \overline{0}$$

(Solución factible, es válida la asignación realizada)

Función objetivo:

$$Z = \overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b} - \left(\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_1 - \overline{C}_{N_1}\right)\cdot\overline{l}_{N_1} - \left(\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{N}_2 - \overline{C}_{N_2}\right)\cdot\overline{u}_{N_2}$$

$$Z = (10,1)\cdot\begin{pmatrix} 11.000 \\ 1300 \end{pmatrix} - \left[(10,1)\cdot\begin{pmatrix} 15 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} - (0,0,0)\right]\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} -$$

$$-\left[(10,1)\cdot\begin{pmatrix} 10 \\ 1 \end{pmatrix} - 0\right]\cdot 400 = 111.300 - (152,-10,-1)\cdot\begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - (101)\cdot 400 =$$

$$= 111.300 - 45.600 - 40.400 = 25.300$$

La primera tabla queda entonces:

	l	u		l		l	
	X_1	**X_2**	**y_1^-**	**y_1^+**	**y_2^-**	**y_2^+**	**LD**
Z	152	101	0	-10	0	-1	25.300
y_1^-	15	10	1	-1	0	0	2500
y_2^-	**2**	1	0	0	1	-1	300

l: cota inferior
u: cota superior

Aplicando el algoritmo de variables acotadas:

$$\alpha_k = Max(152) = 152 = Z_1 - C_1; \quad K = 1; \quad K \in R_1$$

X_1: variable candidata a entrar en la base.

$$\gamma_1 = Min\left(\frac{2500-0}{15}, \frac{300-0}{2}\right) = Min(166'6, 150) = 150$$

y_2^- : candidata a salir de la base.

$$\gamma_2 = \infty$$

$$\gamma_3 = \infty - 300 = \infty$$

Por lo tanto:

$$\Delta_k = Min(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$$
$$\Delta k = \gamma_1 = 150$$

y_2^- sale de la base. Pivoteamos sobre y_{21} y actualizamos aparte la columna de lado derecho:

$$Z = 25.300 - 152 \cdot 150 = 2.500$$

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} y_1^- \\ y_2^- \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2500 \\ 300 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot 150 = \begin{pmatrix} 250 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto y_2^- pasa a su cota inferior.

$$X_k = X_1 = 300 + 150 = 450$$

Tras el pivoteo tenemos:

	u			1	1	1	
	X_1	**X_2**	**y_1^-**	**y_1^+**	**y_2^-**	**y_2^+**	**LD**
Z	0	25	0	-10	-76	75	2500
y_1^-	0	5/2	1	-1	-15/2	**15/2**	250
X_1	1	1/2	0	0	1/2	-1/2	450

Aplicando de nuevo el algoritmo:

$$\alpha_k = Max(75) = 75 = Z_{y_2^+} - C_{y_2^+} \quad ; \quad K \in R_1$$

y_2^+ variable candidata a entrar en la base.

$$\gamma_1 = Min\left(\frac{250-0}{15/2}\right) = 33'3 = \frac{100}{3}$$

y_1^+ candidata a salir de la base.

$$\gamma_2 = Min\left(\frac{\infty - 450}{1/2}\right) = \infty$$

$$\gamma_3 = \infty - 0 = \infty$$

$$\Delta k = \gamma_1 = \frac{100}{3}$$

Por lo tanto y_2^+ entra en la base e y_1^- sale de la base.

Actualización de la columna de lado derecho.

$$Z = 2500 - 75 \cdot \frac{100}{3} = 0$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} y_1^- \\ X_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 250 \\ 450 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 15/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \cdot \frac{100}{3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 466'6 \end{pmatrix}$$

$$X_k = y_2^+ = 0 + \frac{100}{3} = \frac{100}{3} = 33'33$$

Pivoteando tenemos:

		u	1	1	1		
	X_1	**X_2**	**y_1^-**	**y_1^+**	**y_2^-**	**y_2^+**	**LD**
Z	0	0	-10	0	-1	0	0
y_2^+	0	**1/3**	2/15	-2/15	-1	1	100/3
X_1	1	2/3	1/15	-1/15	0	0	466'6

Como $\alpha_k = 0 \rightarrow$ Solución actual óptima con los siguientes valores:

X_1 = 466'6; Se recomiendo producir 4.666 CD's
X_2 = 400; Se recomienda producir 4.000 casetes
Z = 0; Se cumplen todos los objetivos, no existe desviación indeseada

En cuanto al recurso humano se tiene:

$$y_2^+ = \frac{100}{3}$$

$$y_2^- = 0$$

Por lo tanto se utilizan $1300 + \frac{100}{3} = 1333'3$ horas. No se infrautiliza la capacidad productiva de la empresa.

Como: $\begin{array}{l} y_1^+ = 0 \\ y_1^- = 0 \end{array}$ Los beneficios son de 11 millones de pesetas exactamente.

Por los resultados obtenidos se observa que el cambio en la asignación inicial de los valores de las variables no básicas ha dado lugar, en este problema en particular, a la obtención de una solución alternativa con respecto al problema 19 (Z = 0).

Dado que en la tabla óptima aparecen dos variables no básicas con valor nulo en la fila cero, implica que existe además una solución alternativa diferente a la mostrada en el prolema 19.

PROBLEMA 22

Un laboratorio especializado en la venta de medicinas líquidas para ganado puede fabricar tres tipos de productos. El producto A genera unos ingresos de 4.000 pts/litro, siendo los ingresos generados por el producto B de 7.000 pts/litro y de 1.000 pts/litro los del producto C. Los recursos materiales diarios, dedicados estrictamente al proceso de fabricación, de que se disponen, ascienden a 150.000 pts. En este sentido, cada litro del producto A consume 2.000 pts de dichos recursos materiales, siendo 3.000 pts/litro lo que implica en costes el producto B y 1.000 pts/litro el producto C. Se estima que los costes totales diarios, añadiendo costes fijos y posibles fluctuaciones en el personal a contratar, suponen aproximadamente una cantidad de 200.000 pts diarias. Como consecuencia, cualquier esquema productivo que se establezca pasa, necesariamente, por asegurar que al menos se ingresen diariamente 50.000 pts más de lo que suponen los gastos totales del laboratorio.

En el capítulo de personal, el laboratorio cuenta con 6 empleados, contratados a jornada laboral diaria de 8 horas, dedicados a la fabricación propiamente dicha. Su versatilidad es elevada, lo que les permite dedicarse indistintamente a la fabricación de cualquiera de las medicinas. En esta línea, cada litro de producto A necesita 1 hora-hombre (h-h), mientras que el B necesita de 2 h-h, y el C de 1/2 h-h. Se desea, en lo posible, que la fabricación, sea cual fuere la programación de ésta, absorba exactamente la mano de obra disponible.

a) Con los datos ofrecidos, calcular cuál ha de ser el esquema productivo diario del laboratorio.

b) Estudiar qué sucedería si, por una reducción importante en los costes fijos, sólo fuese necesario ingresar diariamente al menos 180.000 pts.

c) Debido a un exceso de oferta en el mercado, el producto B tiene que venderse a un precio inferior, lo que supone que los ingresos por litro se reducen en 1.000 pts. Estudiar cómo afecta este cambio al proceso productivo.

SOLUCIÓN:

a) Llamando:

X_1 = Litros diarios de A producidos.
X_2 = Litros diarios de B producidos.
X_3 = Litros diarios de C producidos.

Se trata de un problema de programación por objetivos con restricciones rígidas y flexibles. Resulta absolutamente imprescindible que los ingresos excedan en, al menos, 50.000 pts los costes diarios, lo que lleva a una restricción del tipo:

$$4\cdot X_1 + 7\cdot X_2 + X_3 \geq 200 + 50$$

Por otra parte, los recursos financieros dedicados exclusivamente a fabricación no deben superar las 150.000 pts. Es decir:

$$2\cdot X_1 + 3\cdot X_2 + X_3 \leq 150$$

Finalmente, se ha de intentar utilizar la mano de obra contratada. Para ello se buscará la minimización de las desviaciones por exceso y defecto.

$$\text{Min } y_1^+ + y_1^-$$

S.a:

$$X_1 + 2\cdot X_2 + ½\cdot X_3 = (6\cdot 8) + y_1^+ - y_1^-$$

En resumen, el problema a resolver para una planificación diaria quedaría:

$$\text{Min } Z = y_1^+ + y_1^-$$

S.a:

$$\begin{array}{lllll} 4\cdot X_1 & +7\cdot X_2 & + & X_3 & \geq 250 \\ 2\cdot X_1 & +3\cdot X_2 & + & X_3 & \leq 150 \\ X_1 & +2\cdot X_2 & + & ½\cdot X_3 & = 48 + y_1^+ - y_1^- \end{array}$$

$$\text{Con } X_1, X_2, X_3, y_1^+, y_1^- \geq 0$$

Expresando el problema en forma estándar es necesario añadir una variable artificial. Para eliminarla de la solución óptima se utilizará el método de penalización.

$$\text{Min } Z = y_1^+ + y_1^- + M\cdot X_6$$

S.a:

$$\left.\begin{array}{llllll} 4\cdot X_1 & +7\cdot X_2 & + X_3 - X_4 & & +X_6 & = 250 \\ 2\cdot X_1 & +3\cdot X_2 & + X_3 & +X_5 & & = 150 \\ X_1 & +2\cdot X_2 & +½\cdot X_3 & -y_1^+ + y_1^- & & = 48 \end{array}\right\}$$

Con $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, y_1^+, y_1^- \geq 0$

X_6 : variable artificial
M = 10

Matriz de restricciones:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

La base queda: $\overline{B} = \left[\overline{a}_6, \quad \overline{a}_5, \quad \overline{a}_{y_1^-}\right]$

Con

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} X_6 \\ X_5 \\ y_1^- \end{Bmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{Bmatrix} 250 \\ 150 \\ 48 \end{Bmatrix}$$

Cálculo de los valores: $Z_j - C_j = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_j - c_j$ para la fila cero.

$$Z_1 - C_1 = (10, \quad 0, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 41$$

$$Z_2 - C_2 = (10, \quad 0, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - 0 = 72$$

$$Z_3 - C_3 = (10, \quad 0, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - 0 = 21\frac{1}{2}$$

$$Z_4 - C_4 = (10, \quad 0, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 0 = -10$$

$$Z_{y_1^+} - C_{y_1^+} = (10, \quad 0, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - 1 = -2$$

Función objetivo:

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (10, \quad 0, \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 250 \\ 150 \\ 48 \end{pmatrix} = 2.548$$

La primera tabla quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	y_1^+	y_1^-	LD
Z	41	72	21/2	-10	0	0	-2	0	2.548
X_6	4	7	1	-1	0	1	0	0	250
X_5	2	3	1	0	1	0	0	0	150
y_1^-	1	**2**	1/2	0	0	0	-1	1	48

Iterando:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	y_1^+	y_1^-	LD
Z	5	0	-7'5	-10	0	0	34	-36	820
X_6	0'5	0	-0'75	-1	0	1	**3'5**	-3'5	82
X_5	0'5	0	0'25	0	1	0	1'5	-1'5	78
X_2	0'5	1	0'25	0	0	0	-0'5	0'5	24

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	y_1^+	y_1^-	LD
Z	0'14	0	-0'21	-0'29	0	-9'71	0	-2	23'43
y_1^+	0'14	0	-0'21	-0'29	0	0'29	1	-1	23'42
X_5	0'29	0	0'57	0'43	1	-0'43	0	0	42'86
X_2	**0'57**	1	0'14	-0'14	0	0'14	0	0	35'71

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	y_1^+	y_1^-	LD
Z	0	-0'25	-0'25	-0'25	0	-9'75	0	-2	14'5
y_1^+	0	-0'25	-0'25	-0'25	0	0'25	1	-1	14'5
X_5	0	-0'50	0'5	0'5	1	-0'5	0	0	25
X_1	1	1'75	0'25	-0'25	0	0'25	0	0	62'5

Solución óptima:

X_1 = 62'5 litros diarios de A
X_2 = 0 litros diarios de B
X_3 = 0 litros diarios de C

y_1^+ = **14'5** horas de exceso sobre la 48 horas de que se dispone inicialmente. Para cumplir con el objetivo de ingresar al menos 250.000 pts diarias es necesario contratar 2 personas más. (8 horas x 2 personas = 16 h - h > 14'5 h - h necesarias.)

X_5 = 25.000 pts de recursos materiales para fabricación sobran, con lo que podría ser utilizada esa cantidad para la contratación de la mano de obra necesaria. Otra alternativa sería considerar que los costes totales disminuyen en 200.000-25.000 = 175.000 pts. Por tanto, habría que replantear el problema con la 1ª restricción de la forma 175.000 + 50.000 = 225.000 o, mejor aún, un análisis de sensibilidad con $b'_1 = 225$.

b)

$b_1 = 250$; → $b_1' = 180$

Como $\underline{b}' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}'$, siendo $\overline{b}' = \begin{pmatrix} 180 \\ 150 \\ 48 \end{pmatrix}$

quedaría: $$\underline{b}' = \begin{bmatrix} 0'25 & 0 & -1 \\ -0'5 & 1 & 0 \\ 0'25 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 180 \\ 150 \\ 48 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 60 \\ 45 \end{pmatrix}$$

b) Nos encontramos ante un análisis de sensibilidad del vector de lado derecho.

Vemos que en la nueva columna de lado derecho aparece un valor negativo, con lo que se rompe la factibilidad primal. Es necesario, aprovechando que el problema es óptimo primal, aplicar el método Simplex Dual.

La nueva función objetivo tiene como valor:

$$Z' = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}' = \overline{C}_B \cdot \underline{b}' = (1, \quad 0, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 60 \\ 45 \end{pmatrix} = -3$$

Es decir, sustituyendo en la tabla anterior los nuevos valores para la columna de lado derecho.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	y_1^+	y_1^-	**LD**
Z	0	-0'25	-0'25	-0'25	0	-9'75	0	-2	-3
y_1^+	0	**-0'25**	-0'25	-0'25	0	0'25	1	-1	-3
X_5	0	-0'50	0'5	0'5	1	-0'5	0	0	60
X_1	1	1'75	0'25	-0'25	0	0'25	0	0	45

Aplicando el algoritmo Simplex Dual:

$$\frac{Z_K - C_K}{y_{rk}} = \underset{\forall j \in \Re}{Min}\left[\frac{Z_j - C_j}{y_{rj}} : y_{rj} < 0\right]$$

$$Min\left[\frac{-0'25}{-0'25}, \frac{-0'24}{-0'24}, \frac{-0'25}{-0'25}, \frac{-2}{-1}\right] = 1 = \frac{Z_2 - C_2}{y_{12}} \quad \begin{cases} X_2 \text{ entra en la base} \\ y_{12} \text{ : pivote} \end{cases}$$

Tras el pivoteo queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	y_1^+	y_1^-	**LD**
Z	0	0	0	0	0	-10	-1	-1	0
X_2	0	1	0'96	1	0	-1	-4	4	12
X_5	0	0	0'99	1	1	-1	-2	2	66
X_1	1	0	-1'43	-2	0	2	7	-7	24

El nuevo sistema productivo diario sería:

X_1 = 24 litros de A
X_2 = 12 litros de B
X_3 = 0 litros de C

Sobran 66.000 pts de recursos materiales.

Se observa que se cumplen todas las restricciones totalmente, ya que
$y_1^+ = 0 \Rightarrow Z = 0$

c) Se trata de un cambio en un coeficiente tecnológico. Es necesario estudiar qué sucede al valor $Z_j - C_j$ correspondiente.

$$\overline{a}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ Pasa a ser: } \overline{a}_2' = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

El nuevo valor $Z_2' = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_2' = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0'25 & 0 & -1 \\ -0'5 & 1 & 0 \\ 0'25 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -0'5$

Por lo que: $\left(Z_2 - C_2\right)' = Z_2' - C_2 = -0'5 - 0 = -0'5$

El nuevo vector $\overline{y}_2'$ queda:

$$\overline{y}_2' = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_2' = \begin{pmatrix} 0'25 & 0 & -1 \\ -0'5 & 1 & 0 \\ 0'25 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0'5 \\ 0 \\ 1'5 \end{pmatrix}$$

Como $(Z_2 - C_2)'$ sigue siendo negativo, la solución óptima se mantiene y no es necesario realizar ajustes en la fabricación.

PROBLEMA 23

La empresa minera LPN extrae tres tipos de minerales A, B y C en una serie de minas que se encuentran situadas en un área geográfica relativamente pequeña que permite la fácil redistribución de sus recursos entre las diferentes explotaciones. En las condiciones actuales, cada tonelada de mineral extraído consume los recursos indicados en la tabla, mostrándose también las disponibilidades máximas de cada tipo de recurso.

	A	B	C	Disponibilidades máximas
R. materiales	5	3	6	300
R. humanos	2	1	8	200
R. financieros	1	1	1	110

Estas condiciones, junto con las del mercado internacional de venta de minerales, permiten que los precios a los que la empresa vende cada tonelada de mineral extraído sean de 3 u.m. para el mineral A, 2 u.m. para el mineral B y 4 u.m. para el mineral C.

El anuncio, sin confirmar, por parte de una multinacional minera respecto al descubrimiento de un filón del mineral C, ha creado amplias expectativas en los consumidores de este mineral, ya que el supuesto filón se encuentra más cercano a los lugares de destino que las minas propiedad de la empresa considerada (LPN). Estas expectativas proceden de que, si se confirma la existencia de la nueva mina, los precios de venta del mineral C bajarían considerablemente, mientras que si, por el contrario, el anuncio es falso, implicaría que la empresa LPN podría aumentar los precios de venta, ya que se revalorizaría la producción de dicho mineral.

Ante esta situación, los 14 consejeros de administración de la empresa LPN se reúnen para estudiar cómo se debe planificar la producción en función de los posibles precios a los que se pueda vender el mineral C, en el caso tanto de que se produzca una caída indefinida de precios de venta como si, por el contrario, se produce una subida, también indefinida, de los precios a los que la empresa puede vender cada tonelada del mineral C.

Con la información proporcionada, estudiar cuáles serían los resultados de esta planificación.

SOLUCIÓN:

El problema plantea la planificación de un proceso productivo en función de las variaciones que los precios de venta ejercen sobre el mineral C. Para realizar esta planificación es necesario primero considerar cuál es el nivel óptimo de producción en condiciones normales para después hacer un análisis paramétrico sobre la base del vector de costes.

Llamando :

X_1: Tm extraídas del mineral A.
X_2: Tm extraídas del mineral B.
X_3: Tm extraídas del mineral C.

Max $Z = 3 \cdot X_1 + 2 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3$

S.a.

$$\begin{array}{cccl} 5 \cdot X_1 & +3 \cdot X_2 & +6 \cdot X_3 & \leq 300 \\ 2 \cdot X_1 & + X_2 & +8 \cdot X_3 & \leq 200 \\ X_1 & + X_2 & + X_3 & \leq 110 \end{array} \qquad X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Transformando en la forma de Minimización equivalente y añadiendo variables de holgura.

- Min $Z = -3 \cdot X_1 - 2 \cdot X_2 - 4 \cdot X_3$

S.a.

$$\begin{array}{cccccccl} 5 \cdot X_1 & +3 \cdot X_2 & +6 \cdot X_3 & +X_4 & & & = 300 \\ 2 \cdot X_1 & + X_2 & +3 \cdot X_3 & & + X_5 & & = 200 \\ X_1 & + X_2 & + X_3 & & & + X_6 & = 110 \end{array} \qquad X_j \ (j = 1, \ldots 6) \geq 0$$

Aplicamos el algoritmo Simplex estándar.

$$\overline{X}_B = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 110 \end{pmatrix}; \quad \overline{C}_B = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}$$

Los valores de la fila cero para la primera tabla Simplex son:

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 0$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = 3$$

$$Z_2 - C_2 = 2$$

$$Z_3 - C_3 = 4$$

La primera tabla quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	3	2	4	0	0	0	0
X_4	5	3	6	1	0	0	300
X_5	2	1	**8**	0	1	0	200
X_6	1	1	1	0	0	1	110

Aplicando el algoritmo Simplex e iterando:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	2	1'5	0	0	-0'5	0	-100
X_4	**3'5**	2'25	0	1	-0'75	0	150
X_3	0'25	0'125	1	0	0'125	0	25
X_6	0'75	0'875	0	0	-0'125	1	85

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	0'214	0	-0'571	-0'071	0	-185'71
X_1	1	**0'643**	0	0'286	-0'214	0	42'86
X_3	0	-0'036	1	-0'071	0'179	0	14'29
X_6	0	0'393	0	-0'214	-0'036	1	52'86

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-0'33	0	0	0'667	0	0	-200
X_2	1'556	1	0	0'444	-0'333	0	66'67
X_3	0'056	0	1	-0'056	0'167	0	16'67
X_6	-0'611	0	0	-0'389	0'167	1	26'67

Solución óptima. Existe una solución alternativa si entra X_5 en la base, ya que $Z_5 - C_5 = 0$ [1].

$X_1 = 0$ Tm de mineral A **$X_4 = 0$ (Se utilizan todos los R. materiales)**
$X_2 = 66'67$ Tm de mineral B **$X_5 = 0$ (Se utilizan todos los R. humanos)**
$X_3 = 16'67$ Tm de mineral C **$X_6 = 26'67$ (Sobran R. financieros)**
Z = 200 u.m. de ingresos para la empresa

Las variables duales son:

$$Z_4 - C_4 = (w_1, \quad w_2, \quad w_3) \cdot \bar{a}_4 - C_4 \;\; ; \;\; \omega_1 = 0'667 \frac{\text{u.m.}}{\text{ud. R. materiales}}$$

$$Z_5 - C_5 = (w_1, \quad w_2, \quad w_3) \cdot \bar{a}_5 - C_5 \;\; ; \;\; \omega_2 = 0 \frac{\text{u.m.}}{\text{ud. R. humanos}}$$

$$Z_6 - C_6 = (w_1, \quad w_2, \quad w_3) \cdot \bar{a}_6 - C_6 \;\; ; \;\; \omega_3 = 0 \frac{\text{u.m.}}{\text{ud. R. financieros}}$$

Se aprecia que son los recursos materiales los que provocan la saturación de la producción. Los recursos humanos, aunque no sobran, al ser $\omega_2 = 0$ implica que se podrían reasignar más eficientemente (véase solución alternativa en pie de página).

La planificación corresponde a un análisis paramétrico para $-\infty \leq \lambda \leq \infty$ con una perturbación:

$\bar{c}' = (0, \quad 0, \quad -1)$ Para un incremento de ingresos $(\lambda \geq 0)$. (Dado que la función objetivo tiene coeficientes negativos).

$\bar{c}' = (0, \quad 0, \quad 1)$ Para un decremento de ingresos $(\lambda \leq 0)$. (Como λ tiene que ser positiva se cambia el signo al vector).

$\bar{c} \rightarrow \bar{c} + \lambda \cdot \bar{c}'$. Para $\lambda = 0$ estamos en la tabla actual.

1 La solución óptima alternativa que se obtiene es la siguiente:
$X_1 = 0$ Tm de mineral A
$X_2 = 100$ Tm de mineral B
$X_3 = 0$ Tm de mineral C
Ingresos Z=200 u.m. Sobran 100 uds. de Recursos humanos y 10 uds. de Recursos financieros.

Comenzamos el estudio para una caída de precios. Para $\lambda \leq 0$ la perturbación tendría la forma:

$$\bar{c} + \lambda \cdot \bar{c}' = (-3, \quad -2, \quad -4) + \lambda \cdot (0, \quad 0, \quad 1)$$

$$(Z_j - C_j)' = (Z_j - C_j) + \lambda \cdot (Z'_j - C'_j) = (Z_j - C_j) + \lambda \cdot \left(\overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \bar{a}_j - C'_j\right) =$$
$$= (Z_j - C_j) + \lambda\left(\overline{C}'_B \bar{y}_j - C'_j\right)$$

Sustituyendo:

$$(Z_1 - C_1)' = -0'33 + \lambda \cdot \left[(0, \quad 1, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1'556 \\ 0'056 \\ -0'611 \end{pmatrix} - 0\right] = -0'33 + \lambda \cdot 0'056$$

$$(Z_4 - C_4)' = -0'667 + \lambda \cdot \left[(0, \quad 1, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0'444 \\ -0'056 \\ -0'389 \end{pmatrix} - 0\right] = -0'667 - \lambda \cdot 0'056$$

$$(Z_5 - C_5)' = 0 + \lambda \cdot \left[(0, \quad 1, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -0'333 \\ 0'167 \\ 0'167 \end{pmatrix} - 0\right] = \lambda \cdot 0'167$$

Donde $\overline{C}'_B = (0, \quad 1, \quad 0)$

El conjunto **S** queda: $S = \{1, \; 5\}$; $S = \{ j: (Z'_j - C'_j) > 0 \}$

$$\hat{\lambda} = \underset{i \in S}{Mín}\left(\frac{-(Z_j - C_j)}{Z'_j - C'_j}\right) = Mín\left(\frac{0'33}{0'056}, \; \frac{0}{0'167}\right) = 0$$

Para $\lambda = 0$, existe una solución alternativa, cosa que ya se sabía a raíz de la última tabla.

Por tanto, como se observa a continuación en la función objetivo parametrizada, para un descenso en los ingresos unitarios en la extracción de mineral C resulta más interesante en estas circunstancias dejar de extraer el mineral C y dedicar los recursos a obtener únicamente el mineral B, con lo que los ingresos se mantendrán en las 200 u.m.

$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \bar{b} + \lambda \cdot \overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \bar{b} = -200 + \lambda \cdot \left((0, \quad 1, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 66'67 \\ 16'67 \\ 26'67 \end{pmatrix}\right) = -200 + 16'67 \cdot \lambda$$

Como el precio unitario inicial por tonelada de C es de 4 u.m. la función objetivo anterior representa la disminución de los ingresos totales a medida que λ pasa de 0 a 4. El valor $\lambda = 4$ representa que el ingreso unitario para el mineral C ha descendido hasta su nivel mínimo, esto es, hasta cero.

En este caso los ingresos serían:

Z ($\lambda = 4$) = 133'32 (Expresión positiva dado que los coeficientes de coste iniciales se expresaron de forma negativa)

que, obviamente, es menor que 200, lo que justifica que no interese seguir extrayendo C si se produce un descenso en los precios de venta, por pequeño que sea éste.

A continuación se procede a realizar el estudio para un crecimiento indefinido de los precios. Intervalo para $\lambda \geq 0$.

En este caso $\overline{C}' = (0, 0, -1)$, ya que el problema se ha expresado como uno de minimización con coeficientes de coste negativos.

$$\overline{c} + \lambda \cdot \overline{c}' = (-3, \quad -2, \quad -4) + \lambda \cdot (0, \quad 0, \quad -1)$$

$$Z'_1 - C'_1 = \overline{C}'_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C'_1 = \overline{C}'_B \cdot \overline{y}_1 - C'_1 = (0, \quad -1, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 1'556 \\ 0'056 \\ -0'611 \end{pmatrix} - 0 = -0'056$$

$$Z'_4 - C'_4 = (0, \quad -1, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 0'444 \\ -0'056 \\ -0'0389 \end{pmatrix} - 0 = 0'056$$

$$Z'_5 - C'_5 = (0, \quad -1, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -0'333 \\ 0'167 \\ 0'167 \end{pmatrix} - 0 = -0'167$$

Por tanto, $S = \{4\}$; $S = \{ j: (Z'_j - C'_j) > 0 \}$

$$\hat{\lambda} = Mín \left\{ \frac{-(Z_4 - C_4)}{Z'_4 - C'_4} \right\} = \frac{0'667}{0'056} = 11'91$$

$\forall \lambda \in [0, \quad \lambda_1]$ con $\lambda_1 = 11'91$ el sistema actual es el óptimo. Mientras los precios del mineral C se encuentren en el margen [4, 4+11'91] hay que seguir produciendo de la forma actual. Los valores parametrizados son los siguientes:

$$Z(\lambda)=-200+\lambda\cdot(0, \quad -1, \quad 0)\cdot\begin{pmatrix}66'67\\16'67\\26'67\end{pmatrix}=-200-16'67\bullet\lambda$$

$$(Z_1-C_1)'(\lambda)=-0'33-\lambda\cdot 0'056$$

Evolución del crecimiento de ingresos.

$$(Z_4-C_4)'\ (\lambda)=-0'667+\lambda\cdot 0'056$$

$$(Z_5-C_5)'\ (\lambda)=0-\lambda\cdot 0'167$$

Para λ = 11'91 la nueva tabla sería:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-1	0	0	0	-2	0	-398'5
X_2	1'556	1	0	**0'444**	-0'333	0	66'67
X_3	0'056	0	1	-0'056	0'167	0	16'67
X_6	-0'611	0	0	-0'389	0'167	1	26'67

A continuación se aplica el Método Simplex Primal sobre X_4 (Pivoteamos sobre y_{14}).

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-1	0	0	0	-2	0	-398'5
X_4	3'5	2'25	0	1	-0'75	0	150'16
X_3	0'25	0'13	1	0	0'125	0	25'08
X_6	0'75	0'88	0	0	-0'125	1	85'08

A continuación se calculan nuevamente los valores:

$$Z'_1-C'_1=\overline{C}'_B\cdot\overline{y}_1-C'_1=(0, \quad -1, \quad 0)\cdot\begin{pmatrix}3'5\\0'25\\0'75\end{pmatrix}-0=-0'25<0$$

$$Z'_2-C'_2=(0, \quad -1, \quad 0)\cdot\begin{pmatrix}2'25\\0'13\\0'84\end{pmatrix}-0=-0'13<0$$

$$Z'_5 - C'_5 = \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -0'75 \\ 0'125 \\ -0'125 \end{pmatrix} - 0 = -0'125 < 0$$

Como S = {0} implica que la solución actual es óptima para cualquier valor de λ ≥11'91

$$\forall\ \lambda \in [11'91, \quad \infty] \Rightarrow \text{Sol. actual óptima.}$$

Es lógico este resultado, porque con mayores precios de venta para el mineral C todos los recursos se destinan a su extracción.

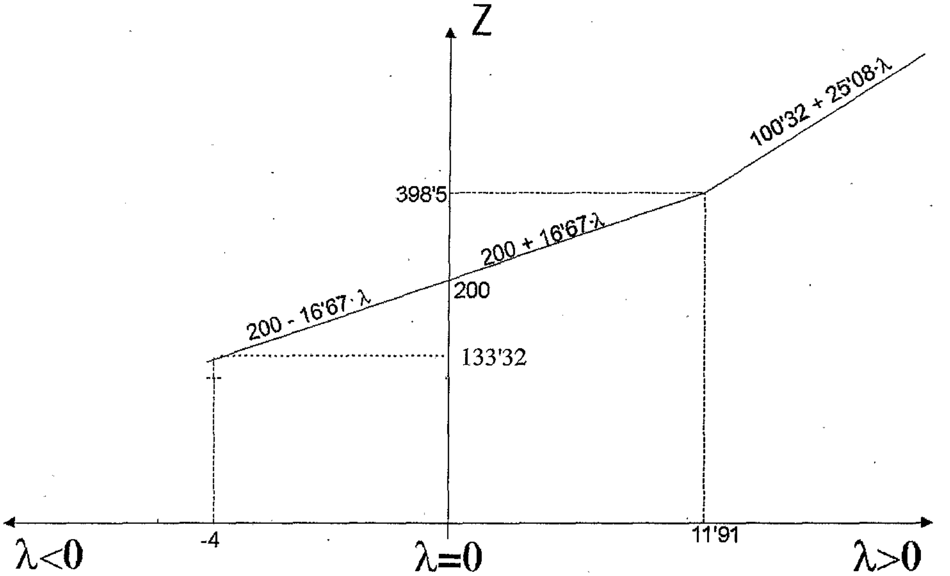
La función objetivo para este intervalo [11'91,∞] queda:

$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} + \lambda \cdot \overline{C'}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}$$

$$Z(\lambda) = \begin{pmatrix} 0, & -4, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150'116 \\ 25'08 \\ 85'08 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0, & -1, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 150'116 \\ 15'08 \\ 85'08 \end{pmatrix}$$

$$Z(\lambda) = -100'32 - \lambda \cdot 25'08$$

La representación gráfica de los beneficios sería (una vez deshechos los cambios en los coeficientes de coste y expresando éstos de forma positiva):



PROBLEMA 24

Una empresa dedicada a la fabricación y venta de electrodomésticos centra su actividad en tres productos A, B y C. El producto A ofrece unos beneficios de 30.000 pts por cada unidad fabricada. El B significa 45.000 pts de beneficios unitarios, y cada producto C aporta 7.500 pts de beneficios. Para realizar la producción semanal se cuenta con los recursos totales que se muestran en la siguiente tabla, junto con los requerimientos que se precisan por cada unidad producida.

	A	B	C	Total Recursos
Horas-hombre	8	6	4	80
Uds. de materia prima	3	3	1	30
Uds. de recursos financieros	6	1	1	45

Con estos datos:

a) Plantear y resolver un problema mediante el que se pueda establecer cuál habría de ser la programación en la fabricación de los tres productos para satisfacer los siguientes objetivos por orden de importancia: 1° que los beneficios no sean inferiores a las 700.000 pts semanales; 2° que la mano de obra se aproveche en su totalidad; y 3°, que se utilice como máximo las unidades de recursos financieros disponibles.

b) Con la contratación de un nuevo jefe de producción y ventas procedente de los Estados Unidos, en donde ocupó un cargo similar durante bastante tiempo se va a proceder a un cambio en los planteamientos productivos. Dicho cambio se debe a que el nuevo jefe justifica que se van a modificar los hábitos de compra de electrodomésticos por parte del mercado. En este sentido, asegura que las ventas del producto A se van a disparar, mientras que las del producto B van a reducirse, lo que significará importantes variaciones en los beneficios unitarios debido a cambios en los precios. Se estima que la relación de incremento/pérdidas en los beneficios para ambos productos se va a situar en 6/4.5 de forma indiscriminada. Es decir, mientras los beneficios unitarios del producto A van a crecer indeterminadamente en proporción a 6.000 pts, los del producto B decrecerán simultáneamente en proporción a 4.500 pts sin que se conozcan los límites de esta variabilidad. El nuevo jefe desecha los patrones de fabricación basados en el esquema de objetivos planteados en el apartado a) y establece uno nuevo en el que el único objetivo reside en la obtención de máximos beneficios utilizando los recursos disponibles. Con estos datos, establecer cómo se programará la producción en función de las posibles variaciones en los beneficios unitarios que se han mencionado.

SOLUCIÓN:

a) En este primer apartado se pide plantear un problema de programación por objetivos, en los que éstos tienen un orden de preferencia. Sólo existe una restricción no flexible. Las demás sí lo son:

Llamando: X_1: nº de electrodomésticos del tipo A fabricados.
X_2: nº de electrodomésticos del tipo B fabricados.
X_3: nº de electrodomésticos del tipo C fabricados.

Se aplicará inicialmente el método Simplex sin entrar previamente en consideraciones sobre la naturaleza entera de las variables utilizadas.

$$\text{Min} \quad Z = M \cdot y_1^- + N \cdot y_2^+ + N \cdot y_2^- + y_3^+$$

S.a.

$$\text{Restricciones flexibles} \begin{cases} 30 \cdot X_1 & +45 \cdot X_2 & +7'5 \cdot X_3 & -700 & = y_1^+ - y_1^- \\ 8 \cdot X_1 & + 6 \cdot X_2 & + 4 \cdot X_3 & - 80 & = y_2^+ - y_2^- \\ 6 \cdot X_1 & + \quad X_2 & + \quad X_3 & - 45 & = y_3^+ - y_3^- \end{cases}$$

$$\text{Restricción no-flexible} \{ \quad 3 \cdot X_1 \quad + 3 \cdot X_2 \quad + \quad X_3 \qquad \leq \quad 30$$

$$X_1, X_2, X_3, y_1^+, y_1^-, y_2^+, y_2^-, y_3^+, y_3^- \geq 0$$

Para mostrar las distintas importancias de los objetivos se le asignarán distintos valores a los coeficientes M y N.

$$\text{Por ejemplo,} \begin{cases} M = 10 \\ N = 5 \end{cases}$$

El planteamiento del problema queda por tanto de la forma:

$$\text{Min} \quad Z = 10 \cdot y_1^- + 5 \cdot y_2^+ + 5 \cdot y_2^- + y_3^+$$

S.a.:

$$\begin{array}{llllllll}
30\,x_1 & +45\,x_2 & +7'5\,x_3 & & +y_1^- - y_1^+ & & & = 700 \\
8\,x_1 & +6\,x_2 & +4\,x_3 & & & +y_2^- - y_2^+ & & = 80 \\
6\,x_1 & +\,x_2 & +\,x_3 & & & & +y_3^- - y_3^+ & = 45 \\
3\,x_1 & +3\,x_2 & +\,x_3 & +x_4 & & & & = 30
\end{array}$$

Con: x_j (j=1...4) ≥ 0
y^+_i (i=1...3) ≥ 0
y^-_i (i=1...3) ≥ 0

La base inicial se hace coincidir con la matriz identidad. La matriz de restricciones es:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 30 & 45 & 7'5 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 6 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\bar{a}_{x_1} \quad \bar{a}_{x_2} \quad \bar{a}_{x_3} \quad \bar{a}_{x_4} \quad \bar{a}_{y_1^-} \quad \bar{a}_{y_1^+} \quad \bar{a}_{y_2^-} \quad \bar{a}_{y_2^+} \quad \bar{a}_{y_3^-} \quad \bar{a}_{y_3^+}$$

$$\bar{B} \equiv \bar{I} = \left[\bar{a}_{y_1^-}, \quad \bar{a}_{y_2^-}, \quad \bar{a}_{y_3^-}, \quad \bar{a}_{x_4}\right]$$

Las variables básicas serán por tanto:

$$\bar{X}_B = \begin{pmatrix} y_1^- \\ y_2^- \\ y_3^- \\ x_4 \end{pmatrix} = \bar{B}^{-1} \cdot \bar{b} = \begin{pmatrix} 700 \\ 80 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix} ; \ \bar{C}_B = \begin{pmatrix} C_{y_1^-} & C_{y_2^-} & C_{y_3^-} & C_{x_4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Variables no básicas.

$$\bar{X}_N = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ y_1^+ \\ y_2^+ \\ y_3^+ \end{pmatrix} = \bar{0}$$

Valores de la fila cero para la 1ª Tabla Simplex:

$$Z_{x_1} - C_{x_1} = \bar{C}_B \bar{B}^{-1} \bar{a}_{x_1} - C_{x_1} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 8 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} - 0 = 340$$

$$Z_{x_2} - C_{x_2} = 480$$
$$Z_{x_3} - C_{x_3} = 95$$

$$Z_{y_1^+} - C_{y_1^+} = -10$$
$$Z_{y_2^+} - C_{y_2^+} = -10$$
$$Z_{y_3^+} - C_{y_3^+} = -1$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} 10 & 5 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 700 \\ 80 \\ 45 \\ 30 \end{pmatrix} = 7400$$

La primera tabla quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	y_1^-	y_1^+	y_2^-	y_2^+	y_3^-	y_3^+	LD
Z	340	480	95	0	0	-10	0	-10	0	-1	7400
y_1^-	30	45	7’5	0	1	-1	0	0	0	0	700
y_2^-	8	6	4	0	0	0	1	-1	0	0	80
y_3^-	6	1	1	0	0	0	0	0	1	-1	45
X_4	3	**3**	1	1	0	0	0	0	0	0	30

Tras una iteración, la solución a este problema queda:

$X_1 = 0$ tipo A **$y_1^- = 250$ No se cumple el primer objetivo.**
$X_2 = 10$ tipo B **$y_2^- = 20$ (sobran 20 h-hombre) No se cumple el segundo objetivo.**
$X_3 = 0$ tipo C **$y_3^+ = 0$ Se cumple el tercer objetivo.**

El cuello de botella viene dado por las limitaciones en la materia prima.

b) El nuevo patrón de objetivos plantea la obtención del máximo de beneficios posibles.

El esquema productivo ahora obedecerá a la siguiente formulación:

Max $Z = 30 \cdot X_1 + 45 \cdot X_2 + 7'5 \cdot X_3$

S.a.

$$\begin{aligned} 8 \cdot X_1 + 6 \cdot X_2 + 4 \cdot X_3 &\leq 80 \\ 3 \cdot X_1 + 3 \cdot X_2 + X_3 &\leq 30 \\ 6 \cdot X_1 + X_2 + X_3 &\leq 45 \end{aligned}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

Expresando el problema en forma estándar de minimización:

$$-\text{Min } Z = -30 \cdot X_1 - 45 \cdot X_2 - 7'5 \cdot X_3$$

S.a.

$$\left.\begin{array}{llllllll} 8\cdot X_1 & +6\cdot X_2 & +4\cdot X_3 & + & X_4 & & & =80 \\ 3\cdot X_1 & +3\cdot X_2 & + & X_3 & & + & X_5 & =30 \\ 6\cdot X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & + \; X_6 & =45 \end{array}\right\}$$

$$X_j(j=1,\ldots 6) \geq 0$$

Aplicando el método Simplex,

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \; ; \; \overline{B} = [\overline{a}_4, \; \overline{a}_5, \; \overline{a}_6] ; \; \overline{N} = [\overline{a}_1, \; \overline{a}_2, \; \overline{a}_3]$$

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} 80 \\ 30 \\ 45 \end{pmatrix}$$

Los valores de la fila cero para la primera tabla son:

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = 30$$

$$Z_2 - C_2 = 45$$

$$Z_3 - C_3 = 7'5$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 0$$

La primera tabla, por tanto, quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	30	45	7'5	0	0	0	0
X_4	8	6	4	1	0	0	80
X_5	3	**3**	1	0	1	0	30
X_6	6	1	1	0	0	1	45

$Z_K - C_K = Z_2 - C_2$; K = 2 ; X_2 entra en la base; y_{22} es el elemento pivote.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-15	0	-15/2	0	-15	0	-450
X_4	2	0	2	1	-2	0	20
X_2	1	1	1/3	0	1/3	0	10
X_6	5	0	2/3	0	-1/3	1	35

Esta solución es óptima con:

X_1 = 0 unidades de A
X_2 = 10 unidades de B **Z = 450.000 pts. de beneficios**
X_3 = 0 unidades de C.

Este resultado coincide con el hallado en el apartado a), dado que la limitación en materia prima determina el comportamiento del problema.

El enunciado plantea que se va a producir una variación en los beneficios unitarios. El vector de costes inicial era C = (30.000, 45.000, 7.500) expresado en pesetas.

La variación en el vector de costes tendrá la siguiente forma:

$$\overline{C}(\lambda) = (30.000 + 6.000 \cdot \lambda, \quad 45.000 - 4.500 \cdot \lambda, \quad 7.500) \quad \text{donde } \lambda \geq 0$$

Expresando C(λ) en unidades de millar y con coeficientes negativos (formato de minimización)

$$\overline{C}(\lambda) = (-30 - 6 \cdot \lambda, \quad -45 + 4'5 \cdot \lambda, \quad -7'5)$$

Se trata de realizar un análisis paramétrico con perturbación en el vector de costes.

$$\overline{C} = (-30, \quad -45, \quad -7'5)$$

$$\overline{C}' = (-6, \quad 4'5, \quad 0)$$

Se calcula:

$$Z_1' - C_1' = \overline{C}_B' \cdot \overline{y}_1 - C_1' = (0, \quad 4'5, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - (-6) = 10'5$$

$$Z_3' - C_3' = \overline{C}_B' \cdot \overline{y}_3 - C_3' = (0, \quad 4'5, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - 0 = 3/2$$

$$Z_5' - C_5' = \overline{C}_B' \cdot \overline{y}_5 - C_5' = (0, \quad 4'5, \quad 0) \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} - 0 = 3/2$$

El conjunto S queda:

$S = \{1, \quad 3, \quad 5\}$; $S = \{ j: (Z'_j - C'_j) > 0 \}$; $\hat{\lambda} = \underset{j \in S}{Min} \left(\dfrac{-(Z_j - C_j)}{Z_j' - C_j'} \right)$

$$\hat{\lambda} = Min \left(\frac{-(-15)}{10'5}, \quad \frac{-(-7'5)}{3/2}, \quad \frac{-(-15)}{3/2} \right) = \frac{30}{21} = \frac{-(Z_1 - C_1)}{Z_1' - C_1'}$$

Es decir, $\forall\, \lambda \in \left[0, \quad \dfrac{30}{21}\right]$, la solución actual es óptima.

$$(Z_1 - C_1) + \lambda (Z_1' - C_1') = -15 + \lambda \frac{21}{2}$$

$$(Z_3 - C_3) + \lambda (Z_3' - C_3') = -\frac{15}{2} + \lambda \frac{3}{2}$$

$$(Z_5 - C_5) + \lambda (Z_5' - C_5') = -15 + \lambda \frac{3}{2}$$

$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \underline{\overline{b}} + \lambda \cdot \overline{C}_B' \cdot \underline{\overline{b}} = -450 + \lambda\,(0, \quad 4'5, \quad 0) \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 35 \end{pmatrix} = -450 + \lambda \cdot 45$$

Para λ = 30/21 la tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	0	-75/14	0	-180/14	0	-8100/21
X_4	2	0	2	1	-2	0	20
X_2	1	1	1/3	0	1/3	0	10
X_6	**5**	0	2/3	0	-1/3	1	35

Iterando, X_1 entra en la base y sale en su lugar X_6, aplicando el método Simplex.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	0	-75/14	0	-180/14	0	-8100/21
X_4	0	0	26/15	1	-28/15	-2/5	6
X_2	0	1	1/5	0	2/5	-1/5	3
X_1	1	0	2/15	0	-1/15	1/5	7

Los elementos de la fila cero correspondientes a las variables no básicas se pueden representar en los siguientes términos:

$$\begin{cases} Z_3 - C_3 = \overline{C}_B \cdot \overline{y}_3 - C_3 = (0, \quad -45, \quad -30) \cdot \begin{pmatrix} 26/15 \\ 1/5 \\ 2/15 \end{pmatrix} - (-7'5) = -5'5 \\ Z_3' - C_3' = \overline{C}_B' \cdot \overline{y}_3 - C_3' = (0, \quad 4'5, \quad -6) \cdot \begin{pmatrix} 26/15 \\ 1/5 \\ 2/15 \end{pmatrix} - 0 = 0'1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_5 - C_5 = (0, \quad -45, \quad -30) \cdot \begin{pmatrix} -28/15 \\ 2/5 \\ -1/15 \end{pmatrix} - 0 = -16 \\ Z_5' - C_5' = (0, \quad 4'5, \quad -6) \cdot \begin{pmatrix} -28/15 \\ 2/5 \\ -1/15 \end{pmatrix} - 0 = 2'2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z_6 - C_6 = (0, \quad -45, \quad -30) \cdot \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} - 0 = 3 \\ Z_6' - C_6' = (0, \quad 4'5, \quad -6) \cdot \begin{pmatrix} -2/5 \\ -1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} - 0 = -2'1 < 0 \end{cases}$$

El conjunto S y el intervalo de variabilidad de λ son, por tanto:

$$S=\{3,\quad 5\}\ ;\quad \hat{\lambda}=Min\left\{\frac{5'5}{0'1},\quad \frac{16}{2'2}\right\}=7'27=\frac{-(Z_5-C_5)}{Z_5^{'}-C_5^{'}}$$

$\forall\ \lambda\in[1'43,\quad 7'27]$ La solución actual es óptima.

Los nuevos valores parametrizados de la fila cero resultan:

$$(Z_3-C_3)+\lambda(Z_3^{'}-C_3^{'})=-5'5+\lambda\cdot 0'1$$

$$(Z_5-C_5)+\lambda(Z_5^{'}-C_5^{'})=-16+\lambda\cdot 2'2$$

$$(Z_6-C_6)+\lambda(Z_6^{'}-C_6^{'})=3-\lambda\cdot 2'1$$

$$Z(\lambda)=\overline{C}_B\cdot\underline{b}+\lambda\cdot\overline{C}_B^{'}\cdot\underline{b}=(0,\quad -45,\quad -30)\begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}+\lambda\ (0,\quad 4'5,\quad -6)\begin{pmatrix}6\\3\\7\end{pmatrix}=-345-\lambda\cdot 28'5$$

Para λ = 7'27 la tabla queda:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	0	-105/22	0	0	-135/11	-6075/11
X_4	0	0	26/15	1	-28/15	-2/5	6
X_2	0	1	1/5	0	**2/5**	-1/5	3
X_1	1	0	2/15	0	-1/15	1/5	7

X_5 entra en la base y sale X_2.

Aplicando el algoritmo Simplex obtenemos la siguiente tabla:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	LD
Z	0	0	-105/22	0	0	-135/11	-6075/11
X_4	0	14/3	8/3	1	0	-4/3	20
X_5	0	5/2	1/2	0	1	-1/2	15/2
X_1	1	1/6	1/6	0	0	1/6	15/2

Calculando ahora solamente la perturbación de los elementos de la fila cero debajo de las variables no básicas a efectos de saber si el problema se modifica para λ > 7'27.

$$(Z_2^{'} - C_2^{'}) = (0, \quad 0, \quad -6) \cdot \left(\frac{14}{3}, \ \frac{5}{2}, \ \frac{1}{6}\right)^t - 4'5 = -5'5 < 0$$

$$(Z_3^{'} - C_3^{'}) = (0, \quad 0, \quad -6) \cdot \left(\frac{8}{3}, \ \frac{1}{2}, \ \frac{1}{6}\right)^t - 0 = -1 < 0$$

$$(Z_6^{'} - C_6^{'}) = (0, \quad 0, \quad -6) \cdot \left(\frac{-4}{3}, \ \frac{-1}{2}, \ \frac{1}{6}\right)^t - 0 = -1 < 0$$

$S = \{0\}$; $\forall\lambda \in$ (7'27,∞) la solución actual es óptima.

Recapitulando: para valores de λ comprendidos entre $\left(0, \frac{30}{21}\right)$ se fabricará sólo el electrodoméstico B que es el que ofrece beneficios mayores.

Para valores de λ situados en el intervalo $\left(0, \frac{30}{21}, \frac{30}{21}\right)$ se fabricará el electrodoméstico B y también el A que crece en beneficios unitarios.

Para valores de l superiores a $\left(\frac{153}{21}\right)$ se fabricará sólo el electrodoméstico A debido a que es el que ahora ofrece beneficios mayores.

PROBLEMA 25

Considérese el juego con la siguiente matriz de pagos.

	ESTRATEGIAS JUGADOR B			
ESTRATEGIAS JUGADOR A	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	5	0	3	1
A_2	2	4	3	2
A_3	3	2	0	4

Plantear como un problema de programación lineal para obtener el valor del juego y las estrategias mixtas que habría de utilizar el jugador A con objeto de maximizar sus beneficios.

SOLUCIÓN:

Para resolver como un problema de programación lineal llamamos:

X_1: Probabilidad con la que se ha de jugar A_1.
X_2: Probabilidad con la que se ha de jugar A_2.
X_3: Probabilidad con la que se ha de jugar A_3.
V: Valor del juego. En este caso coincide con los beneficios esperados por el jugador A.

El planteamiento sería:

Max $Z = V$

S.a.

$$\begin{array}{lllll} 5 \cdot X_1 & +2 \cdot X_2 & +3 \cdot X_3 & \geq V \\ & 4 \cdot X_2 & +2 \cdot X_3 & \geq V \\ 3 \cdot X_1 & +3 \cdot X_2 & & \geq V \\ X_1 & +2 \cdot X_2 & +4 \cdot X_3 & \geq V \\ X_1 & + X_2 & + X_3 & = 1 \end{array}$$

$$X_1, X_2, X_3, V \geq 0$$

O lo que es lo mismo (forma estándar de minimización)

$$-\text{Min} \quad Z = -V$$

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
5 \cdot X_1 & +2 \cdot X_2 & +3 \cdot X_3 & -V & -X_4 & & & & =0 \\
 & 4 \cdot X_2 & +2 \cdot X_3 & -V & & -X_5 & & & =0 \\
3 \cdot X_1 & +3 \cdot X_2 & & -V & & & -X_6 & & =0 \\
X_1 & +2 \cdot X_2 & +4 \cdot X_3 & -V & & & & -X_7 & =0 \\
X_1 & +X_2 & +X_3 & & & & & & =1
\end{array}\right\}$$

X_j (j=1...7) ≥ 0
$V \geq 0$

PROBLEMA 26

Los contrabandistas emplean dos rutas para sacar cigarrillos de Portugal: la carretera Nacional 503 o carreteras comarcales secundarias. Ambas rutas son conocidas por la policía, pero debido a limitaciones de personal sólo pueden patrullar suficientemente una de estas rutas cada vez, hecho conocido por los contrabandistas.

La policía estima que la carga promedio de contrabando que se traslada por la Nacional 503 vale 1.000 millones de pts si logran llevarla a Madrid. Las comarcales secundarias limitan el tamaño de los vehículos, así que la carga promedio de contrabando que viaja por esas carreteras vale sólo 800 millones si llega a su destino. Cualquier contrabando descubierto por la policía se confisca y al contrabandista se le multa. La carretera nacional 503 da un promedio de 700 millones de pérdidas para los contrabandistas; la pérdida por transportar la carga a través de comarcales secundarias da un promedio de 600 millones. Además, la policía estima que cuando se patrulla la carretera nacional 503 se intercepta sólo el 40% del contrabando que se traslada por esa carretera y sólo el 25% del que se traslada por las comarcales secundarias, cuando patrullan en esas carreteras. Determínese una estrategia óptima de vigilancia para la policía, si su objetivo es minimizar las ganancias de los contrabandistas.

SOLUCIÓN:

Se trata de un juego bipersonal de suma cero en el que ambas partes conocen las estrategias del contrario.

Los contrabandistas tienen dos estrategias:
- → Utilizar la Nacional
- → Utilizar las Comarcales

La Policía tiene dos estrategias:
- → Vigilar la Nacional
- → Vigilar las Comarcales

La matriz de pagos de beneficios para los contrabandistas quedaría:

Contrabandistas \ Policía	Vigilar la Nacional	Vigilar las Comarcales
Utilizar la Nacional	0'4·(-700) + 0'6·1.000	0·(-700)+1·1.000
Utilizar las Comarcales	0·(-600) + 1·800	0'25·(-600) + 0'75·800

Concretamente:

Contrabandistas \ Policía	Vigilar la Nacional	Vigilar las Comarcales
Utilizar la Nacional	320	1.000
Utilizar las Comarcales	800	450

Se observa que no existe punto de equilibrio al no haber una celda que cumpla ser el máximo valor de la columna y el mínimo de la fila. Se trata de un juego con estrategias mixtas en el que habrá que determinar la probabilidad con que se deben aplicar las distintas alternativas en la estrategia óptima.

Como la matriz de pagos está expresada en forma de beneficios para los contrabandistas y el enunciado nos pide minimizar las ganancias de éstos, es por lo que utilizaremos el criterio de ganancias y pérdidas esperadas desde el punto de vista de la policía. (Ya que no hay punto de equilibrio)

Llamando: q: probabilidad asociada a la 1ª alternativa de la policía.
(1-q): probabilidad asociada a la 2ª alternativa de la policía.

$$320 \cdot q + (1-q) \cdot 1.000 = 800 \cdot q + (1-q) \cdot 450$$

$$320 \cdot q + 1.000 - 1.000 \cdot q = 800 \cdot q + 450 - 450 \cdot q$$

$$-680 \cdot q + 1.000 = 350 \cdot q + 450$$

$$-1.030 \cdot q = -550$$

$$\mathbf{q = 0'53}$$

$$\mathbf{1-q = 0'47}$$

Es decir, la estrategia óptima de vigilancia por parte de la Policía es vigilar la Nacional con una probabilidad del 53% y las comarcales con un 47%.

Valor Esperado del Juego = 639'8 millones de pesetas a favor de los contrabandistas ya que la matriz está referida a ellos. El juego no es justo.

Ahora se procederá a resolver el problema aplicando la programación lineal. Como se trata de obtener la estrategia óptima de vigilancia por parte de la policía se llamará:

X_1: probabilidad con que ha de vigilarse la Nacional.
X_2: probabilidad con que ha de vigilarse las comarcales.
V: valor del juego.

Como a la policía le interesa minimizar las ganancias de los contrabandistas o, lo que es lo mismo, el valor del juego, el programa lineal resultante quedaría:

$\text{Min } Z = V$

S.a.

$$\begin{array}{lcl} 320 \cdot X_1 & + 1000 \cdot X_2 & \leq V \\ 800 \cdot X_1 & + 450 \cdot X_2 & \leq V \\ X_1 & + X_2 & = 1 \end{array}$$

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

Aplicando el Método Simplex para su resolución, se añaden primeramente variables de holgura para obtener la forma estándar y se añade también una variable artificial en la 3ª restricción para obtener una base inicial que coincida con la matriz identidad. Esta variable se incluye en la función objetivo para resolver el problema por el método de penalización.

$\text{Min } Z = V + M \cdot X_5$

S.a.

$$\begin{array}{lllllll} 320 \cdot X_1 & + 1000 \cdot X_2 & - V & + X_3 & & & = 0 \\ 800 \cdot X_1 & + 450 \cdot X_2 & - V & & + X_4 & & = 0 \\ X_1 & + X_2 & & & & + X_5 & = 1 \end{array}$$

$X_j = (j=1...5) \geq 0$
X_5: Variable artificial

Asignamos al coeficiente M un valor muy grande, por ejemplo, de M=1000. Nótese lo elevado de este valor en comparación con el coeficiente de la variable V, pero esto es necesario dado la peculiar forma de las restricciones, en las que se prevé que la variable V tomará valores elevados. De otra forma no habría aliciente para asignar valor cero a la variable artificial por parte del algoritmo Simplex y ésta quedaría en la base con valor no nulo.

Aplicando el método Simplex:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 320 & 1000 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 800 & 450 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \ \overline{B} \equiv \overline{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ;$$

$$\overline{X_B}=\begin{bmatrix} X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix}=\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\ ;\ \overline{C_B}=(c_3,c_4,c_5)=(0,0,10^3)$$

$$\overline{X}_N=\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ V \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\ ;\ \overline{C}_N=(c_1,c_2,c_V)=(0,0,1)$$

Calculando ahora los valores de la fila cero

$$Z_1-C_1=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{a}_1-C_1=(0,0,10^3)\cdot\begin{bmatrix} 320 \\ 800 \\ 1 \end{bmatrix}-0=10^3$$

$$Z_2-C_2=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{a}_2-C_2=(0,0,10^3)\cdot\begin{bmatrix} 1000 \\ 450 \\ 1 \end{bmatrix}-0=10^3$$

$$Z_V-C_V=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{a}_V-C_V=(0,0,10^3)\cdot\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}-1=-1$$

$$Z=\overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}=(0,0,10^3)\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}=10^3$$

La primera tabla Simplex quedaría:

	X_1	X_2	V	X_3	X_4	X_5	LD
Z	10^3	10^3	-1	0	0	0	10^3
X_3	320	1000	-1	1	0	0	0
X_4	800	450	-1	0	1	0	0
X_5	1	1	0	0	0	1	1

Aplicando el método Simplex obtenemos una solución óptima tras tres iteraciones en la que entran en la base las variables X_1, V y X_2 respectivamente. Los resultados, logicamente, coinciden con los ya obtenidos, siendo estos:

$X_1 = 0{,}53 \longrightarrow$ 53% de las veces vigilar la Nacional.
$X_2 = 0{,}47 \longrightarrow$ 47% de las veces vigilar las Comarcales.

Valor probabilístico del juego, V = 639,8 Millones de pesetas a favor de los contrabandistas.

PROBLEMA 27

En el legendario Oeste Americano había un salón llamado "La perola negra" (The black saucepan) conocido mundialmente por un juego que tuvo allí su origen. El citado juego, el perolo, consistía en un jugador A que tenía un billete de un dólar y otro billete de 20 dólares, mientras que el jugador B tenía un billete de 5 dólares y otro billete de 10 dólares. Cada jugador seleccionaba un billete del jugador contrario sin saber cuál era el billete seleccionado por el otro jugador. Si la suma de las cantidades de los billetes seleccionados era par, el jugador A se llevaba ambos billetes, pero si el total era impar, entonces era el jugador B el que se llevaba los dos billetes.

Resolver:

a) Mostrar la matriz de pagos para este juego.

b) ¿Cuáles son las mejores estrategias para cada jugador?

c) ¿Cuál es el valor del juego?

d) Si pudieras elegir ¿Qué jugador preferirías ser?

e) Obtener la estrategia óptima del jugador A utilizando la programación lineal.

SOLUCIÓN:

a) Se trata de un juego en el que las alternativas para el jugador A consisten en coger el billete de 5 dólares o el de 10 dólares del jugador B. Por el contrario, para el jugador B la estrategia consiste en optar por uno de los dos billetes del jugador A.

La matriz de pagos sería (referida al jugador A):

Jugador B / Jugador A	Coger billete de 1$	Coger billete de 20$
Coger billete de 5$	par 6 $	impar –25$
Coger billete de 10$	impar –11$	par 30$

No existen estrategias puras dado que ningún valor en las celdas cumple ser el máximo de la columna y el mínimo de la fila.

b) Estrategia para el jugador A (Criterio de la ganancia y pérdida esperada)

Llamando: p: probabilidad asociada a la 1ª alternativa del jugador A.
(1-p): probabilidad asociada a la 2ª alternativa del jugador A.

$p \cdot 6 + (1-p) \cdot (-11) = p \cdot (-25) + (1-p) \cdot 30$

$6p - 11 + 11 \cdot p = -25 \cdot p + 30 - 30 \cdot p$

$72 \cdot p = 41$

$p = \frac{41}{72} \quad (p_1)$

$1 - p = \frac{31}{72} \quad (p_2)$

$p_1 = \frac{41}{72}$ de las veces el jugador A debería adoptar su primera alternativa.

$p_2 = \frac{31}{72}$ de las veces el jugador A debería adoptar su segunda alternativa.

Estrategia para el jugador B (Criterio de ganancia y pérdida esperada).

$q \cdot 6 + (1-q) \cdot (-25) = q \cdot (-11) + (1-q) \cdot 30$

$6 \cdot q - 25 + 25 \cdot q = -11 \cdot q + 30 - 30 \cdot q$

$72 \cdot q = 55$

$q = \frac{55}{72} \quad (q_1)$

$1 - q = \frac{17}{72} \quad (q_2)$

$q_1 : \frac{55}{72}$ de las veces el jugador B debería adoptar su primera alternativa.

$q_2 : \frac{17}{72}$ de las veces el jugador B debería adoptar su segunda alternativa.

c) Valor del juego. Sustituyendo los valores de "p" y "q" en las expresiones anteriores:

$\mathbf{p} \rightarrow \frac{41}{72} \cdot 6 + \frac{31}{72} \cdot (-11) = -\frac{95}{72} = -1'32 \ \$$

$$q \rightarrow \frac{55}{72} \cdot 6 + \frac{17}{72} \cdot (-25) = -\frac{95}{72} = -1'32 \ \ \$$$

El juego es favorable a **B**

d) Más bien elegiría ser el jugador B.

e) Obtener la estrategia óptima del jugador A utilizando la programación lineal.

Llamando: X_1: Probabilidad con que el jugador A debe coger el billete de 5$.
X_2: Probabilidad con que el jugador A debe coger el billete de 10$.
V: Valor del juego.

Como el objetivo para el jugador A es maximizar su beneficio el programa lineal óptimo correspondiente sería:

Max Z = V

S.a.

$$\begin{array}{rcrcl} 6 \ X_1 & - & 11 \cdot X_2 & \geq & V \\ -25 \cdot X_1 & + & 30 \cdot X_2 & \geq & V \\ X_1 & + & X_2 & = & 1 \end{array}$$

$$X_1, X_2, V \geq 0$$

Añadiendo variables de holgura y artificiales y cambiando la función objetivo con objeto de expresar el problema en formato estándar de minimización.

$$-\text{Min } Z = -V + M \cdot X_5 + M \cdot X_6 + M \cdot X_7$$

S.a.

$$\begin{array}{rrrrrrrcl} 6 \ X_1 & -11 \cdot X_2 & -X_3 & & +X_5 & & & = & V \\ -25 \cdot X_1 & +30 \cdot X_2 & & -X_4 & & +X_6 & & = & V \\ X_1 & + \ X_2 & & & & & +X_7 & = & 1 \end{array}$$

$Xj = (j=1...7) \geq 0$; $V \geq 0$
X_5, X_6, X_7: Variables artificiales

Pasando la variable V al primer miembro:

$$\begin{array}{rrrrrrrrcl} 6 \ X_1 & -11 \cdot X_2 & -X_3 & & +X_5 & & & -V & = & 0 \\ -25 \cdot X_1 & +30 \cdot X_2 & & -X_4 & & +X_6 & & -V & = & 0 \\ X_1 & + \ X_2 & & & & & +X_7 & & = & 1 \end{array}$$

$Xj = (j=1...7) \geq 0$; $V \geq 0$
X_5, X_6, X_7: Variables artificiales

Quedando por tanto la matriz de restricciones:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} 6 & -11 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -25 & 30 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; \ \overline{B} \equiv \overline{I} = \left[\overline{a}_{X_5}, \overline{a}_{X_6}, \overline{a}_{X_7}\right]$$

$$\overline{X_B} = \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \ \overline{X}_N = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ V \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Para calcular los valores de Z_j - C_j y de Z damos al coeficiente M un valor de M = 100.

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = (100,100,100) \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -25 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1800$$

$$Z_2 - C_2 = (100,100,100) \cdot \begin{bmatrix} -11 \\ 30 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = 2000$$

$$Z_3 - C_3 = (100,100,100) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -100$$

$$Z_4 - C_4 = (100,100,100) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = -100$$

$$Z_V - C_V = (100,100,100) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1) = -199$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (100,100,100) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 100$$

Con estos valores la primera tabla Simplex quedaría:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	V	LD
Z	-1800	2000	-100	-100	0	0	0	-199	100
X_5	6	-11	-1	0	1	0	0	-1	0
X_6	-25	**30**	0	-1	0	1	0	-1	0
X_7	1	1	0	0	0	0	1	0	1

Aplicando el Método Simplex hacemos una iteración sobre el elemento pivote $y_{22} = 30$, obteniéndose la siguiente tabla:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	V	LD
Z	-133,33	0	-100	-33,33	0	-66,67	0	-132,33	100
X_5	-3,17	0	-1	-0,37	1	0,37	0	-1,37	0
X_2	-0,83	1	0	-0,03	0	0,03	0	-0,03	0
X_7	1,83	0	0	0,03	0	-0,03	1	0,03	1

Se observa que se trata de una tabla en la que se cumple el criterio de optimalidad ($Z_j - C_j \leq 0, \forall j$) pero en la que dos variables artificiales permanecen en la base, una de ellas con valor no nulo. Por tanto se trata de una solución no factible. La razón estriba en que al utilizar la programación lineal imponemos que la variable V sea no negativa, cuando hemos visto en el apartado c) que el valor del juego es negativo (pérdidas para el jugador A). Por tanto es necesario hacer un cambio de variable para poder aplicar convenientemente el método Simplex:

$$V = V' - V'' \quad \text{con} \quad V' \geq 0 \;\; y \;\; V'' \geq 0$$

Sustituyendo en el problema original queda:

$$-\text{Min } Z = -V' + V'' + 100\,X_5 + 100\,X_6 + 100\,X_7$$

S.a.

$$\begin{array}{lllllllll}
6\;X_1 & -11 \cdot X_2 & -X_3 & & +X_5 & & & -V' & +V'' & = 0 \\
-25 \cdot X_1 & +30 \cdot X_2 & & -X_4 & & +X_6 & & -V' & +V'' & = 0 \\
X_1 & +\;X_2 & & & & & +X_7 & & & = 1
\end{array}$$

$Xj = (j=1...7) \geq 0$; $V' \geq 0$; $V'' \geq 0$;
X_5, X_6, X_7: Variables artificiales

Repitiendo el proceso:

$$\overline{X}_B = \begin{bmatrix} X_5 \\ X_6 \\ X_7 \end{bmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; ; \; \overline{X}_N = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ V' \\ V'' \end{bmatrix} = \overline{0}$$

Los valores de la fila cero para la primera tabla Simplex quedan:

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - C_1 = (100{,}100{,}100) \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ -25 \\ 1 \end{bmatrix} - 0 = -1800$$

$Z_2 - C_2 = 2000$

$Z_3 - C_3 = -100$

$Z_4 - C_4 = -100$

$$Z_{V'} - C_{V'} = (100{,}100{,}100) \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - (-1) = -199$$

$$Z_{V''} - C_{V''} = (100{,}100{,}100) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 = 199$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 100$$

La primera tabla Simplex queda, por tanto:

	X₁	**X₂**	**X₃**	**X₄**	**X₅**	**X₆**	**X₇**	**V'**	**V''**	**LD**
Z	-1800	2000	-100	-100	0	0	0	-199	199	100
X_5	6	-11	-1	0	1	0	0	-1	1	0
X_6	-25	**30**	0	-1	0	1	0	-1	1	0
X_7	1	1	0	0	0	0	1	0	0	1

Aplicando el Método Simplex, las siguientes tablas quedan:

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	V'	V"	LD
Z	-133,33	0	-100	-33,33	0	-66,67	0	-132,33	132,33	100
X_5	-3,17	0	-1	-0,37	1	0,37	0	-1,37	**1,37**	0
X_2	-0,83	1	0	-0,03	0	0,03	0	-0,03	0,03	0
X_7	1,83	0	0	0,03	0	-0,03	1	0,03	-0,03	1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	V'	V"	LD
Z	172,86	0	-3,41	2,41	-96,60	-102,41	0	0	0	100
V"	-2,31	0	-0,73	-0,27	0,73	0,27	0	-1	1	0
X_2	-0,76	1	0,02	-0,02	-0,02	0,02	0	0	0	0
X_7	**1,76**	0	-0,02	0,02	0,02	-0,02	1	0	0	1

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	V'	V"	LD
Z	0	0	-1,45	-0,45	-98,56	-100,45	-98,22	0	0	1,78
V"	0	0	-0,76	-0,24	0,76	0,24	1,31	-1	1	1,32
X_2	0	1	0,01	-0,01	-0,01	0,01	0,43	0	0	0,43
X_1	1	0	-0,01	0,01	0,01	-0,01	0,57	0	0	0,57

Solución óptima. Los valores obtenidos son:

$X_1 \equiv p = 0{,}57$ $\longrightarrow$ 57% de las ocasiones el jugador A debe escoger la 1ª alternativa.

$X_2 \equiv (1-p) = 0{,}43$ $\longrightarrow$ 43% de las ocasiones el jugador A debe escoger la 2ª alternativa.

El valor probabilístico del juego es: V = V' - V" = 0 - 1,32 = -1,32$ que representa que el juego es favorable al jugador B.

PROBLEMA 28

Dos empresas automovilísticas "A" y "B" se replantean sus estrategias de cara a la obtención de la mayor cuota de mercado posible para el nuevo año fiscal. Debido a la crisis en este sector y al descenso en picado de las ventas, son conscientes de la importancia que la elección de la mejor estrategia puede tener para el futuro de su negocio. Estas dos empresas, al ser de características muy similares, contienden directamente por pequeños incrementos en la cuota de mercado. Por ello se plantean una serie de estrategias basadas en el lanzamiento de nuevos vehículos para segmentos de mercados muy definidos combinados con campañas publicitarias de distinto tipo. Finalmente, la empresa "A" opta por establecer dos posibles estrategias, mientras que la empresa "B" se plantea tres estrategias alternativas. Dada la incertidumbre que rodea al proceso, cada empresa utiliza sus propios mecanismos para hacer públicas sus intenciones y así tantear las intenciones del contrario. Como resultado, ambas conocen todas las alternativas que pueden ser usadas por su contendiente, pero no así cuál es la que finalmente llevarán a la práctica. Los responsables de la empresa "A", tras un análisis de la situación, llegan a la siguiente tabla en la que se muestran los incrementos o pérdidas de cuota de mercado (en tanto por ciento) para su empresa en función de la estrategia que finalmente sea elegida por cada uno de ellos.

A \ B	1	2	3
1	4%	-1%	5%
2	-1%	7%	-3%

Determinar:

a) ¿Por qué puede categorizarse al problema como un juego? ¿De qué tipo de juego se trata?

b) ¿Cuál es el valor del juego?

c) ¿Cuál es la estrategia que debe utilizar la empresa "B"?

d) ¿Es justo este juego?

SOLUCIÓN:

a) Según el enunciado, los contendientes conocen las estrategias del contrario, así como los pagos resultantes de las posibles combinaciones de estrategias. En este sentido, como la cuota de mercado que gana una parte la pierde la otra, se concluye que estamos ante un juego bipersonal de suma cero en el que la matriz de pagos para la empresa "A" queda de la siguiente manera:

B / A	1	2	3
1	4	-1	5
2	-1	7	-3

Donde se aprecia que no existen estrategias dominadas, por lo que no se puede reducir la dimensión de la tabla. Para comprobar la existencia de un posible punto silla aplicamos el criterio Maximin para "A" y el criterio Minimax para "B".

$$\text{Maximin:}\begin{cases}\mathbf{-1} \rightarrow \text{ fila 1} \\ \\ -3\end{cases} \qquad \text{Minimax:}\begin{cases}\mathbf{4} \quad 7 \quad 5 \\ \uparrow \\ \text{columna 1}\end{cases}$$

El valor de la celda (1, 1) es el mayor de la columna pero no es el menor de la fila, luego no es punto silla y el problema es un juego de estrategias mixtas. Para calcular el valor del juego y las probabilidades para cada una de las posibles estrategias del jugador B utilizamos la programación lineal. Dado que la matriz representa valores referidos al jugador A, el planteamiento sería:

X_1: Fracción de veces que el jugador B debe adoptar su alternativa 1 para minimizar sus pérdidas.

X_2: *Idem* con la alternativa 2.

X_3: *Idem* con la alternativa 3.

Min $Z = V$

S.a.

$$\begin{array}{rrrl} 4 \cdot X_1 & - \ X_2 & +5 \cdot X_3 & \leq V \\ -\ X_1 & +7 \cdot X_2 & -3 \cdot X_3 & \leq V \\ X_1 & + \ X_2 & + \ X_3 & = 1 \end{array}$$

$$X_1, X_2, X_3, V \geq 0$$

Modificando el problema, es decir, expresando en forma estándar:

(Como es necesario introducir una variable artificial se utilizará el método de penalización con M = 10)

$$\text{Min } Z = V + M \cdot X_6$$

S.a.

$$\begin{array}{rrrrrrrl} 4 \cdot X_1 & - X_2 & +5 \cdot X_3 & -V & +X_4 & & & = 0 \\ - X_1 & +7 \cdot X_2 & -3 \cdot X_3 & -V & & +X_5 & & = 0 \\ X_1 & + X_2 & + X_3 & & & & +X_6 & = 1 \end{array}$$

$$X_j(j = 1,\ldots 6) \geq 0 \ ; \quad V \geq 0 \ ; \ X_6\text{: var. artificial}$$

Cálculo de las variables básicas:

$$\overline{X}_B = \left(X_4, \quad X_5, \quad X_6\right)^t \quad ; \quad \overline{X}_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad \overline{C}_B = \left(0, \quad 0, \quad 10\right)$$

$$\overline{X}_N = \left(X_1, \quad X_2, \quad X_3, \quad V\right)^t \ ; \ \overline{X}_N = \overline{0}$$

Valores de la fila cero

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \left(0, \quad 0, \quad 10\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 10$$

$$Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = \left(0, \quad 0, \quad 10\right) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - 0 = 10$$

$$Z_2 - C_2 = 10$$
$$Z_3 - C_3 = 10$$
$$Z_v - C_v = 0 - 1 = -1$$

La 1ª tabla para resolver por el Método Simplex sería:

	X_1	X_2	X_3	V	X_4	X_5	X_6	LD
Z	10	-10	10	-1	0	0	0	10
X_4	**4**	-1	5	-1	1	0	0	0
X_5	-1	7	-3	-1	0	1	0	0
X_6	1	1	1	0	0	0	1	1

Tras tres iteraciones más el resultado queda:

	X_1	X_2	X_3	V	X_4	X_5	X_6	LD
Z	-1/8	0	0	0	-5/8	-3/8	8	2
X_3	13/16	0	1	0	1/16	-1/16	1/2	1/2
X_2	3/16	1	0	0	-1/16	1/16	1/2	1/2
V	-1/8	0	0	1	-5/8	-3/8	2	2

$X_1 = 0$
$X_2 = 0'5$ $\quad V = 2 = Z$
$X_3 = 0'5$

Es decir, se debe adoptar sólo las estrategias 2 y 3 por parte del jugador B con una distribución del 50%. El valor probabilístico del juego es V = 2 a favor del jugador A, o lo que es lo mismo, el competidor A tiene ventaja y puede lograr incrementar su cuota de participación en alrededor del 2%.

No es un juego justo porque $Z_1 \neq 0$

PROBLEMA 29

La dirección de una empresa de manufacturas está negociando con el sindicato correspondiente la cuestión de cuántos productos fabricar durante el próximo año laboral. La dirección desea fabricar el mayor número posible de unidades, mientras que por el contrario, el sindicato pretende producir el menor número posible de éstas. El número de productos (en unidades de millón) que se espera se fabriquen anualmente, en función de las diversas actitudes seguidas por las partes a la hora de negociar, se muestran en la tabla.

	Acciones a seguir por el sindicato en las negociaciones		
Acciones a seguir por la dirección	Distensión	Amenazas de huelga	Trabajo duro
Actitud condescendiente	1'8	1'1	1'3
Neutralidad	1'3	1'5	1'8
Agresividad	1'4	1'3	1'8

a) Utilizando la programación lineal obtener las expresiones que definen las posibles estrategias a seguir por las dos partes.

b) Calcular el valor de las posibles estrategias de juego por parte de la dirección.

c) Calcular el valor del juego.

SOLUCIÓN:

Se trata de un problema de juego bipersonal de suma cero en el que inicialmente, la matriz de pagos es la siguiente:

	Distensión	Huelga	Trabajo duro
Actitud condescendiente	1'8	1'1	1'3
Neutralidad	1'3	1'5	1'8
Agresividad	1'4	1'3	1'8

Se observa que para el sindicato la 3ª estrategia es siempre peor que la 2ª, por lo que se puede eliminar por dominación la 3ª columna de la tabla, quedando:

	Distensión	Huelga
Actitud condescendiente	1'8	1'1
Neutralidad	1'3	1'5
Agresividad	– 1'4	1'3

a) El planteamiento, por programación lineal, del objetivo de la dirección de la empresa obedece a la expresión:

Max. Z = V

S.a.

$$\left.\begin{array}{llll} 1'8\cdot p_1 & +1'3\cdot p_2 & +1'4\cdot p_3 & \geq V \\ 1'1\cdot p_1 & +1'5\cdot p_2 & +1'3\cdot p_3 & \geq V \\ p_1 & + \; p_2 & + \; p_3 & =1 \end{array}\right\} \quad p_1, p_2, p_3, V \geq 0$$

donde:

p_1: fracción de veces que la dirección debe adoptar su 1ª alternativa .
p_2: *Idem* con la alternativa 2ª.
p_3: *Idem* con la alternativa 3ª.

El planteamiento según el objetivo del sindicato sería:

Min Z = V

$$\left.\begin{array}{lll} 1'8\cdot q_1 & +1'1\cdot q_2 & \leq V \\ 1'3\cdot q_1 & +1'5\cdot q_2 & \leq V \\ 1'4\cdot q_1 & +1'3\cdot q_2 & \leq V \\ q_1 & + \; q_2 & =1 \end{array}\right\} \quad q_1, q_2, V \geq 0$$

donde:

q_1: fracción de veces que el sindicato debe adoptar su 1ª alternativa.
q_2: *Idem* para la 2ª alternativa.

b) Resolución del sistema correspondiente a la dirección de la empresa. Se aplicará el método de penalización (con M=1) una vez se haya expresado el problema en forma estándar de minimización.

$$-\text{Min } Z = -V + M \cdot p_6 + M \cdot p_7 + M \cdot p_8$$

$$\left.\begin{array}{lllllllllll} 1'8 \cdot p_1 & +1'3 \cdot p_2 & +1'4 \cdot p_3 & -V & -p_4 & & +p_6 & & & =0 \\ 1'1 \cdot p_1 & +1'5 \cdot p_2 & +1'3 \cdot p_3 & -V & & -p_5 & & +p_7 & & =0 \\ \quad p_1 & + \quad p_2 & + \quad p_3 & & & & & & +p_8 & =1 \end{array}\right\}$$

$p_j \ (j = 1......8) \geq 0$; p_6, p_7, p_8 : variables artificiales
$V \geq 0$

Aplicando el algoritmo Simplex:

$$\overline{B} = [\overline{a}_6, \ \ \overline{a}_7, \ \ \overline{a}_8]; \qquad \overline{X}_B = \begin{Bmatrix} X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{Bmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Valores de la fila cero:

$$\overline{C}_B = (1, \ \ 1, \ \ 1); \quad Z_1 - C_1 = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_1 - c_1 = 3'9$$
$$Z_2 - C_2 = 3'8$$
$$Z_3 - C_3 = 3'7$$
$$Z_V - C_V = -1$$
$$Z_4 - C_4 = -1$$
$$Z_5 - C_5 = -1$$

$$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 1$$

La 1ª tabla sería:

	p₁	**p₂**	**p₃**	**V**	**p₄**	**p₅**	**p₆**	**p₇**	**p₈**	**LD**
Z	3'9	3'8	3'7	-1	-1	-1	0	0	0	1
p₆	1'8	1'3	1'4	-1	-1	0	1	0	0	0
p₇	1'1	1'5	1'3	-1	0	-1	0	1	0	0
p₈	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

Tras 3 iteraciones, la tabla final queda:

	p_1	p_2	p_3	V	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	LD
Z	0	0	-1/15	0	-4/9	-5/9	-5/9	-4/9	-217/90	-127/90
p_1	1	0	1/3	0	-10/9	10/9	10/9	-10/9	2/9	2/9
p_2	0	1	2/3	0	10/9	-10/9	-10/9	10/9	7/9	7/9
V	0	0	1/15	1	4/9	5/9	-4/9	-5/9	127/90	127/90

Los resultados, en cuanto a probabilidades de utilización de las estrategias son:

$p_1 = 2/9 \approx 0'22$
$p_2 = 7/9 \approx 0'78$
$p_3 = 0$

El valor probabilístico del juego es:
V = 127/90 ≈ 1'41 millones de unidades a producir

Es decir, la dirección debería adoptar una actitud condescendiente con una probabilidad del 22% y una actitud de neutralidad con una probabilidad del 78%. No debe sentarse nunca en la mesa de negociación con una actitud agresiva.

PROBLEMA 30

En la cuadragésimo séptima (47ª) ronda de negociaciones para llegar a un acuerdo en materia de pesca entre España y un país norteafricano, la delegación española advierte que, dado el fracaso de las demás rondas anteriores es necesario ir con un planteamiento alternativo a la mesa de negociación. Tras haber pasado muchos días, con sus respectivas noches, estudiando todas las posibles alternativas, el equipo llega a la conclusión de que el otro país sólo acude con dos estrategias de negociación: la primera consiste en mostrar una actitud aparentemente transigente con objeto de lograr algunas contraprestaciones por parte de la Unión Europea; la segunda estrategia es la de cerrarse con una actitud intransigente sin ceder ningún tipo de prebendas. Ante estas alternativas, el equipo negociador español propone tres estrategias que se encarga de comunicar informalmente al representante de la parte contraria. Los resultados de la negociación se miden en el número de licencias de pesca para barcos de gran tonelaje en los próximos cinco años. Las estrategias y los posibles resultados se muestran en la tabla.

	País norteafricano (B)	
España (A)	Actitud transigente (B.1)	Actitud intransigente (B.2)
Negociar sólo pesca (A.1)	15	5
Negociar pesca y agricultura (A.2)	24	18
Negociar el conjunto global de intercambios económicos (A.3)	30	26

a) Con estas condiciones, ¿Qué estrategia debería adoptar España en la siguiente mesa de negociación y cuál sería el resultado?

b) Cuando se le presenta el plan al ministro correspondiente, éste confirma que efectivamente las estrategias están bien definidas, pero no así los resultados, ya que aunque aparentemente se logran licencias para un mayor número de barcos, los resultados reales en el conjunto global económico estarían muy por debajo de lo estimado, debido a que supondría hacer concesiones en otras materias, lo que el resultado equivalente significaría que a todos los efectos se estarían logrando menos licencias reales. En este sentido, se estima que la estrategia A.2 en combinación con la estrategia B.1 supondría una reducción aproximada del 34% en el número de licencias iniciales. Igualmente, la estrategia A.2 frente a la estrategia B.2 significa una reducción aproximada del 78%. La estrategia A.3 en combinación con la estrategia B.1. supone un decremento del 87%. Finalmente, la estrategia A.3 frente a la estrategia B.2 implica una reducción cercana al 69%. Con este planteamiento, ¿Qué estrategia debería adoptarse y cuáles serían los resultados para España?

SOLUCIÓN:

a) Se trata de un problema de juego bipersonal de suma cero. La tabla inicial es la mostrada en el enunciado. Si se aplicase sobre ella el criterio Maximin para el jugador A y el Minimax para el B, se obtendrían dos estrategias en la intersección que coinciden en un punto silla, pues el valor **26** es el mayor de la columna y el menor de la fila. Este valor es lógico pues las estrategias A.3 y B.2 son dominantes.

	País norteafricano		
España	B.1	B.2	Criterio Maximin
A.1	15	5	5
A.2	24	18	18
A.3	30	**26**	**26**
Criterio Minimax	30	26	

Pto. silla

Se utilizaría la estrategia A.3 por parte de España y la B.2 por parte del otro país con un valor teórico de 26 licencias de pesca en los próximos cinco años.

b) Si se reducen las estimaciones teóricas según los porcentajes del enunciado se obtiene que los resultados reales equivalentes serían los mostrados en la tabla.

	País norteafricano		
España	B.1	B.2	Criterio Maximin
A.1	15	**5**	5
A.2	16	4	4
A.3	4	8	4
Criterio Minimax	16	8	

Se observa que no existen estrategias dominantes y que tampoco hay un punto silla. Ello implica que estamos ante un juego con estrategias mixtas en el que hay que calcular el porcentaje con el que debe utilizarse cada estrategia para alcanzar el mejor valor del juego. Como existen 3 estrategias para el jugador A se utilizará la programación lineal.

Sea V: valor del juego
p_1: probabilidad asociada a la estrategia A.1
p_2: probabilidad asociada a la estrategia A.2
p_3: probabilidad asociada a la estrategia A.3

El planteamiento sería:

Max Z = V

S.a.

$$\left.\begin{array}{llll} 15\cdot p_1 & +16\cdot p_2 & +4\cdot p_3 & \geq V \\ 5\cdot p_1 & +4\cdot p_2 & +8\cdot p_3 & \geq V \\ p_1 & +\ p_2 & +\ p_3 & =1 \end{array}\right\} \quad p_1,\ p_2,\ p_3,\ V\geq 0$$

Añadiendo variables de holgura y artificiales para resolver por el método de penalización (con M=1) y expresando el problema en la forma equivalente de minimización:

$$-\text{Min } Z = -V + M\cdot p_6 + M\cdot p_7 + M\cdot p_8$$

$$\left.\begin{array}{lllllllll} 15\cdot p_1 & +16\cdot p_2 & +4\cdot p_3 & -V & -p_4 & & +p_6 & & =0 \\ 5\cdot p_1 & +4\cdot p_2 & +8\cdot p_3 & -V & & -p_5 & & +p_7 & =0 \\ p_1 & +\ p_2 & +\ p_3 & & & & & +p_8 & =1 \end{array}\right\}$$

$p_j\ (j = 1,\ldots 8),\ V\geq 0;\ p_6, p_7, p_8$: variables artificiales

Aplicando el algoritmo Simplex:

$$\overline{X}_B = \begin{Bmatrix} p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \ ; \ \overline{B} = [\overline{a}_6, \overline{a}_7, \overline{a}_8]$$

Valores de la fila cero:

$$\overline{C}_B = \begin{pmatrix}1, & 1, & 1\end{pmatrix}; \quad Z_1 - C_1 = \overline{C}_B\cdot\overline{B}^{-1}\cdot\overline{a}_1 - C_1 = 21$$

$$Z_2 - C_2 = 21$$
$$Z_3 - C_3 = 13$$
$$Z_V - C_V = -1$$
$$Z_4 - C_4 = -1$$
$$Z_5 - C_5 = -1$$

$Z = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = 1$

La 1ª tabla sería:

	p_1	p_2	p_3	V	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	LD
Z	21	21	13	-1	-1	-1	0	0	0	1
p_6	**15**	16	4	-1	-1	0	1	0	0	0
p_7	5	4	8	-1	0	-1	0	1	0	0
p_8	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1

Aplicando el método Simplex, las siguientes tablas quedan:

	p_1	p_2	p_3	V	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	LD
Z	0	-7/5	37/5	2/5	2/5	-1	-7/5	0	0	1
p_1	1	16/15	4/15	-1/15	-1/15	0	1/15	0	0	0
p_7	0	-4/3	20/3	-2/3	1/3	-1	-1/3	1	0	0
p_8	0	-1/15	11/15	1/15	1/15	0	-1/15	0	1	1

	p_1	p_2	p_3	V	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	LD
Z	0	2/25	0	57/50	3/100	11/100	-103/100	-111/100	0	1
p_1	1	28/25	0	-1/25	-2/25	1/25	2/25	-1/25	0	0
p_3	0	-1/5	1	-1/10	1/20	-3/20	-1/20	3/20	0	0
p_8	0	2/25	0	7/50	3/100	11/100	-3/100	-11/100	1	1

	p_1	p_2	p_3	V	p_4	p_5	p_6	p_7	p_8	LD
Z	0	-4/7	0	0	-3/14	-11/14	-11/14	-3/14	-57/7	-50/7
p_1	1	8/7	0	0	-1/14	1/14	1/14	-1/14	2/7	2/7
p_3	0	-1/7	1	0	1/14	-1/14	-1/14	1/14	5/7	5/7
V	0	4/7	0	1	3/14	11/14	-3/14	-11/14	50/7	50/7

Solución óptima.

La distribución probabilística óptima es:

$\mathbf{p_1 = 0'29} = 2/7$
$\mathbf{p_2 = 0}$ Con un valor probabilístico del juego de 7'14 ≈ **7 licencias de barcos**
$\mathbf{p_3 = 0'71} = 5/7$

Es decir, la delegación española debería adoptar la estrategia de negociar sólo pesca con una probabilidad del 29%; no debería sentarse a la mesa para negociar pesca y agricultura conjuntamente, y sí negociar el conjunto global de intercambios económicos con una probabilidad del 71%.

PROBLEMA 31

Mortadelo está muy contento porque entre él y Filemón han inventado un juego que consiste en mostrar a un tiempo la mano derecha pudiendo tener extendidos uno, dos o tres dedos simultáneamente. Cada dedo representa una alternativa, de tal forma que la combinación de alternativas da lugar a unos pagos en pesetas que se muestran en la siguiente tabla referida a Mortadelo.

	F_1 Filemón extiende un dedo	F_2 Filemón extiende dos dedos	F_3 Filemón extiende tres dedos
M_1: Mortadelo extiende un dedo	-3	-2	-10
M_2: Mortadelo extiende dos dedos	-9	-1	-8
M_3: Mortadelo extiende tres dedos	-16	-1	-2

Con los valores mostrados, ¿cuál debería ser la estrategia de Mortadelo para optimizar sus resultados? ¿A Mortadelo le interesa jugar a este juego o, por el contrario debería buscar otras amistades?

SOLUCIÓN:

Se trata de un juego bipersonal de suma cero. La matriz de juegos del problema referida a Mortadelo es la siguiente:

	F_1	F_2	F_3
M_1	-3	-2	-10
M_2	-9	-1	-8
M_3	-16	-1	-2

En ella se observa que para cualquier combinación de alternativas siempre gana el 2º jugador, es decir, Filemón. Ante este panorama Mortadelo debería cambiar las reglas del juego si no quiere seguir siendo engañado.

Analizando la matriz se observa que la alternativa F2 tiene siempre peores pagos para el 2º jugador que la 1ª y 3ª alternativas, por lo que está dominada y se elimina de la tabla.

	F_1	F_3
M_1	-3	-10
M_2	-9	-8
M_3	-16	-2

Aplicamos el criterio Maximin para Mortadelo y el de Minimax para Filemón con objeto de intentar encontrar un punto de equilibrio.

	F_1	F_3	Maximin
M_1	-3	-10	-10
M_2	**-9**	-8	-9
M_3	-16	-2	-16
Minimax	-3	-2	

Esta alternativa es la menos mala entre las peores para el 2do jugador

Esta es la mejor entre las peores para el 1er jugador

El punto de coincidencia corresponde a la celda M_2 F_1 pero no es punto silla o de equilibrio porque aunque es el menor de la fila no es el mayor de la columna. Nos encontramos, por tanto, ante un juego de estrategias mixtas donde hay que obtener la distribución de probabilidades con que ha de elegirse las diversas alternativas para obtener una estrategia de juegos que permita, si se juega un número elevado de veces, que las pérdidas o ganancias sean indiferentes de la estrategia seguida por el otro jugador.

Como nos piden la estrategia óptima para Mortadelo, al tener tres alternativas posibles utilizaremos la programación lineal para obtener el valor de las probabilidades.

Llamando:

X_1: Fracción de veces que Mortadelo ha de utilizar la alternativa M_1.
X_2: *Idem* con la alternativa M_2.
X_3: *Idem* con la alternativa M_3.
V: Valor del juego.

Partimos del supuesto que Mortadelo quiere maximizar sus ganancias. El problema lineal obedece al siguiente esquema:

(Si hubiésemos supuesto un planteamiento en que Mortadelo quisiera minimizar sus pérdidas se obtendría el mismo resultado ya que ambos planteamientos son duales el uno con respecto al otro).

$Max\, Z = V$

S.a:

$$\begin{array}{rcrcrcl}
-3\cdot X_1 & - & 9\cdot X_2 & - & 16\cdot X_3 & \geq & V \\
-10\cdot X_1 & - & 8\cdot X_2 & - & 2\cdot X_3 & \geq & V \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & = & 1
\end{array}$$

$X_1 , X_2 , X_3 , V \geq 0$

Sin embargo, se observa que el valor del juego forzosamente será negativo porque todos los pagos de la tabla son negativos. En esta circunstancia no se cumplirá la restricción de que $V \geq 0$ por lo que al resolver el problema éste resultaría no factible. Por esta razón es necesario hacer el cambio.

$V = V' - V''$

Con $V' \geq 0$ y $V'' \geq 0$

Quedando, $Max\ Z = V' - V''$

S.a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl}
-3\cdot X_1 & - & 9\cdot X_2 & - & 16\cdot X_3 & - & V' & + & V'' & \geq & 0 \\
-10\cdot X_1 & - & 8\cdot X_2 & - & 2\cdot X_3 & - & V' & + & V'' & \geq & 0 \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & & & & = & 1
\end{array}$$

$X_1 , X_2 , X_3 , V' , V'' \geq 0$

Pasando el problema a formato estándar de minimización para aplicar el Método Simplex.

$- Min\, Z = -V' + V''$

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl}
-3\cdot X_1 & - & 9\cdot X_2 & - & 16\cdot X_3 & - & V' & + & V'' & - & X_4 & & & = & 0 \\
-10\cdot X_1 & - & 8\cdot X_2 & - & 2\cdot X_3 & - & V' & + & V'' & & & - & X_5 & = & 0 \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & & & & & & & & = & 1
\end{array}$$

$X_1, X_2 , X_3 , X_4 , X_5 , V' , V'' \geq 0$

Como no tenemos una matriz identidad para convertir en base inicial del problema añadimos variables artificiales y utilizamos el método de penalización para eliminarlas. Damos a M el valor 50. El planteamiento queda:

$$-Min Z = -V' + V'' + M \cdot X_6 + M \cdot X_7 + M \cdot X_8$$

S.a:

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcrcrcl}
-3 \cdot X_1 & - & 9 \cdot X_2 & - & 16 \cdot X_3 & - & V' & + & V'' & - X_4 & & & + X_6 & & & & = & 0 \\
-10 \cdot X_1 & - & 8 \cdot X_2 & - & 2 \cdot X_3 & - & V' & + & V'' & & - X_5 & & & + X_7 & & & = & 0 \\
X_1 & + & X_2 & + & X_3 & & & & & & & & & & + X_8 & & = & 1
\end{array}$$

$$X_j (j = 1 \ldots 8) \geq 0 \quad ; \quad X_6, X_7, X_8 : \text{variables artificiales.}$$

$$V', V'' \geq 0$$

La matriz de restricciones del problema es:

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} -3 & -9 & -16 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -10 & -8 & -2 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Base inicial: $\overline{B} \equiv \overline{I} = \left[\overline{a}_{X_6}, \overline{a}_{X_7}, \overline{a}_{X_8} \right]$

Las variables básicas resultan:

$$\overline{X}_B = \begin{pmatrix} X_6 \\ X_7 \\ X_8 \end{pmatrix} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; ; \; \overline{C}_B = (50, 50, 50))$$

Las variables no básicas le asignamos valor cero.

$$\overline{X}_N = \overline{0}$$

Los valores para la fila cero de la 1ª tabla Simplex son:

$$Z = \overline{C}_B \, \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} = (50, 50, 50) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 50$$

$$Z_{X_1} - C_{X_1} = \overline{C}_B\,\overline{B}^{-1}\cdot\overline{a}_{X_1} - C_{X_1} = (50,50,50)\cdot\begin{pmatrix}-3\\-10\\1\end{pmatrix} - 0 = -600$$

$$Z_{X_2} - C_{X_2} = -800$$
$$Z_{X_3} - C_{X_3} = -850$$
$$Z_{X_4} - C_{X_4} = -50$$
$$Z_{X_5} - C_{X_5} = -50$$

$$Z_{V'} - C_{V'} = \overline{C}_B\,\overline{B}^{-1}\cdot\overline{a}_{V'} - C_{V'} = (50,50,50)\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} + 1 = -99$$

$$Z_{V''} - C_{V''} = 99$$

La primera tabla queda:

	X1	**X2**	**X3**	**V'**	**V"**	**X4**	**X5**	**X6**	**X7**	**X8**	**LD**
Z	-600	-800	-850	-99	99	-50	-50	0	0	0	50
X6	-3	-9	-16	-1	**1**	-1	0	1	0	0	0
X7	-10	-8	-2	-1	1	0	-1	0	1	0	0
X8	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	1

Aplicando el algoritmo Simplex:

$$Z_K - C_K = \underset{j\in R}{Max}\left(Z_j - C_j\right) = 99 = Z_{V''} - C_{V''}$$

V" entra en la base.

$$V'' = \underset{1\le i\le m}{Min}\left(\frac{b_i}{\tilde{y}_{ik}} : y_{ik} > 0\right) = Min\left(\frac{0}{1};\frac{0}{1}\right) = 0 = \frac{b_1}{\tilde{y}_{1V''}}$$

La variable X_6 sale de la base.

$y_{1V''} = 1$: elemento pivote.

Tras tres iteraciones del algoritmo Simplex llegamos a la solución óptima con:

$X_1 = 2/3$ de las veces debería Mortadelo adoptar la alternativa M_1.

$X_2 = 0$. Mortadelo no debería nunca elegir esta alternativa. (M_2).

$X_3 = 1/3$ de las veces debería adoptar la alternativa M_3.

$V = -22/3$ Valor probabilístico del juego favorable a Filemón. Se trata de un juego no justo porque $V \neq 0$.

Mortadelo, a la vista del resultado debería plantearse hacerse amigo de Rompetechos.

Nótese que el problema hubiera podido simplificarse en su resolución de varias maneras, por ejemplo planteando el problema de programación lineal en forma de minimización, con lo que se hubiera ahorrado dos variables artificiales. También se hubiera ahorrado dos variables artificiales si al resolver tal como se ha hecho se hubieran cambiado las dos primeras restricciones de signo. Otra forma de resolver el problema, para evitar cambios de variable, sería modificar la tabla refiriéndola a Filemón con los valores positivos.

Apéndice

NOMENCLATURA PROGRAMACIÓN LINEAL

• Formato de un problema de programación lineal.

Minimizar (Min) o Maximizar (Max) $Z = C_1 \cdot X_1 + C_2 \cdot X_2 + ... + C_n \cdot X_n$

Sujeto a: (S.a:)

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + ... + a_{1n}X_n \overset{\geq}{\leq} b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + ... + a_{2n}X_n \overset{\geq}{\leq} b_2$$

$$.. \quad .. \quad .. \quad ..$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + ... + a_{mn}X_n \overset{\geq}{\leq} b_m$$

Con $X_1, X_2, ..., X_n \geq 0$

Dicho problema se puede expresar también como:

$$Min. \text{ o } Max.\ Z = \sum_{j=1}^{n} C_j \cdot X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j \overset{\geq}{\leq} b_i; \quad (i = 1...m)$$

Con $X_j \geq 0$ $(j = 1...n)$

• Significado de los elementos.

Z: Función a optimizar (maximizar o minimizar). Se denomina Función Objetivo.

C_j: Coeficiente de coste. Representa el coste o beneficio unitario asociado a una variable X_j. Los coeficientes de coste conforman el vector de costes $\overline{C} = (C_1, C_2,...,C_j,..., C_n)$ de dimensión (1 x n).

X_j: Variable de decisión. Representa a las magnitudes que optimizan la función objetivo, constituyendo las incógnitas del problema. Las variables de decisión se agrupan en el vector de variables de decisión $\overline{X} = (X_1, X_2,...,X_j,..., X_n)^t$ de dimensión (n x 1).

b_i: Elemento de lado derecho. Representa una disponibilidad máxima o un requisito mínimo que ha de cumplirse. Se agrupan en el vector de lado derecho $\overline{b} = (b_1, b_2,..., b_i,..., b_m)^t$ de dimensión (m x 1).

a_{ij}: Coeficientes tecnológicos. Representan la relación existente entre una variable de decisión X_j y un elemento de lado derecho b_i. Son datos del problema y se agrupan en la denominada matriz de restricciones $\overline{A}$ de dimensión (m x n)

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, x_j \gtreqless b_i$: Esta desigualdad representa la i-esima restricción.

$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$: Restricción de no negatividad. Restringe las variables de decisión a valores no negativos.

- Formato Matricial de un problema de programación.

$$Min\,\text{o}\,Max\,Z = \overline{C} \cdot \overline{X}$$

S.a:

$$\overline{A} \cdot \overline{X} \gtreqless \overline{b}$$
$$\overline{X} \geq \overline{0}$$

- Solución Básica Factible de un problema de Programación Lineal.

Sea:

$$\overline{A} = (\overline{B}, \overline{N}); \begin{cases} \overline{A}(m \times n) & : \text{Matriz de restricciones} \\ \overline{B}(m \times m) & : \text{Matriz básica} \\ \overline{N}(m \times (n-m)) & : \text{Matriz no básica} \end{cases}$$

$$\overline{X} = (\overline{X}_B, \overline{X}_N)\,; \begin{cases} \overline{X}(n \times 1) & : \text{Vector de variables de decisión} \\ \overline{X}_B(m \times 1) & : \text{Vector de variables básicas} \\ \overline{X}_N((n-m) \times 1) & : \text{Vector de variables no básicas} \end{cases}$$

Al conjunto $\overline{X} = \begin{pmatrix} \overline{X}_B \\ \overline{X}_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} \\ \overline{0} \end{pmatrix}$ se le denomina Solución Básica.

Si $\overline{X}_B = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b} \geq \overline{0}$ se le denomina Solución Básica Factible.

ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD

• Cambio en el vector de costes.

a) Asociado a una variable X_k no básica:

Sólo cambia el elemento de la fila cero correspondiente a esa variable.

1.- Hallar $\Delta C_k = C'_k - C_k$

2.- Hallar $(Z_k - C_k)' = (Z_k - C_k) - \Delta C_k$

Si $(Z_k - C_k)' > 0 \rightarrow$ Aplicar Simplex Primal.
Si $(Z_k - C_k)' \leq 0 \rightarrow$ Tabla óptima.

b) Asociado a una variable X_B básica:

Cambia toda la fila cero excepto el elemento correspondiente a esa variable.

1.- Calcular $\Delta C_{Bt} = C'_{Bt} - C_{Bt}$ (t: posición en la base de dicha variable)

2.- Hallar los nuevos valores de la fila cero.
$(Z_j - C_j)' = (Z_j - C_j) + \Delta C_{Bt} \cdot y_{tj} = \overline{C}'_B \cdot \overline{y}_j - C_j$

3.- $Z' = Z + \Delta C_{Bt} \cdot \underline{b}_t$

Si $\exists\ (Z_j - C_j)' > 0 \rightarrow$ Aplicar Simplex Primal.
Si $\forall\ (Z_j - C_j)' \leq 0 \rightarrow$ Tabla óptima.

• Cambio en el vector de lado derecho.

Cambia la columna de lado derecho de la tabla Simplex óptima.

1.- Calcular $\Delta\overline{b} = \overline{b}' - \overline{b}$
2.- $\underline{\overline{b}}' = \underline{\overline{b}} + \overline{B}^{-1} \cdot \Delta\overline{b} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{b}'$
3.- $Z' = Z + \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \Delta\overline{b} = \overline{C}_B \cdot \underline{\overline{b}}'$

Si $\underline{\overline{b}}' \geq 0 \rightarrow$ Tabla óptima.
Si $\underline{\overline{b}}' \not\geq 0 \rightarrow$ Aplicar Simplex Dual.

• Cambio en la matriz de restricciones.

a) Asociado a una variable no básica.

Cambia la columna j correspondiente al $\overline{a}_j$ modificado.

1.- Calcular $(Z_j - C_j)' = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_j' - C_j$
2.- Calcular $\overline{y}'_j = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}'_j$

Si $(Z_j - C_j)' > 0 \rightarrow$ Simplex Primal
Si $(Z_j - C_j)' \leq 0 \rightarrow$ Tabla óptima

b) Asociado a una variable básica:

Cambia toda la tabla.

1.- Calcular $(Z_j - C_j)' = \overline{C}_B \cdot \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_j' - C_j$
2.- Calcular $\overline{y}'_j = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}'_j$

Si $y'_{jj} = 0 \rightarrow$ $\overline{a}'_j$ deja de formar parte de la base. Se añade una variable artificial para recuperar ésta.
Si $y'_{jj} \neq 0 \rightarrow$ Pivotamiento sobre el elemento y'_{jj} para tratar de homogeneizar la tabla Simplex.

• Adición de una nueva actividad (X_{n+1}).

Si $(Z_{n+1} - C_{n+1}) > 0 \rightarrow$ Interesa añadirla.
$\overline{y}_{n+1} = \overline{B}^{-1} \cdot \overline{a}_{n+1} \rightarrow$ Aplicar Simplex Primal.

Si $(Z_{n+1} - C_{n+1}) \leq 0 \rightarrow$ No interesa añadirla.

• Adición de una nueva restricción.

Se sustituye el resultado óptimo en dicha restricción para ver si se cumple.

Si la cumple $\longrightarrow$ Tabla óptima.
Si no la cumple $\longrightarrow$ Se añade la restricción a la tabla como una nueva fila y se aplica el método correspondiente.

ANÁLISIS PARAMÉTRICO

• Cambio en el vector de costes.

$\overline{C} = \overline{C} + \lambda \overline{C}'$

Hay un cambio en la fila cero.

1.- Calcular la tabla óptima con $\overline{C}$.
2.- Calcular para las variables no básicas $(Z_j - C_j)$ y $(Z'_j - C'_j)$:

$$(Z_j - C_j)\begin{cases} \text{en la tabla: método relativo.} \\ (Z_j - C_j) = \overline{C}_B \overline{y}_j - C_j\text{: método absoluto} \end{cases}$$

$$(Z'_j - C'_j) = \overline{C}'_B \cdot \overline{y}_j - C'_j$$

3.- Hallar $S = \left\{ j \,/\, (Z'_j - C'_j) > 0 \right\}$

Si $S = \{0\} \rightarrow$ Solución actual óptima hasta $\lambda = \infty$.

4.- $\hat{\lambda} = \underset{j \in S}{Min} \left(\dfrac{-\left(Z_j - C_j\right)}{(Z'_j - C'_j)} \right)$

Solución óptima desde λ anterior hasta $\begin{cases} \lambda + \hat{\lambda}\text{: Método relativo.} \\ \hat{\lambda}\text{: Método absoluto.} \end{cases}$

5.- Hallar los nuevos elementos de la fila cero.

$$(Z_j - C_j) + \lambda \left(Z'_j - C'_j\right)$$
$$Z(\lambda) = \overline{C}_B \cdot \overline{b} + \lambda \overline{C}'_B \cdot \overline{b}$$

6.- Una vez sustituidos en la tabla, calcular la nueva solución óptima alternativa.

7.- Repetir el procedimiento desde el punto 2. con la tabla correspondiente a esa solución óptima alternativa.

• Cambio en el vector de lado derecho.

$\overline{b} = \overline{b} + \lambda \overline{b}'$

Hay un cambio en la columna de lado derecho.

1.- Calcular la tabla óptima con $\overline{b}$.

2.- Calcular:

$$\underline{\overline{b}}\begin{cases}\text{en la tabla: método relativo.}\\ \underline{\overline{b}} = \overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}\text{: método absoluto}\end{cases}$$

$$\underline{\overline{b}}' = \overline{B}^{-1}\cdot\overline{b}'$$

3.- $S=\left\{i/\underline{\overline{b}}'_i<0\right\}$

Si $S=\{0\}\rightarrow$ Solución actual óptima hasta $\lambda=\infty$.

4.- Calcular:

$$\hat{\lambda}=\underset{i\in S}{Min}\left(\frac{\underline{b}_i}{-\underline{b}'_i}\right)$$

Solución óptima desde λ anterior hasta $\begin{cases}\lambda+\hat{\lambda}\text{: método relativo.}\\ \hat{\lambda}\text{: método absoluto.}\end{cases}$

5.- Hallar los nuevos elementos de la columna de lado derecho que serán sustituidos en la tabla Simplex:

$$\overline{X}_B(\lambda)=\underline{\overline{b}}+\lambda\ \underline{\overline{b}}'$$

$$Z(\lambda)=\overline{C}_B\,\underline{\overline{b}}+\lambda\ \ \overline{C}_B\cdot\underline{\overline{b}}'$$

6.- Una vez particularizada la tabla para $\lambda=\hat{\lambda}$ aplicar el método Simplex Dual si es posible. Si no es posible, problema no factible a partir de $\lambda=\hat{\lambda}$.

7.- Repetir el procedimiento desde el punto 2.- con la tabla que resulta de aplicar el Simplex Dual.

PROGRAMACIÓN POR OBJETIVOS

Existen dos tipos de restricciones:

a) No flexibles, expresan una restricción estricta.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i = 1 \ldots m)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \quad (i = 1 \ldots m)$$

b) Flexibles, proceden de los objetivos a alcanzar.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - O_i = y_i^+ - y_i^- \qquad (i = 1 \ldots m)$$

O_i: Objetivo deseado
y_i^+: desviaciones por exceso del objetivo
y_i^-: desviaciones por defecto del objetivo

Siempre se cumple que: $y_i^+ \cdot y_i^- = 0$; $y_i^+, y_i^- \geq 0$

En la programación lineal se pretende optimizar un objetivo, en la programación por objetivos se pretende minimizar las desviaciones respecto a los valores deseados en los distintos objetivos.

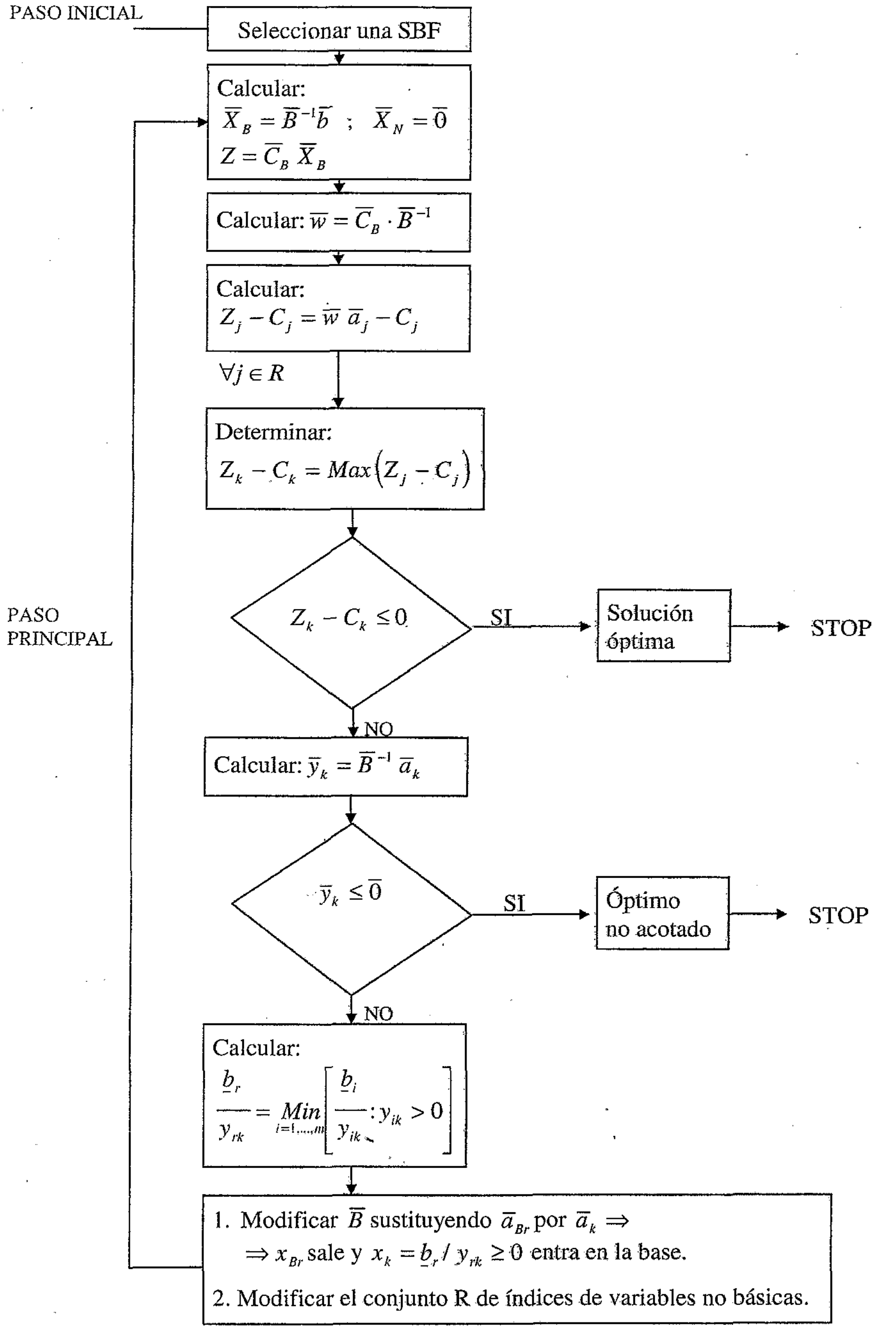
Si se desea O_1 máximo, O_2 mínimo y O_3 exactamente, la función objetivo sería:

$$Min\, Z = y_1^+ + y_2^- + y_3^+ + y_3^-$$

Si se establecen prioridades en los objetivos:

$$Min\, Z = M\, y_1^+ + N\, y_2^- + P\, y_3^+ + P\, y_3^- \text{ con } M >> N >> P.$$

ALGORITMO MÉTODO SIMPLEX



Fuente: De León (1988)

ALGORITMO SIMPLEX PARA VARIABLES ACOTADAS

PASO INICIAL

Encontrar una SBF inicial

Formar la siguiente tabla.

	Z	$\overline{X}_B$	$\overline{X}_{N_1}$	$\overline{X}_{N_2}$	LD
Z	1	$\overline{0}$	$\overline{C}_B\,\overline{B}^{-1}\,\overline{N}_1-\overline{C}_{N_1}$	$\overline{C}_B\,\overline{B}^{-1}\,\overline{N}_2-\overline{C}_{N_2}$	$\hat{Z}$
$\overline{X}_B$	$\overline{0}$	$\overline{I}$	$\overline{B}^{-1}\,\overline{N}_1$	$\overline{B}^{-1}\,\overline{N}_2$	$\hat{\underline{b}}$

donde:

$$\hat{Z}=\overline{C}_B\,\overline{B}^{-1}\,\overline{b}-(\overline{C}_B\,\overline{B}^{-1}\,\overline{N}_1-\overline{C}_{N_1})\,\overline{l}_{N_1}-(\overline{C}_B\,\overline{B}^{-1}\overline{N}_2-\overline{C}_{N_2})\,\overline{u}_{N_2}$$

$$\hat{\underline{b}}=\overline{B}^{-1}\overline{b}-\overline{B}^{-1}\,\overline{N}_1\,\overline{l}_{N_1}-\overline{B}^{-1}\,\overline{N}_2\,\overline{u}_{N_2}$$

PASO PRINCIPAL

$$\alpha_k=Max\left\{\underset{j\in R_1}{Max}\left(Z_j-C_j\right),\ \underset{j\in R_2}{Max}\left(C_j-Z_j\right)\right\}$$

$\alpha_k\leq 0$ — SI → Solución Óptima

NO

$k\in R_1$

$$\gamma_1=\begin{cases}\underset{1\leq i\leq m}{Min}\left\{\dfrac{\underline{b}_i-l_{Bi}}{y_{ik}};\,y_{ik}>0\right\};\overline{y}_k\not\leq\overline{0}\\ \infty\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \overline{y}_k\leq 0\end{cases}$$

$$\gamma_2=\begin{cases}\underset{1\leq i\leq m}{Min}\left\{\dfrac{u_{Bi}-\underline{b}_i}{-y_{ik}};\,y_{ik}<0\right\};\overline{y}_k\not\geq\overline{0}\\ \infty\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \overline{y}_k\geq\overline{0}\end{cases}$$

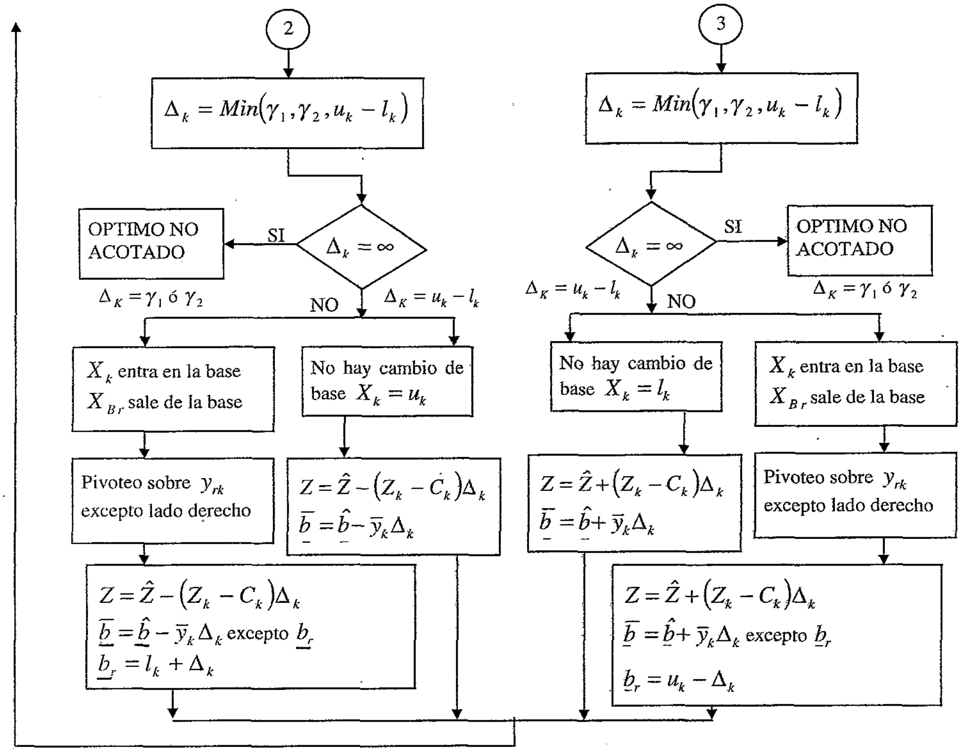
(2)

$k\in R_2$

$$\gamma_1=\begin{cases}\underset{1\leq i\leq m}{Min}\left\{\dfrac{\underline{b}_i-l_{Bi}}{-y_{ik}};\,y_{ik}<0\right\};\overline{y}_k\not\geq\overline{0}\\ \infty\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \overline{y}_k\geq\overline{0}\end{cases}$$

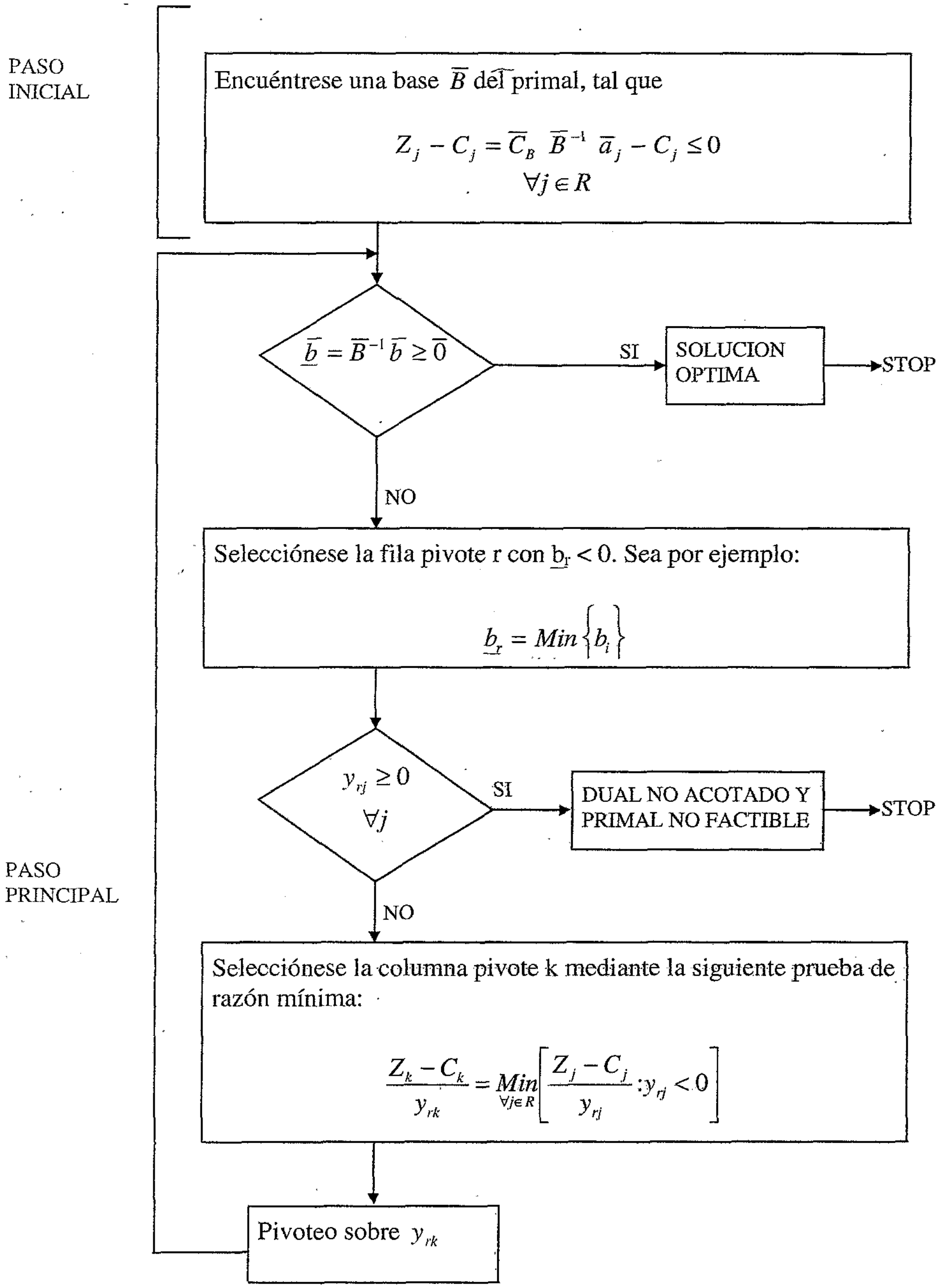
$$\gamma_2=\begin{cases}\underset{1\leq i\leq m}{Min}\left\{\dfrac{u_{Bi}-\underline{b}_i}{y_{ik}};\,y_{ik}>0\right\};\overline{y}_k\not\leq\overline{0}\\ \infty\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \overline{y}_k\leq\overline{0}\end{cases}$$

(3)



Fuente: De León (1988)

ALGORITMO SIMPLEX DUAL



Fuente: De León (1988)

BIBLIOGRAFÍA

BAZARAA, M. Y JARVIS, J. (1981). *Programación Lineal y Flujo en redes*. Limusa.

BRONSON, R. (1983). *Investigación de Operaciones. Teoría y 310 Problemas Resueltos*. Schaum-McGraw-Hill.

DOMÍNGUEZ MACHUCA, J. A.; DURBÁN OLIVA, S. Y MARTÍN ARMARIO, E. (1986). *El Subsistema Productivo de la Empresa*. Pirámide.

HILLER, F. Y LIEBERMAN, G. (1989). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill.

LEÓN PÉREZ, S. (1988). *Optimización mediante Programación Lineal*. E.T.S.I.I. de Las Palmas.

LEVIN, R. Y KIRKPATRICK, C. (1983). *Enfoques Cuantitativos a la Administración*. Compañía Editorial Continental, S.A. (CECSA)

MARKLAND, R. Y SWEIGART, J. (1987). *Quantitative Methods: Applications to Managerial Decision Making*. John Wiley & Sons.

MARTÍN DÁVILA, M. (1987). *Métodos Operativos de Gestión Empresarial*. Pirámide.

RENDER, B. Y STAIR R. (1991). *Quantitative Analysis for Management*. Allyn and Bacon.

SARABIA VIEJO, A. (1979). *Problemas de Investigación Operativa*. ICAI.

El autor. Javier Osorio es Ingeniero Industrial y Doctor en Ciencias Económicas y Empresariales. Actualmente ocupa el puesto de profesor titular de universidad, impartiendo las asignaturas de Investigación Operativa II en la E.T.S. de Ingenieros Industriales de Las Palmas y de Sistemas de Información para la Dirección en la Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales, perteneciente también a la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria. Es coautor de los libros *Information Technology for Educational Management* (Chapman & Hall, 1995) y *SISTRAT: Un sistema de información de apoyo a la formulación de estrategias empresariales* (Civitas, 1998).

La obra. Problemas de Programación Lineal ofrece unos contenidos que suponen un cambio en el enfoque tradicional al abordar la parte práctica de la programación lineal. En este sentido, nos encontramos ante un conjunto de problemas propios de un nivel avanzado de conocimientos en esta materia en los que se pretende integrar, de forma homogénea e innovadora, distintas herramientas propias de este campo, con objeto de ofrecer una visión global de sus posibilidades como un excelente medio de apoyo en la toma de decisiones relacionadas con diversos aspectos organizativos de la empresa. Esta colección de problemas ha sido especialmente diseñada como complemento a los contenidos teóricos impartidos en asignaturas relacionadas con la Investigación Operativa y los Métodos Cuantitativos de Gestión en los planes de estudio de Escuelas Técnicas Superiores, Facultades de Matemáticas y Ciencias Económicas y Empresariales.

SERVICIO DE PUBLICACIONES