

**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA**

**DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA APLICADA**



**TESIS DOCTORAL**

**ESTADÍSTICA BAYESIANA EN CREDIBILIDAD CON  
APLICACIÓN A LA FIJACIÓN DE PRIMAS DE  
SEGUROS**

**EMILIO GÓMEZ DÉNIZ**

Las Palmas de Gran Canaria, Septiembre de 1996

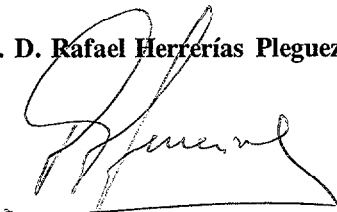
1/1906/97

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
UNIDAD DE TERCER CICLO Y POSTGRADO


Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Rector Magfco. de esta Universidad, el/a aspirante expuso esta TESIS DOCTORAL.

Terminada la lectura y contestadas por el/a Doctorando/a las objeciones formuladas por los señores miembros del Tribunal, éste calificó dicho trabajo con la nota de APTO CUM LAUDE POR UNANIMIDAD Las Palmas de Gran Canaria a 1 de octubre de 1996.

El/a Presidente/a: Dr. D. Rafael Herrerías Pleguezuelo,



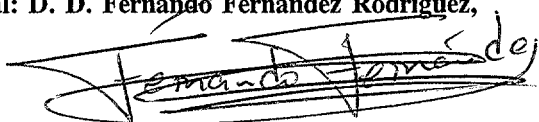
El/a Secretario/a: Dra. Dña. Dolores-Rosa Santos Peñate,



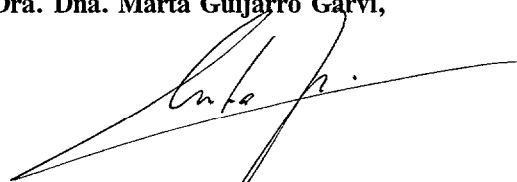
El/a Vocal: Dr. D. Antonio Alegre Escolano,



El/a Vocal: D. D. Fernando Fernández Rodríguez,



El/a Vocal: Dra. Dña. Marta Guijarro Garví,



El Doctorando: D. Emilio Gómez Déniz,





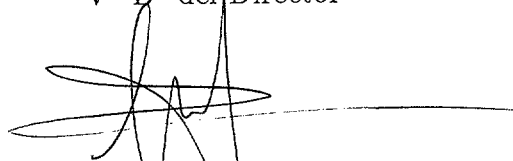
UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE G.C.

Facultad de CC. Económicas y Empresariales  
Departamento de Economía Aplicada

Estadística Bayesiana en  
Credibilidad con Aplicación a la  
Fijación de Primas de Seguros.

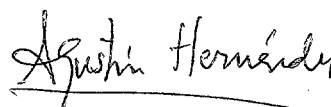
Memoria presentada para  
optar al grado de doctor por  
Emilio Gómez Déniz.

Vº Bº del Director



Fdo. Dr. Francisco J. Vázquez Polo  
Universidad de Las Palmas de G.C.

Vº Bº del Codirector



Fdo. Dr. Agustín Hernández Bastida  
Universidad de Granada

Las Palmas de G.C., septiembre de 1996



Memoria de **Tesis Doctoral** leída en el Departamento de Economía Aplicada de la Universidad de Las Palmas de G. C. el día:

4 / 10 / 96

con el siguiente Tribunal:

Presidente:

Prof. Dr. D. RAFAEL HERREROS PLEGUEZUELO

Universidad de GRANADA

Secretario:

Prof. Dr. D. DOLORES ROSA SANTOS PERATE

Universidad de LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Vocales:

Prof. Dr. D. ANTONIO ALEBRE ESCOLANO

Universidad de BARCELONA

Prof. Dr. D. FERNANDO FERNANDEZ RODRIGUEZ

Universidad de LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Prof. Dr. D. MARTA GUIJARRO GARU

Universidad de CANTABRIA

Obtuvo la calificación de

APTO CON LAUDE POR UNANIMIDAD



Quiero expresar mi agradecimiento a los doctores D.Francisco J. Vázquez Polo (Universidad de Las Palmas de Gran Canaria) y D.Agustín Hernández Bastida (Universidad de Granada) por las propuestas, sugerencias y correcciones que han hecho posible la realización de esta Memoria. Pero sobre todo quiero agradecerles la confianza que depositaron en mí al proponerme la realización de una Tesis Doctoral.

Agradezco la colaboración prestada por el profesor Dr.Antonio Alegre Escolano, Director del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial de la Universidad de Barcelona por sus valiosos comentarios.

Al profesor Stuart A. Klugman (Universidad de Drake) por sus detalladas explicaciones y por el permiso que me concedió para utilizar los datos que se recogen en su libro *Bayesian Statistics in Actuarial Science* y que aparecen en los apéndices B y C de esta memoria.

A mis compañeros de la Sección de Métodos Matemáticos en la Economía del Departamento de Economía Aplicada de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria por las muestras de apoyo manifestadas, así como al resto de mis compañeros del Departamento de Economía Aplicada de esta Universidad.

A la Fundación Universitaria de Las Palmas por una beca que me fue concedida en el curso académico 95-96.

Por último, quiero agradecer al Departamento de Economía Aplicada de la Universidad de Granada por aceptar mi estancia en dicha Universidad.





# Índice

<b>Prólogo.</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducción a la Teoría de la Credibilidad.</b>	<b>3</b>
1.1 Principios de cálculo de primas y propiedades. . . . .	6
1.2 El modelo colectivo frente al modelo jerárquico. . . . .	16
1.3 Objetivos de la Memoria. . . . .	21
<b>2 Resultados del análisis bayesiano robusto.</b>	<b>27</b>
2.1 Rango de variación de la media a posteriori de $g(\theta)$ . . . . .	29
2.2 Rango de variación del cociente de medias a posteriori. . . . .	34
2.3 Sensibilidad relativa. . . . .	39
2.4 Algunos aspectos del análisis bayesiano jerárquico. . . . .	40
2.4.1 Introducción. . . . .	40
2.4.2 Robustez en modelos bayesianos jerárquicos. . . . .	43
2.4.3 Distribuciones arbitrarias y unimodales . . . . .	44
<b>3 El modelo colectivo.</b>	<b>47</b>
3.1 El modelo colectivo no compuesto. . . . .	48
3.1.1 Principio de prima neta. . . . .	55
3.1.2 Principio de utilidad exponencial. . . . .	63
3.1.3 Principio Esscher. . . . .	66
3.1.4 Principio de varianza. . . . .	71
3.1.5 Ilustraciones numéricas. . . . .	75
3.2 El modelo colectivo compuesto. . . . .	93
3.2.1 Principio de prima neta. . . . .	96
3.2.2 Principio de utilidad exponencial. . . . .	98
3.2.3 Principio Esscher. . . . .	100

---

3.2.4	Principio de varianza. . . . .	103
3.2.5	Ilustraciones numéricas. . . . .	105
<b>4</b>	<b>El modelo jerárquico.</b>	<b>129</b>
4.1	Introducción. . . . .	129
4.2	El modelo jerárquico normal. . . . .	132
<b>5</b>	<b>Conclusiones y líneas abiertas.</b>	<b>145</b>
5.1	Conclusiones. . . . .	145
5.2	Sobre la distribución del coste total. . . . .	149
5.3	Sobre la clase $\Gamma$ . . . . .	149
5.4	Sobre los principios de cálculo de primas. . . . .	150
5.5	Sobre la consideración de un modelo no estacionario. . . . .	150
5.6	Sobre el modelo jerárquico. . . . .	150
5.7	Sobre las propiedades. . . . .	151
<b>A</b>	<b>Cálculo de la densidad predictiva en el caso normal-normal.</b>	<b>153</b>
<b>B</b>	<b>Datos del escenario 1. Modelo jerárquico.</b>	<b>157</b>
<b>C</b>	<b>Datos del escenario 2. Modelo jerárquico.</b>	<b>159</b>
<b>D</b>	<b>Muestra para el escenario 2. Modelo jerárquico.</b>	<b>171</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>173</b>

# Lista de Figuras

3.1	Gráfica de algunos R.S. para el principio de prima neta. Casos Poisson-Gamma, Binomial Negativa-Beta, Binomial-Beta y Gamma-Gamma. . . . .	89
3.2	Gráfica de algunos R.S. para el principio de prima neta. Casos Normal-Normal y Exponencial-Gamma. . . . .	90
3.3	Gráfica de algunos R.S. para el principio de utilidad exponencial. Casos Poisson-Gamma y Normal-Normal. . . . .	91
3.4	Gráfica de algunos R.S. para el principio Esscher. Casos Poisson-Gamma y Normal-Normal. . . . .	92
3.5	Gráfica de algunos R.S. para el principio de varianza. Casos Poisson-Gamma, Gamma-Gamma y Exponencial-Gamma. . . . .	92
3.6	Gráfica de los R.S. para los cuatro principios de cálculo de primas en el escenario 1. . . . .	116
3.7	Gráfica de $R(\theta)$ en el modelo de contaminaciones con todas las distribuciones. Comparación entre el principio de prima neta y de utilidad exponencial. . . . .	117
3.8	Gráfica de $R(\theta)$ en el modelo de contaminaciones con todas las distribuciones. Principio de prima neta para los grados de contaminación del 5% y del 10%. . . . .	118
3.9	Gráfica de $R(\theta)$ en función de $\alpha$ . Principio de utilidad exponencial.	119
3.10	Gráfica de $R(\theta)$ en función de $\lambda$ . Principio de utilidad exponencial.	120
3.11	Distribución a priori y a posteriori de $\theta$ . . . . .	120
3.12	Gráfica de los R.S. para los cuatro principios de cálculo de primas en el escenario 2. . . . .	126
3.13	Gráfica de $S(\theta)$ en el modelo de contaminaciones con todas las distribuciones. Principio Esscher para los grados de contaminación del 5% y del 10%. . . . .	128



# Lista de Tablas

1.1	Principios en su versión verdadera, a priori y a posteriori. . . . .	12
1.2	Cuatro principios y las propiedades que verifica la verdadera prima ( $P$ ). . . . .	15
1.3	Cuatro principios y las propiedades que verifica la prima a priori ( $P'$ ) y la prima a posteriori ( $P^*$ ). . . . .	16
1.4	Modelo Jerárquico. . . . .	20
3.1	Distribuciones discretas y continuas. . . . .	49
3.2	Pares de distribuciones conjugadas. . . . .	50
3.3	Prima verdadera, a priori y a posteriori para distintas verosimilitudes y distribuciones a priori. Principio de prima neta. . . . .	53
3.4	Prima verdadera, a priori y a posteriori para distintas verosimilitudes y distribuciones a priori. Principio de utilidad exponencial. . . . .	53
3.5	Prima verdadera, a priori y a posteriori para distintas verosimilitudes y distribuciones a priori. Principio Esscher. . . . .	53
3.6	Prima verdadera, a priori y a posteriori para distintas verosimilitudes y distribuciones a priori. Principio de varianza. . . . .	54
3.7	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Poisson-Gamma. . . . .	77
3.8	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Binomial Negativa-Beta. . . . .	78
3.9	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Binomial-Beta. . . . .	78
3.10	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Gamma-Gamma. . . . .	79

3.11	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Normal-Normal. . . . .	80
3.12	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Exponencial-Gamma. . . . .	81
3.13	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo no compuesto. Caso Poisson-Gamma. . . . .	82
3.14	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo no compuesto. Caso Normal-Normal. . . . .	83
3.15	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo no compuesto. Caso Poisson-Gamma. . . . .	84
3.16	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo no compuesto. Caso Normal-Normal. . . . .	85
3.17	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo no compuesto. Caso Poisson-Gamma. . . . .	86
3.18	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo no compuesto. Caso Gamma-Gamma. . . . .	87
3.19	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo no compuesto. Caso Exponencial-Gamma. . . . .	88
3.20	Intervalo de variación de $P^*$ para $\bar{x} = 2.5$ y $\varepsilon = 0.05$ . . . . .	91
3.21	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_1$ . Escenario 1. . .	107
3.22	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_2$ . Escenario 1. . .	108
3.23	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_1$ . Escenario 1. . . . .	109
3.24	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_2$ . Escenario 1. . . . .	110
3.25	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_1$ . Escenario 1. . .	111
3.26	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_2$ . Escenario 1. . .	112
3.27	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_1$ . Escenario 1. . .	113

3.28	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_2$ . Escenario 1. . .	114
3.29	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_1$ y distintos $\lambda$ y $\alpha$ . Escenario 1. . . . .	115
3.30	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con $Q_2$ y distintos $\lambda$ y $\alpha$ . Escenario 1. . . . .	115
3.31	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo compuesto. Escenario 2. . . . .	122
3.32	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Escenario 2. . . . .	123
3.33	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo compuesto. Escenario 2. . . . .	124
3.34	Intervalo de variación de $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo compuesto. Escenario 2. . . . .	125
3.35	Intervalo de variación de los R.S. para los distintos principios, muestras y clase contaminante en el modelo colectivo compuesto. . . . .	127
4.1	Estimadores de credibilidad a posteriori. . . . .	136
4.2	Varianzas a posteriori e intervalos de confianza. . . . .	138
4.3	Intervalo de variación del estimador de credibilidad a posteriori. Escenario 1. Casos con $\Gamma_A$ y $\Gamma_U$ . . . . .	138
4.4	Intervalo de variación del estimador de credibilidad a posteriori. Escenario 1. Caso con $\Gamma_\epsilon^U$ . . . . .	139
4.5	Estimadores de credibilidad a posteriori. Escenario 2. . . . .	143
4.6	Frecuencias predichas. Escenario 2. . . . .	143
4.7	Varianzas e intervalos de confianza al 90%. Escenario 2. . . . .	143
4.8	Intervalo de variación del estimador de credibilidad a posteriori. Escenario 2. Casos con $\Gamma_A$ y $\Gamma_U$ . . . . .	144





# Prólogo.

En la abundante literatura acerca de la Teoría de la Credibilidad aparecida desde principios de siglo y ya desde hace algunas décadas en revistas especializadas (Insurance:Mathematics & Economics, Astin Bulletin, etc.) el problema de la estimación de primas de seguros ha sido abordado desde el punto de vista de la estadística clásica y bayesiana. Sin embargo, y en un contexto bayesiano, un estudio del rango de variación de la prima cuando el actuario tiene dificultad en la especificación de una única distribución a priori es difícil encontrarlo en la literatura.

El problema que se aborda en esta Memoria es el de un análisis de sensibilidad bayesiano en la Teoría de la Credibilidad. Este análisis nos permitirá decidir si los principios de cálculo de primas son robustos frente a imprecisiones en la especificación de la información a priori del actuario, en particular nos permitirá jerarquizar los distintos sistemas de cálculo de primas según su robustez.

La Memoria está estructurada en cinco capítulos, de los que cabe destacar en cada uno de ellos los siguientes aspectos. En el capítulo 1 se exponen los conceptos básicos que se manejan en Teoría de la Credibilidad, los modelos con los que se trabaja y los objetivos detallados que se persiguen con la Memoria. En el capítulo 2 se exponen los resultados del análisis bayesiano robusto que precisaremos para cumplir con los objetivos propuestos. En el capítulo 3 se realiza un análisis de sensibilidad bayesiano para el modelo colectivo de la Teoría de la Credibilidad (modelo colectivo compuesto y no compuesto). En el capítulo 4 el análisis de sensibilidad se realiza ahora en el modelo individual o jerárquico. El capítulo 5 presenta las conclusiones y líneas de trabajo relacionadas con esta Memoria que están siendo abordadas. En el Apéndice A se calcula la predictiva para el caso normal-normal del modelo jerárquico. Los Apéndices B, C y D exponen datos que se utilizarán en el modelo jerárquico.



# Capítulo 1

## Introducción a la Teoría de la Credibilidad.

El *seguro* es un servicio de seguridad ofrecido por una unidad económica o ente asegurador (sociedad anónima, mutua o cooperativa de seguros) a un cliente. Jurídicamente se trata de un convenio oneroso por el que se establece la transferencia total o parcial a otra entidad -distinta de la que puede sufrirlos- de las consecuencias económicas de determinados siniestros. El contrato en que se materializa este convenio se denomina *póliza de seguro* y el precio del servicio de seguridad es la *prima de seguro*, que es función del riesgo asegurable y de los restantes factores que integran el coste de la empresa, denominándose *prima pura* a la parte de la prima que atiende exclusivamente a la cobertura del riesgo. Si un riesgo de una cartera de riesgos es demasiado grande para una compañía, pasará parte del mismo a otra u otras compañías, dando origen a los *reaseguros*.

El término *credibilidad* fue introducido en la matemática actuarial como una medida de la creencia que el actuario considera se debe dar a un cuerpo particular de experiencia con el objetivo de desarrollar una tarifa. Según *Hickman (1974)* la Teoría de la Credibilidad, a partir de ahora T.C., es *una colección de ideas concernientes al ajuste sistemático de las primas de seguros a medida que se obtiene la experiencia de siniestralidad*. El objetivo de la T.C. consiste en agrupar las pólizas referentes a un mismo riesgo con una serie de características comunes en un colectivo, al cual le corresponde como

tal una determinada prima colectiva. Pero, a su vez, cada póliza tiene un conjunto de características específicas que la diferencian de las demás pólizas, características que en la mayoría de los casos son inobservables o difíciles de cuantificar, pero que se deben tener en cuenta a la hora de calcular las primas de riesgo individuales. La T.C. estima dichas primas basándose en la información pasada de la experiencia de siniestralidad, y las fórmulas obtenidas son, en muchas ocasiones, una suma ponderada de la prima colectiva y la media de las indemnizaciones pagadas; las formulaciones obtenidas se denominan *fórmulas de credibilidad* y el factor de ponderación utilizado *factor de credibilidad*.

El origen de la T.C. se remonta a los años que precedieron a la Primera Guerra Mundial, cuando algunas empresas norteamericanas, con muchos asalariados y baja siniestralidad, presionaron para que se les reconociera este hecho en el importe de las primas a pagar. Las compañías aseguradoras usaban entonces procedimientos credibilísticos justificados teóricamente más tarde por los actuarios. Desde principios de siglo se propuso estimar la prima pura verdadera,  $x$ , de un empleado a través de la siguiente expresión:

$$\hat{x} = Z \cdot \hat{p} + (1 - Z) \cdot p,$$

donde:

- $p$ : Prima calculada para una clase ocupacional particular.
- $\hat{p}$ : Prima basada en la experiencia individual para un empleado.
- $Z$ : Factor de credibilidad que mide la importancia que se le da a la experiencia individual y a la del colectivo.

En cualquier modelo de T.C. pueden considerarse los parámetros del proceso de reclamaciones como constantes o como variables aleatorias; en el primer caso el modelo será acorde con la estadística tradicional (concepción frecuentista de la probabilidad) y en el segundo caso con la estadística bayesiana (concepción subjetiva de la probabilidad). Hay autores como *Bühlmann*, *Freifelder*, *Klugman*, *Makov* y otros que defienden abiertamente la aproximación bayesiana frente a otros como *Margolin* que se oponen a la misma. Sin embargo no podemos decir que existan dos escuelas en T.C., la clásica y la bayesiana, sino que existe una separación que se debe en parte a las distintas situaciones prácticas en que nos encontremos. En algunas ocasiones

los juicios subjetivos no pueden evitarse; por ejemplo cuando una compañía introduce una nueva clase de cobertura. En este caso, el actuario deberá realizar una valoración inicial del riesgo en base al conocimiento de otros riesgos similares. La prima obtenida inicialmente podrá ir ajustándose a medida que se disponga de experiencia.

Desde el punto de vista actuarial los seguros se dividen en *vida y no vida*, centrándose nuestro trabajo en los segundos, también denominados *seguros generales*. El estudio de estos seguros se aleja bastante del enfoque clásico de los primeros ya que incorpora técnicas más rigurosas del cálculo de probabilidades y la estadística matemática. En el marco legal español los seguros generales se clasifican entre otros en: Accidentes, Enfermedad, Vehículos terrestres, Vehículos ferroviarios, Aeronaves, Defensa jurídica, Asistencia en viajes, etc.

Sus características fundamentales son, en comparación con los seguros de vida:

1. Son operaciones a corto plazo. En la mayoría de los casos la duración es anual, renovable tácitamente, por lo que el tipo de interés no juega el papel fundamental que desempeña en los seguros de vida.
2. Las probabilidades de los sucesos que dan lugar al pago de las indemnizaciones no dependen, como en los seguros de vida, del factor edad sino que existen multitud de factores que influyen en el acaecimiento del hecho que dan lugar a una mayor complejidad en los problemas de tarificación. Por ejemplo, en seguros de automóviles existen como factores de riesgo la clase del vehículo, zona de circulación, uso al que se destina, datos del conductor, etc.
3. Los problemas de estabilidad son más complejos que en los seguros de vida, ya que la fluctuación en torno a los valores medios, las primas, es mayor.

## 1.1 Principios de cálculo de primas y propiedades.

La prima es el precio para el seguro (o reaseguro) vendido por la compañía aseguradora. De forma reducida, una prima mínima técnica está compuesta de los siguientes elementos (*Capítulo 4, sección 2, artículo 51 del Reglamento de la Ley de Seguros*):

- Prima pura de riesgo.
- Sobreprima de seguridad.
- Costo adicional para el beneficio.

En resumen, la prima o precio del servicio es el coste que para la empresa puede suponer los siniestros más el margen de beneficio. En nuestro trabajo nos centraremos siempre en el primer y segundo elemento y nunca haremos mención al tercero.

El precio correcto, que es llamado *rating*, es vital, pues si es demasiado bajo representa una pérdida para la compañía y si es demasiado alto se pierde competitividad frente a otras. Por tanto una de las labores del actuario consiste en encontrar métodos de cálculo de primas, generalmente llamados en la literatura actuarial *principios de cálculo de primas*.

Para un actuario un riesgo es lo mismo que una variable aleatoria; si denotamos por  $X$  la variable aleatoria ( $X$  varía en el espacio paramétrico  $\mathcal{X}$ ) tamaño de siniestro (número medio de siniestros o indemnización media), un procedimiento de cálculo de prima se define como sigue <sup>1</sup>.

### **Definición 1 (de principio de cálculo de prima (Gerber (1979)))**

*Un principio de cálculo de prima es una función  $H$  que asigna a un riesgo  $X$  un número real  $P = H(X)$ , que se denomina la prima asignada al riesgo  $X$ .*

---

<sup>1</sup>La definición 1 está extraída del libro de Gerber, y definiciones similares pueden encontrarse en Freifelder (1974), Straub (1992), etc.

La interpretación práctica de esta definición es la siguiente: para algún riesgo  $X$  el asegurador está dispuesto a recibir  $P$  como contrapartida al pago aleatorio de  $X$ . Por tanto la ganancia del asegurador es  $P - X$ , y es una variable aleatoria.

Ahora sea  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  una función de pérdida que atribuye a algún  $(x, P) \in \mathbb{R}^2$  la pérdida sostenida por un decisor que toma la acción  $P$  y se encuentra con el resultado  $x$  de algún experimento aleatorio. A partir de aquí se define la *verdadera prima individual* de la siguiente manera <sup>2</sup>.

**Definición 2 (de verdadera prima individual (Heilmann (1989)))**

Dados un riesgo  $X$  con función de distribución  $F(x)$  y una función de pérdida  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la verdadera prima individual es el valor de  $P$  que minimiza la pérdida esperada

$$\int_{\mathcal{X}} L(x, P) \cdot dF(x) = E[L(X, P)],$$

donde  $x$  es el resultado del experimento aleatorio  $X$  y  $P$  la prima cobrada por tomar  $x$ .

En la mayoría de las ocasiones el mínimo se determina diferenciando directamente la expresión anterior e igualando a cero. Esta metodología de cálculo de prima mediante funciones de pérdidas fue propuesta por *Heilmann (1989)*, obteniendo de esta manera los principios de cálculo de primas que ya se utilizaban y otros nuevos. En realidad resulta indiferente trabajar con esta metodología que hacerlo con funciones de utilidad aunque es más cómoda la primera; en el primer caso el decisor intenta minimizar la pérdida esperada y en el segundo maximizar la utilidad esperada. El valor de  $P$  obtenido de esta manera lo denominaremos a partir de ahora *verdadera prima individual*.

Las funciones de pérdidas que conducen a los principios de cálculo de primas más utilizados en la literatura actuarial son:

1. Si  $L(x, P) = (x - P)^2$ , entonces:

$$P = E_F[X],$$

<sup>2</sup>Una definición alternativa basada en funciones de utilidad está propuesta en *Freifelder (1974)*, y conduce al mismo resultado.



constituye el *principio de prima neta* o de *equivalencia*.

2. Si  $L(x, P) = \frac{1}{\alpha}(e^{\alpha x} - e^{\alpha P})^2$  con  $\alpha > 0$ , entonces:

$$P = \frac{1}{\alpha} \text{Log} E_F [e^{\alpha X}],$$

constituye el *principio de utilidad exponencial*

Observemos que este principio de cálculo de prima viene dado en términos del logaritmo de la función generatriz de momentos de la variable aleatoria  $X$ . En Teoría de la Decisión a  $\alpha$  se le denomina *constante de aversión al riesgo* (también llamada medida de Arrow-Pratt) asociada al decisor que toma la función de pérdida  $L(x, P)$ , en el sentido de que cuanto mayor es  $\alpha$  más adverso al riesgo será el decisor (en nuestro caso la compañía aseguradora). Los valores más usuales de este parámetro en los ambientes de decisión oscilan entre 0 y 0.00004.

3. Si  $L(x, P) = e^{\alpha x}(x - P)^2$  con  $\alpha > 0$ , entonces:

$$P = \frac{E_F [X e^{\alpha X}]}{E_F [e^{\alpha X}]},$$

constituye el *principio Esscher*,  $\alpha$  tiene la misma interpretación que en el caso anterior. Observemos que ahora  $P$  se obtiene como el cociente entre la derivada primera de la función generatriz de momentos y la propia función generatriz, en el punto  $\alpha$ .

4. Si  $L(x, P) = x(x - P)^2$ , entonces:

$$P = \frac{E_F [X^2]}{E_F [X]} = E_F [X] + \frac{\text{Var}_F [X]}{E_F [X]},$$

constituye el *principio de varianza*.

La ventaja de este principio es que no sólo estima la siniestralidad media del riesgo, sino que nos proporciona también el recargo de seguridad que debe llevar la prima pura para atender a las desviaciones aleatorias de la siniestralidad. En muchos textos la expresión de  $P$  se presenta como  $P = E[X] + \delta \cdot \text{Var}[X]$ , con  $\delta > 0$  un parámetro, y se dice entonces que

la sobreprima de seguridad es proporcional a la varianza. Esta expresión resultará muy útil en ocasiones en la que interese demostrar ciertas propiedades para los principios de cálculo de primas y así lo haremos nosotros más adelante.

Existen más principios de cálculo de primas pero nosotros en esta Memoria sólo vamos a considerar estos cuatro (ver Gerber (1979)).

Observemos que todas las funciones de pérdidas consideradas son del tipo

$$L(x, P) = g(x) \cdot [h(x) - h(P)]^2. \quad (1.1)$$

Si  $h(x)$  es estrictamente creciente y diferenciable (luego invertible), y  $g(x)$  es no negativa, entonces para todo riesgo  $X$  con  $E_F[g(x)] < \infty$ ,  $E_F\|g(x) \cdot h(x)\| < \infty$ , se tiene que

$$H[X] = h^{-1} \left[ \frac{E_F[g(x) \cdot h(x)]}{E_F[g(x)]} \right],$$

y las fórmulas de primas obtenidas son ilustraciones de este resultado. Además, si  $h(x) = x$ , i.e.  $L(x, P) = g(x) \cdot (x - P)^2$ , y  $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ , entonces  $g(x)$  es creciente (decreciente) si y sólo sí para todo riesgo  $X$  con  $Prob[X > 0] = 1$

$$H[X] = \frac{E_F[g(x) \cdot x]}{E_F[g(x)]} \geq (\leq) E_F[X]. \quad (1.2)$$

La importancia de este último resultado está en que nos podrá facilitar la demostración de ciertas propiedades de los principios de cálculo de primas que veremos más adelante.

Observemos que estos principios pueden desarrollarse siempre que la distribución del riesgo,  $F(x)$  sea conocida. Supongamos ahora que la distribución  $F(x)$  está especificada bajo un parámetro desconocido  $\theta$  que varía en un espacio paramétrico  $\Theta$  (i.e.  $F(x | \theta)$ ) con distribución a priori  $\pi_0(\theta)$ , denominada usualmente en el escenario actuarial *función estructura*; en este escenario la *prima a priori* se define de la siguiente forma.

**Definición 3 (de prima a priori (Freifelder (1974)))** *Dados un riesgo  $X$  con distribución  $F(x | \theta)$ , siendo  $\theta$  un parámetro desconocido con distribución a priori  $\pi_0(\theta)$ , y una función de pérdida  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , la prima a priori es el valor  $P'$  que minimiza la pérdida esperada*

$$\int_{\Theta} L(P, P') \pi_0(\theta) d\theta,$$

con  $P$  la verdadera prima individual definida anteriormente.

La prima a priori tal y como está definida arriba representa la mejor decisión que estima la verdadera prima (obviamente desconocida). Observemos que para calcularla se precisará que el actuario pueda definir una distribución de probabilidad (distribución a priori) para el valor del parámetro desconocido ( $\theta$ ), para lo que será fundamental la experiencia que para el actuario le supone lo acontecido en los períodos precedentes, o bien lo acontecido en otros contratos similares.

Para finalizar con este apartado expondremos el caso en el que la distribución de  $X$  está especificada bajo un parámetro desconocido, y donde la tarificación incorpora experiencia de siniestralidad individual.

En este caso el análisis bayesiano nos permitirá combinar la información inicial o a priori que se tiene sobre el parámetro  $\theta$  con la información muestral para obtener la distribución a posteriori. Si  $\pi_0(\theta)$  es la densidad a priori (que refleja las creencias sobre  $\theta$  antes de obtener la información muestral), y  $\mathbf{x}$  es la observación muestral de una población cuya distribución depende de  $\theta$ , la verosimilitud del dato observado la denotaremos por  $f(\mathbf{x} | \theta)$ , y el Teorema de Bayes nos permitirá obtener la distribución a posteriori  $\pi_0(\theta | \mathbf{x})$  de la siguiente manera:

$$\pi_0(\theta | \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} | \theta) \cdot \pi_0(\theta)}{\int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi_0(\theta) d\theta} \propto f(\mathbf{x} | \theta) \cdot \pi_0(\theta),$$

es decir como el cociente entre la distribución conjunta  $f(\mathbf{x} | \theta) \cdot \pi_0(\theta)$  y la distribución predictiva  $p(\mathbf{x} | \pi_0) = \int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi_0(\theta) d\theta$ .

A veces, y por conveniencia matemática, el análisis bayesiano considera la clase de distribuciones a priori conjugadas  $\pi_0(\theta)$  para una verosimilitud dado para que la distribución a posteriori  $\pi_0(\theta | \mathbf{x})$  tenga la misma forma que la distribución a priori. Una vez observado los datos la información a priori

se convierte en información a posteriori vía teorema de Bayes. Esto permite construir la prima a posteriori que se define de la siguiente manera.

**Definición 4 (de prima a posteriori (Heilmann (1989)))** *Dados un riesgo  $X$  con distribución  $F(x | \theta)$ , siendo  $\theta$  un parámetro desconocido con distribución a priori  $\pi_0(\theta)$ , una función de pérdida  $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , y una muestra  $\mathbf{x}$ , la prima a posteriori es el valor  $P^*$  que minimiza*

$$\int_{\Theta} L(P, P^*) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta,$$

siendo  $\pi_0(\theta | \mathbf{x})$  la distribución a posteriori de  $\theta$  dada la muestra y  $P$  la verdadera prima, definida anteriormente, es el valor que minimiza

$$\int_{\mathcal{X}} L(x, P) f(x | \theta) dx.$$

Por tanto, si nos restringimos a los cuatro casos antes expuestos:

1. Si  $L(P, P^*) = (P - P^*)^2$ , entonces  $P = E_F[X]$ , y se deduce que,

$$P^* = \int_{\Theta} \left[ \int_{\mathcal{X}} x f(x | \theta) dx \right] \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta = E_{\pi_0} [E_F[X | \theta]].$$

2. Si  $L(P, P^*) = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha P} - e^{\alpha P^*})^2$  con  $\alpha > 0$ , entonces,  $P = \frac{1}{\alpha} \text{Log} E_F [e^{\alpha X}]$ , y se deduce que,

$$P^* = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \int_{\Theta} \left[ \int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x | \theta) dx \right] \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta = \frac{1}{\alpha} \text{Log} [E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]]].$$

3. Si  $L(P, P^*) = e^{\alpha P} (P - P^*)^2$ ,  $\alpha > 0$ , entonces,

$$P = \frac{\int_{\mathcal{X}} x e^{\alpha x} f(x | \theta) dx}{\int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x | \theta) dx} = \frac{E_F [X e^{\alpha X} | \theta]}{E_F [e^{\alpha X} | \theta]},$$

y se deduce que,

$$P^* = \frac{\int_{\Theta} P e^{\alpha P} \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} e^{\alpha P} \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta} = \frac{E_{\pi_0} [P \cdot e^{\alpha P}]}{E_{\pi_0} [e^{\alpha P}]}.$$

4. Si  $L(P, P^*) = P(P - P^*)^2$ , entonces,

$$P = \frac{\int_{\mathcal{X}} x^2 f(x | \theta) dx}{\int_{\mathcal{X}} x f(x | \theta) dx} = \frac{E_F [X^2 | \theta]}{E_F [X | \theta]},$$

y se deduce que,

$$P^* = \frac{\int_{\Theta} P^2 \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} P \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta} = \frac{E_{\pi_0} [P^2]}{E_{\pi_0} [P]}.$$

En la tabla 1.1 y a modo de resumen se recogen los cuatro principios de cálculo de primas anteriormente expuestos en su versión verdadera, a priori y a posteriori.

Tabla 1.1: Principios en su versión verdadera, a priori y a posteriori.

	Prima neta	Exponencial
Verdadera ( $P$ )	$\int_{\mathcal{X}} x f(x   \theta) dx$	$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x   \theta) dx$
Priori ( $P'$ )	$\int_{\Theta} [\int_{\mathcal{X}} x f(x   \theta) dx] \pi_0(\theta) d\theta$	$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \int_{\Theta} [\int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x   \theta) dx] \pi_0(\theta) d\theta$
Posteriori ( $P^*$ )	$\int_{\Theta} [\int_{\mathcal{X}} x f(x   \theta) dx] \pi_0(\theta   \mathbf{x}) d\theta$	$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \int_{\Theta} [\int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x   \theta) dx] \pi_0(\theta   \mathbf{x}) d\theta$
	Esscher	Varianza
Verdadera ( $P$ )	$\frac{\int_{\mathcal{X}} x e^{\alpha x} f(x   \theta) dx}{\int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x   \theta) dx}$	$\frac{\int_{\mathcal{X}} x^2 f(x   \theta) dx}{\int_{\mathcal{X}} x f(x   \theta) dx}$
Priori ( $P'$ )	$\frac{\int_{\Theta} P e^{\alpha P} \pi_0(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} e^{\alpha P} \pi_0(\theta) d\theta}$	$\frac{\int_{\Theta} P^2 \pi_0(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} P \pi_0(\theta) d\theta}$
Posteriori ( $P^*$ )	$\frac{\int_{\Theta} P e^{\alpha P} \pi_0(\theta   \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} e^{\alpha P} \pi_0(\theta   \mathbf{x}) d\theta}$	$\frac{\int_{\Theta} P^2 \pi_0(\theta   \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} P \pi_0(\theta   \mathbf{x}) d\theta}$

En la literatura actuarial no existe un sistema axiomático comunmente aceptado de propiedades que un principio de cálculo de prima debería satisfacer. Sin ser exhaustivos, contribuciones importantes en esta materia pueden encontrarse en Gerber (1979), Heilmann (1988) y Hürlimann (1994).

Gerber sostiene que las cinco propiedades que un principio de cálculo de prima  $P = H[X]$  debería satisfacer son:

1. **Sobreprima de seguridad no negativa.**

$$P \geq E_F[X],$$

Esto significa que para evitar la ruina técnica la ganancia esperada  $P = E_F[X]$  será no negativa.

2. **No estafa.** La prima no excederá a la reclamación máxima posible  $r_X$ .

$$P \leq r_X.$$

3. **Consistencia.** Para cada riesgo  $X$  y cada constance  $c$ ,

$$H[X + c] = H[X] + c.$$

Esto significa que si el beneficio se incrementa en una constante esta constante tiene que ser añadida a la prima.

4. **Aditividad.** Si  $X_1$  y  $X_2$  son riesgos independientes:

$$H[X_1 + X_2] = H[X_1] + H[X_2].$$

Esto quiere decir que la incorporación de riesgos independientes no afectan a la prima total.

5. **Iteratividad.** Si  $X$  y  $S$  son riesgos arbitrarios:

$$H[X] = H[H[X | S]].$$

Esto significa que la prima para  $X$  puede calcularse en dos pasos. Primero calcular la prima condicional (dado  $S$ ) para  $X$ ,  $H[X | S]$  aplicando  $H$  a la distribución condicional de  $X$ . Esta prima condicional es una función de  $S$  y por lo tanto una variable aleatoria en si misma. Entonces se aplica  $H$  a la distribución de  $H[X | S]$  para obtener  $H[H[X | S]]$ .

*Heilmann* sólo presta atención a la primera, mientras que *Hürlimann* no nombra la quinta pero añade estas otras:

6.  $H[c] = c$ , para toda constante  $c \geq 0$ .

Esto significa que para un riesgo no aleatorio  $X = c$ , con  $\text{Prob}[X = c] = 1$ , la prima a cobrar será  $c$ .

7. **Homogeneidad positiva.**

$$H[c \cdot X] = c \cdot H[X], \text{ para todo } c \geq 0,$$

que resulta conveniente para corregir efectos inflacionarios.

Es fácil comprobar que el principio de prima neta y el principio de utilidad exponencial surgen como casos particulares del *principio del valor medio*, que se define de la siguiente forma:

Sea  $v(x)$  una función con  $v'(x) > 0$ ,  $v''(x) \geq 0$ , entonces  $P = H[X]$  se define por ser solución de la ecuación:

$$v(P) = E[v(x)].$$

La elección de  $v(x) = x$  produce el principio de prima neta, mientras que  $v(x) = e^{ax}$ ,  $a > 0$ , da lugar al principio de utilidad exponencial; además se puede probar (ver *Gerber (1979)*) que si  $X_1$  y  $X_2$  son riesgos arbitrarios  $H[X_1] = H[H[X_1 | X_2]]$  si y sólo si  $H$  es un principio de valor esperado. Este resultado es útil para verificar que los principios Esscher y de varianza no satisfacen la propiedad 5, como se pone de manifiesto en la tabla 1.2, en la cual se recogen los cuatro principios de cálculo de prima antes presentados y las propiedades que verifica la verdadera prima individual.

La demostración de todas las propiedades que verifican los principios de prima neta, de utilidad exponencial y varianza para la verdadera prima, y que se encuentran en la tabla 1.2, puede verse en *Gerber (1979)*, no así las correspondientes al principio Esscher y por eso las desarrollamos a continuación.

Tabla 1.2: Cuatro principios y las propiedades que verifica la verdadera prima ( $P$ ).

Propiedad	Prima Neta	Exponencial	Esscher	Varianza
1	SI	SI	SI	SI
2	SI	SI	SI	NO
3	SI	SI	SI	SI
4	SI	SI	SI	SI
5	SI	SI	NO	NO
6	SI	SI	SI	SI
7	SI	NO	NO	NO

1. Puesto que el principio Esscher se deriva de la función de pérdida  $L(x, P) = e^{\alpha x}(x - P)^2$ , y esta es de la forma (1.1), utilizando el resultado (1.2) se obtiene

$$H[X] = P = \frac{E_F[X \cdot e^{\alpha X}]}{E_F[e^{\alpha X}]} \geq E_F[X].$$

2. Usamos  $X \leq r_X$  con certeza, de donde  $\frac{X \cdot e^{\alpha X}}{e^{\alpha X}} \leq r_X$ , luego

$$E_F[X \cdot e^{\alpha X}] \leq r_X E_F[e^{\alpha X}] \text{ y de aquí } P = \frac{E_F[X \cdot e^{\alpha X}]}{E_F[e^{\alpha X}]} \leq r_X.$$

- 3.

$$\begin{aligned} H[X + c] &= \frac{E_F[(X + c) \cdot e^{\alpha(X+c)}]}{E_F[e^{\alpha(X+c)}]} \\ &= \frac{E_F[X \cdot e^{\alpha(X+c)} + c \cdot e^{\alpha(X+c)}]}{E_F[e^{\alpha(X+c)}]} \\ &= \frac{E_F[X \cdot e^{\alpha(X+c)}] + c \cdot E_F[e^{\alpha(X+c)}]}{E_F[e^{\alpha(X+c)}]} = \frac{E_F[X \cdot e^{\alpha(X+c)}]}{E_F[e^{\alpha(X+c)}]} + c. \end{aligned}$$

4. Sean  $X_1$  y  $X_2$  riesgos independientes:

$$H[X_1 + X_2] = \frac{E_F[(X_1 + X_2) \cdot e^{\alpha(X_1+X_2)}]}{E_F[e^{\alpha(X_1+X_2)}]}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{E_F [X_1 \cdot e^{\alpha \cdot X_1} \cdot e^{\alpha \cdot X_2} + X_2 \cdot e^{\alpha \cdot X_1} \cdot e^{\alpha \cdot X_2}]}{E_F [e^{\alpha \cdot X_1} \cdot e^{\alpha \cdot X_2}]} \\
&= \frac{E_F [X_1 \cdot e^{\alpha \cdot X_1}] \cdot E_F [e^{\alpha \cdot X_2}] + E_F [X_2 \cdot e^{\alpha \cdot X_2}] \cdot E_F [e^{\alpha \cdot X_1}]}{E_F [e^{\alpha \cdot X_1}] \cdot E_F [e^{\alpha \cdot X_2}]} \\
&= \frac{E_F [X_1 \cdot e^{\alpha \cdot X_1}]}{E_F [e^{\alpha \cdot X_1}]} + \frac{E_F [X_2 \cdot e^{\alpha \cdot X_2}]}{E_F [e^{\alpha \cdot X_2}]} = H [X_1] + H [X_2].
\end{aligned}$$

□

La prima a priori y la prima a posteriori satisfacen las propiedades que se recogen en la tabla 1.3, y la demostración de las mismas es similar a la de las propiedades que satisfacen la verdadera prima.

Tabla 1.3: Cuatro principios y las propiedades que verifica la prima a priori ( $P'$ ) y la prima a posteriori ( $P^*$ ).

Propiedad	Prima Neta	Exponencial	Esscher	Varianza
1	SI	SI	SI	SI
2	SI	SI	SI	NO
3	SI	SI	SI	SI
4	SI	NO	SI	SI
5	NO	NO	NO	NO
6	SI	SI	SI	SI
7	SI	NO	NO	NO

## 1.2 El modelo colectivo frente al modelo jerárquico.

Históricamente se han considerado dos modelos alternativos en T.C.: el *modelo colectivo* y el *modelo jerárquico o individual*. Situarnos en el modelo colectivo

de riesgo conlleva el hecho de que interviene como un todo la colectividad de los asegurados, frente al modelo individual que se fija en el riesgo correspondiente a cada póliza o asegurado; en este caso la cartera se considera dividida en  $p$  pólizas,  $p \in \mathbb{N}$ , a su vez cada una de las cuales puede estar dividida en  $r$  pólizas,  $r \in \mathbb{N}$ , etc.

El modelo colectivo de la Teoría del Riesgo es una secuencia  $N, X_1, X_2, \dots$  de variables con la siguiente interpretación:

- $N$  es la variable aleatoria *número de siniestros*.
- $X_i, i = 1, 2, \dots, N$ , es la variable aleatoria *coste del  $i$ -ésimo siniestro*. Estas variables aleatorias son entre sí independientes y equidistribuidas.
- $X = \sum_{i=1}^N X_i$  es la variable aleatoria *coste total*.

En algunos casos específicos estas variables aleatorias degeneran en variables deterministas. Por ejemplo en muchas de las diferentes formas de los seguros de vida los costes de los siniestros son sumas fijas. En otras ocasiones  $X_i$  y  $N$  son variables aleatorias, como ocurre en seguros de accidentes, especialmente en seguros de automóviles. En este caso el asegurador desconoce las siguientes cuestiones:

1. ¿Qué persona asegurada declarará un siniestro?
2. ¿Cuántos siniestros se declararán?
3. ¿Cuántos ocurrirán?
4. ¿De qué cuantía serán los siniestros?

Por otro lado, la forma de recogida de datos por parte de las compañías aseguradoras determinará la metodología de trabajo, y son las siguientes:

1. En algunas ocasiones las compañías recogen datos solamente de los costes totales en unidades monetarias generadas por cada póliza cada año. En este caso la única vía para trabajar en T.C. es utilizar estos costes totales y todos los modelos y/o estimadores se referirán a la distribución del coste total.

2. En otras ocasiones los datos se recogen separadamente para número de siniestros y coste de cada uno de ellos. La vía en este caso para trabajar en T.C. es componer los dos modelos, del número de siniestros y de la cuantía de los mismos, para obtener la distribución del coste total, esto es, la distribución compuesta. Esta es la vía óptima para trabajar en T.C.
3. Por último, en algunas ocasiones se cree (algunas compañías lo hacen para seguros de automóviles) que el número de siniestros es la única componente que está bajo el control del asegurador. Esto se piensa así porque una vez ocurrido un siniestro, la cuantía del mismo está fuera de control del asegurador. En este caso la vía para trabajar en T.C. es hacerlo solamente con el número de siniestros y no con el coste total.

La T.C. cubre el modelo general, esto es, los casos 1 y 2, que serán objeto de estudio en esta Memoria y a los que llamaremos *modelo colectivo no compuesto* y *modelo colectivo compuesto* respectivamente.

Cuando se trabaja en T.C. el camino óptimo es hacerlo con la distribución del daño total obtenida componiendo los modelos de número de siniestros y cantidad monetaria. En este caso la distribución del daño total es

$$F(x) = Prob[X \leq x] = \sum_{N=0}^{\infty} P_N \cdot G(x),$$

siendo  $P_N$  la distribución del número de siniestros y  $G(x)$  la probabilidad de que, ocurridos  $N$  siniestros, la cuantía de los daños sea menor o igual a  $x$ .

Si suponemos que las variables  $X_i$  son independientes e independientes del número de siniestros, cada una con distribución de probabilidad  $V(x_i)$ ,  $F(x)$  adopta la siguiente forma,

$$F(x) = \sum_{N=0}^{\infty} P_N \cdot V^{N*}(x),$$

en donde  $V^{N*}(x)$  es la convolución  $N$ -ésima de la variable aleatoria  $X_i$ .

Según la forma que adopte  $P_N$ ,  $F(x)$  recibe un nombre distinto. Así, si  $P_N$  es la distribución binomial,  $F(x)$  se denomina distribución binomial compuesta; si es la binomial negativa, entonces binomial negativa compuesta; si es la distribución de Poisson, Poisson compuesta. Por otro lado la forma que

toma  $X_i$  también es diversa, dependiendo por simplicidad de la distribución asumida para  $P_N$ . Los casos más usuales son:

$$\begin{aligned} P_N \text{ Binomial, } & X_i \text{ Geométrica} \\ P_N \text{ Poisson, } & X_i \text{ Pareto} \\ P_N \text{ Poisson, } & X_i \text{ Exponencial} \end{aligned}$$

El caso más extendido es el último, Poisson-Exponencial, que será tratado en el capítulo 3 de esta Memoria. La determinación de la distribución del daño total constituye un tópico en Teoría del Riesgo que ha originado numerosas investigaciones.

En algunas ocasiones, dentro del modelo colectivo de Teoría del Riesgo, por ejemplo en seguros de automóviles, la frecuencia es la única componente que está bajo el control del actuario. Esto es, para conductores precavidos podemos *reducir* el número de siniestros ocurridos <sup>3</sup>, pero una vez habido un accidente la cantidad del daño está fuera del control del actuario. En este caso resulta más apropiado trabajar con el número de siniestros y no con el daño total en unidades monetarias.

El modelo colectivo, como ya hemos dicho, trata la cartera como un conjunto de pólizas anónimas, sin distinguir a un asegurado (o póliza) de otro. Esta situación, ampliamente estudiada en teoría del riesgo, no se ajusta del todo a la realidad, pues generalmente la compañía dispone de información de cada uno de los asegurados o pólizas, se introduce así el **modelo jerárquico o individual**. En este caso la cartera se considera dividida en  $k$  pólizas subdivididas en  $r$  pólizas (o asegurados), etc. El modelo así asumido se denomina jerárquico, constituyendo el más general de todos el modelo jerárquico de múltiples niveles, y el más sencillo el modelo jerárquico de un solo nivel (*Klugman* lo denomina **one-way**).

En este modelo, ver tabla 1.4, la cartera se considera dividida en  $k$  pólizas (insistimos en la equivalencia de una cartera y  $k$  pólizas son una pólizas y  $k$  asegurados), teniendo asociado cada una un parámetro de riesgo  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ . Este parámetro de riesgo describe las características de

<sup>3</sup>Mediante bonificaciones se estimula al conductor a no producir siniestro.

Tabla 1.4: Modelo Jerárquico.

	1	2	...	k
1	$x_{11}$	$x_{21}$	...	$x_{k1}$
2	$x_{12}$	$x_{22}$	...	$x_{k2}$
t	$x_{1t}$	$x_{2t}$	...	$x_{kt}$
	$\theta_1$	$\theta_2$	...	$\theta_k$

riesgo del contrato  $i$ -ésimo. En la mayoría de los caso es desconocido, de ahí que sea considerado como variable aleatoria. Además la variable  $x_{js}$  indica la experiencia de reclamaciones para la póliza  $j$ -ésima en el período  $s$ -ésimo, donde  $j = 1, \dots, k$  y  $s = 1, \dots, t$ , siendo  $t$  el número de períodos observados para cada póliza. Es también una variable aleatoria, y se suele interpretar como el importe medio de las indemnizaciones por siniestro.

El objetivo del modelo es obtener la prima a cobrar a cada uno de los contratos (o asegurados).

El análisis bayesiano jerárquico se adapta perfectamente a un problema de esta naturaleza, pues el modelo jerárquico tiene la siguiente forma.

- Primer estado:

$$p(\mathbf{x} \mid \theta) = p(x_1, \dots, x_k) = \prod_{i=1}^k p(x_i \mid \theta_i),$$

- Segundo estado:

$$p(\theta \mid \Psi) = p(\theta_1, \dots, \theta_k \mid \Psi) = \prod_{i=1}^k p(\theta_i \mid \Psi),$$

- Tercer estado:

$$p(\Psi),$$

con la siguiente interpretación. Las observaciones  $x_1, \dots, x_k$  corresponden a  $k$  fuentes diferentes pero relacionadas, por ejemplo  $k$  asegurados de una cartera

homogénea, cada uno de ellos caracterizado por un parámetro de riesgo  $\theta_i$ , con distribución a priori  $p(\theta_i | \Psi)$  dependiente de un hiperparámetro  $\Psi$ , que generalmente tiene una interpretación en términos de características - por ejemplo la media- de la población (la cartera) de la que proceden los  $k$  asegurados.

### 1.3 **Objetivos de la Memoria.**

Las compañías aseguradoras son, por encima de todo, empresas de servicios, y como tal uno de sus objetivos ha de ser el ofrecer el mejor servicio al cliente y al mejor precio.

La plena integración europea conduce a las economías de los países integrantes a un nuevo escenario; como consecuencia de ello se producirá (ya se está produciendo) una mayor liberalización de mercados y un proceso de desregulación del sector financiero, el sector asegurador entre ellos. Un nuevo mercado de cerca de 350 millones de potenciales clientes surgirá a partir de la integración plena y será fundamental la aportación de nuevos modelos de gestión y por tanto de sistemas de tarificación. Es obvio también que la competencia nacida traerá una avalancha de ofertas de nuevos productos.

Téngase en cuenta que la libertad de establecimiento y prestación de servicios permitirá la apertura de agencias, sucursales o filiales en cualquier estado de la Unión Europea bajo la autorización única del país de origen, con la posibilidad de cubrir riesgos en otro estado miembro sin necesidad de abrir una agencia o sucursal.

Por otro lado las primas contractuales en unidades monetarias en España están por debajo de la media del resto de la Europa comunitaria, lo que induce a esperar un fuerte crecimiento en España de los seguros de salud, jubilación, hogar y responsabilidad civil (los expertos europeos en la materia coinciden que España será el país con mayor crecimiento en el sector seguros en los próximos años).

Además un crecimiento importante del negocio en cuanto a seguros se producirá en el sector del automóvil, como consecuencia del incremento de las garantías obligado por la normativa comunitaria que equipararán los límites obligatorios de la responsabilidad civil hasta los niveles comunitarios. Si a esto añadimos el avance cultural, el mayor nivel de información del usuario y

una mayor preocupación por el futuro, todo ello indica que la contratación de seguros en general se verá favorecida.

De otro lado uno de los problemas más graves con los que se enfrenta el sector de seguros en España es su falta de rentabilidad, relacionado sobre todo por la elevada siniestralidad y los altos costes tradicionales en el sector<sup>4</sup>. *Hernández (1994)* dice: *Para luchar contra las elevadas tasas de siniestralidad, las compañías deberán concentrar sus esfuerzos en aplicar criterios de tarificación que busquen el obligado equilibrio técnico, una mejor selección de riesgos y fomentar la prevención de siniestros.*

En definitiva, la adaptación a la legislación comunitaria de la Ley de Contrato de Seguros de 1984 va a traer consigo un aumento de la competitividad que obligará a las compañías a diseñar nuevos sistemas de tarificación.

Al margen del problema de la competitividad, otro de los grandes problemas con los que se enfrentan las compañías aseguradoras es el del *azar moral*. El problema de azar moral se presenta básicamente en los mercados de seguros, cuando la gente una vez asegurada se vuelve menos cuidadosa e incurre en probabilidades más altas de siniestro que las calculadas por la entidad aseguradora correspondiente. Esta es la razón por la que las compañías tratan de luchar contra este fenómeno, haciendo rebajas en las primas de años sucesivos si no se produjeran siniestros (sistema *bonus-malus*), o estableciendo franquicias para que el tomador del seguro sea corresponsable del riesgo en el que pudiera incurrir.

Es frecuente (ver *Freifelder (1974)*, *Heilmann (1989)* y otros) denominar al precio teórico correcto que la compañía aseguradora cobraría a un cliente *true individual premium*, que nosotros hemos denominado *verdadera prima individual* y que denotaremos por  $P$ . Si consideramos una distribución a priori para el parámetro de la distribución de siniestros podemos construir lo que en la literatura actuarial se denomina *priori premium* y que nosotros hemos denominado *prima a priori* ( $P'$ ). A partir de la distribución a priori y después de elegida una muestra podemos construir lo que los actuarios denominan

---

<sup>4</sup>La siniestralidad del ramo no vida ha pasado del 77% en 1992 al 80% en 1994.

*experience adjusted premium*, y que nosotros hemos denominado *prima a posteriori* (será denotada, como expusimos antes por  $P^*$ ).

La verdadera prima individual representa el precio teórico que la compañía cobraría a un individuo dado al suscribir éste un contrato de seguros; para obtener este precio exacto la compañía debe conocer la forma de la distribución de probabilidad de siniestralidad y los parámetros de esta distribución. Si esta información le es asequible a la compañía, la verdadera prima individual se podrá calcular. En T.C. se supone que esta información no está disponible; generalmente los valores actuales de los parámetros de la distribución de siniestralidad son desconocidos. En tal caso la prima que la compañía cobra es la llamada prima a priori, que representa la mejor decisión que estima la prima individual. Para su cálculo se requiere que la distribución de probabilidad de siniestralidad sea conocida y que la compañía (el actuario) pueda definir una distribución de probabilidad para los valores de los parámetros desconocidos de aquélla. La información acerca de la distribución de probabilidad y de los parámetros de la misma se obtiene usualmente de los datos de contratos similares o de la experiencia anterior sobre los mismos contratos. En este trabajo consideraremos que el proceso de aprendizaje por parte del actuario le va a servir para identificar características de la distribución a priori del parámetro de la distribución de siniestralidad.

Sin embargo, es poco frecuente (ver *Klugman (1992)*), encontrarse con un estudio de la variación en el valor de esta prima cuando el conocimiento de la distribución a priori no es completo. En particular estudiaremos cómo se comporta la prima a posteriori cuando se admite cualquier distribución a priori *parecida* a una inicial en la que el actuario tiene cierta seguridad. Hoy día el análisis bayesiano robusto permite hacer un estudio como el que proponemos, en el que el término *parecido* aquí lo asumimos en el sentido de clases de contaminaciones.

La metodología de un análisis de robustez consiste en sustituir en el modelo la distribución a priori por toda una clase de distribuciones a priori plausibles y medir el rango de variación de cualquier medida a posteriori (en nuestro caso la prima a posteriori).

En líneas generales el planteamiento, y para el modelo colectivo, es el siguiente, dada la clase

$$\Gamma = \{\text{Distribuciones a priori del parámetro } \theta \in \Theta\},$$



a la que pertenece la distribución a priori asignada al parámetro,  $\pi_0(\theta) \in \Gamma$ , y dada la observación muestral  $\mathbf{x}$ , se trata de calcular los extremos de la prima a posteriori sobre la clase  $\Gamma$ .

El punto de vista del análisis bayesiano robusto consiste en considerar una magnitud a posteriori de interés, sea  $g(\pi, \mathbf{x})$ , y examinar el comportamiento de esa magnitud cuando se incorpora incertidumbre sobre la distribución a priori. El caso de primas de seguros puede adaptarse a una cantidad de este tipo, pues la prima a posteriori no es más que una media a posteriori, esto es,

$$P^* = \int_{\Theta} g(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta,$$

para el principio de prima neta, y

$$P^* = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \int_{\Theta} g(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta,$$

para el principio de utilidad exponencial, con  $g(\theta)$  en ambos casos igual a  $P$  (la verdadera prima).

La siguiente cuestión es cómo modelizar la incertidumbre sobre la distribución a priori; un camino hasta el momento muy aceptado es la consideración de clases de distribuciones a priori. Especificada una clase de distribuciones a priori plausibles, sea  $\Gamma$ , el análisis se dirige a calcular las oscilaciones de  $g(\pi, \mathbf{x})$  en esa clase, cuantificando esas oscilaciones por el intervalo  $\left( \inf_{\pi \in \Gamma} P^*, \sup_{\pi \in \Gamma} P^* \right)$ . La lectura de este intervalo da una idea al usuario de cuanto pueden variar sus conclusiones si su incertidumbre sobre la distribución a priori está bien modelizada por  $\Gamma$ .

Otra cuestión es el formato específico que se use para las clases  $\Gamma$ ; algunos ejemplos son:

- **Clases dadas por uno o dos momentos.** Históricamente fueron las primeras clases que se usaron por la ventaja técnica que presentaban pero se abandonaron por el flojo soporte intuitivo (*Eichnauer, Lehn y Retrig (1988)*).
- **Clases dadas por cuantiles.** Han tenido y tienen una gran aceptación debido a que el cálculo técnico que conllevan es factible y a que tienen un fortísimo soporte intuitivo (*O'Hagan y Berger (1988)*).

- **Clases con características de forma.** Por ejemplo la unimodalidad, simetría, etc.. Tienen un gran soporte intuitivo en muchos casos y el cálculo técnico que conlleva también es factible.
- **Clases de contaminación.** El cálculo técnico es factible, son clases muy flexibles jugando con la clase contaminante y la idea de proximidad entre distribuciones de probabilidad es muy intuitiva ya que se basa en probabilidades parecidas (*Berger y Berliner (1985), Sivaganesan (1988) y Sivaganesan y Berger (1989)*).

Nosotros, puesto que el análisis de robustez no ha sido realizado por muchos autores hasta ahora en T.C.<sup>5</sup> hemos optado por las clases de contaminación que permitan graduar el alejamiento o proximidad de la distribución a priori del parámetro de interés especificado. Esta clase está definida por:

$$\Gamma_\varepsilon = \{\pi(\theta) = (1 - \varepsilon) \cdot \pi_0(\theta) + \varepsilon \cdot q(\theta) \mid q(\theta) \in \mathcal{Q}\},$$

donde  $\varepsilon \in [0, 1]$ ,  $\pi_0(\theta)$  es la distribución a priori básica y  $\mathcal{Q}$  es una clase de distribuciones a priori, la clase contaminante.

Para el principio Esscher y de varianza, obsérvese que la prima a posteriori es del tipo

$$P^* = \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) \pi_0(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta},$$

es decir, el cociente de dos medias a posteriori, y no una media a posteriori como ocurre con el principio de prima neta y exponencial. En el capítulo 2 abordaremos un procedimiento teórico que nos dé solución al problema de obtener el intervalo de variación de la prima en este caso, y que no diferirá mucho de la mecánica a seguir para la obtención del intervalo de variación para el principio de prima neta y exponencial.

Para el modelo jerárquico el planteamiento será similar pero utilizando el análisis bayesiano jerárquico.

<sup>5</sup>En *Makov (1994)* se realiza un análisis de robustez pero basado en la función de pérdida y no en la distribución a priori, y en *Rios et al. (1995)* se realiza un análisis de robustez para el modelo colectivo y en el que se considera el número de siniestros.

La especificación de una clase concreta de distribuciones a priori pretende ser una modelización adecuada de la incertidumbre que el usuario tiene sobre su especificación de una distribución a priori singular.

En ningún momento se pretende que todos y cada uno de los elementos de la clase  $\Gamma_\varepsilon$  sean intercambiables e igualmente válidos para el usuario. La interpretación correcta del intervalo  $\left(\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} P^*, \sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} P^*\right)$  es que si su longitud es pequeña, el usuario puede estar tranquilo con sus conclusiones respecto a su incertidumbre en la distribución a priori.

Los objetivos del trabajo son estudiar individualmente la sensibilidad de los principales principios de cálculo de primas (prima neta, exponencial, Esscher y varianza) bajo los dos modelos utilizados para los principios de tarificación: el modelo colectivo y el modelo jerárquico o individual.

Una vez abordado el primer objetivo, un segundo objetivo tiene un carácter global, ya que se trata de intentar jerarquizar los principales principios de cálculo de primas de acuerdo a una de las propiedades que aún no ha merecido especial atención en la T.C. y que es la sensibilidad o estabilidad respecto a las modelizaciones de las creencias iniciales del actuuario.

Una consecuencia colateral de adoptar una metodología como esta puede llevarnos a pensar en que la compañía pueda cobrar como valor de la prima cualquiera del intervalo anterior. Sin embargo esta actitud podría llevarnos a conclusiones nada razonables.

Por ejemplo si la clase  $\Gamma$  no es plausible en nuestro problema, el intervalo anterior puede ser tan amplio como se desee, hasta el punto de llegar a ser trivial. Supongamos por tanto que  $\Gamma$  es una clase razonable, por ejemplo una clase de contaminación: si  $\varepsilon$  es muy grande el intervalo puede volver a ser trivial; si la observación muestral  $\boldsymbol{x}$  es *extraña*, el intervalo vuelve a crecer exageradamente.

En definitiva, parecería que el usuario tendría *más libertad* para escoger el valor que le interese cuanto más grande sea la clase  $\Gamma$  (aunque sea inverosímil) o cuanto más confrontación haya entre los datos y la información a priori.

Desde luego este apartado merece un estudio más profundo tal y como planteamos en las líneas abierta, apartado 5.7.

## Capítulo 2

# Resultados del análisis bayesiano robusto.

Una vez determinados los objetivos básicos de la Memoria hemos decidido dedicar un capítulo de la misma a las herramientas básicas del análisis bayesiano robusto de las que haremos uso en los capítulos siguientes dedicados a las aplicaciones de los modelos más ampliamente utilizados en la fijación de primas.

Tal y como se ha comentado ya, el rango de variación de las primas a cobrar será nuestra medida de interés a la hora de evaluar la presencia o no de estabilidad en el proceso de fijación de primas. Este hecho nos permitirá tener jerarquizado el conjunto de los principales criterios de fijación de primas.

Este capítulo aborda los tres grandes tópicos que utilizaremos posteriormente. En una primera parte expondremos los resultados del análisis bayesiano robusto que nos permitirán obtener el rango de variación a posteriori de expresiones del tipo

$$\int_{\Theta} g(\theta)\pi_0(\theta | \mathbf{x})d\theta.$$

Con estos resultados podremos obtener el intervalo de variación de la prima a posteriori para el principio de prima neta y de utilidad exponencial que son los que pueden contemplarse mediante esta estructura.

Si pensamos ahora en los principios de cálculo de primas de Esscher y

varianza que son

$$P^* = \frac{\int_{\Theta} P e^{\alpha P} \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} e^{\alpha P} \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta} = \frac{E_{\pi_0} [P \cdot e^{\alpha P}]}{E_{\pi_0} [e^{\alpha P}]}$$

$$P^* = \frac{\int_{\Theta} P^2 \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} P \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta} = \frac{E_{\pi_0} [P^2]}{E_{\pi_0} [P]}$$

vemos que estos no se ajustan a una estructura como la anterior ya que se trata de cocientes. Es por ello que en la segunda parte se expondrán los resultados del análisis bayesiano robusto que nos permitirá obtener el rango de variación a posteriori de expresiones del tipo

$$\frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta},$$

y que serán útiles para obtener el intervalo de variación a posteriori de la prima para el principio Esscher y de varianza.

Es bien conocido que a pesar de los avances en el campo de la estadística bayesiana, varios son los problemas que suelen achacarse a esta aproximación.

La elección de la distribución a priori, que tiene un carácter subjetivo, estará basada en la información previa acumulada por el investigador. Sin embargo, en la práctica, será muy difícil discernir entre ciertas distribuciones con características similares. Por ejemplo, podemos estar convencidos de que la distribución a priori es unimodal y simétrica, pero distinguir entre las distribuciones Normal y Cauchy puede ser muy difícil. En otras ocasiones, la especificación de la distribución a priori se hace difícil porque la decisión ha de ser tomada por un grupo de personas que pudieran tener diferentes opiniones a priori.

Todo ello da pie a la necesidad de realizar análisis de robustez bayesiana, en los que se estudia la sensibilidad de la respuesta a la incertidumbre en la especificación de la distribución a priori. Generalmente la respuesta consiste en una cantidad basada en la distribución a posteriori. Este tipo de análisis ha tenido una gran difusión en los últimos años, y se refleja en el gran número de trabajos surgidos (ver *Berger (1994)*, *Sivaganesan (1989,1991)*, y otros).

Un análisis de robustez consiste en representar la imprecisión sobre la distribución a priori mediante una clase de distribuciones a priori. A

continuación se calculan el ínfimo y el supremo de la cantidad de interés cuando la distribución a priori oscila dentro de la clase especificada. Si la diferencia entre el supremo y el ínfimo es *pequeña* se concluye que el análisis es robusto y que el experimentador no debe preocuparse por las imprecisiones cometidas. Si por el contrario esa diferencia es *grande*, se dice que existe carencia de robustez.

En definitiva, un análisis de robustez consiste en sustituir la especificación de una única distribución a priori por toda una clase.

De entre las muchas clases que se han propuesto, la **clase de contaminación** es, quizás, la que más atención ha recibido. Supongamos una distribución a priori fija  $\pi_0(\theta)$  y asumamos un grado de imprecisión (se le suele llamar *grado de contaminación*)  $\varepsilon \in [0, 1]$  en la especificación de esta distribución. La clase de  $\varepsilon$ -contaminación se define como

$$\Gamma_\varepsilon = \{ \pi(\theta) = (1 - \varepsilon) \cdot \pi_0(\theta) + \varepsilon \cdot q(\theta) \mid q \in \mathcal{Q} \},$$

donde  $\mathcal{Q}$  es un conjunto de distribuciones de probabilidad que se le suele denominar *clase contaminante*. Sobre la elección de esta clase también se ha escrito mucho, aunque nosotros nos ceñiremos a las siguientes:

$$\mathcal{Q}_1 = \{ \text{Todas las distribuciones} \},$$

$$\mathcal{Q}_2 = \{ \text{Distrib. unimodales con la misma moda, } \theta_0, \text{ que } \pi_0 \},$$

$$\mathcal{Q}_3 = \{ \text{Distrib. simétricas y unimodales con la misma moda, } \theta_0, \text{ que } \pi_0 \},$$

## 2.1 Rango de variación de la media a posteriori de $g(\theta)$ .

Nos proponemos en esta sección exponer los resultados del análisis bayesiano robusto que nos permiten estudiar el rango de variación a posteriori de expresiones del tipo

$$\int_{\Theta} g(\theta) \pi_0(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta.$$

En este caso, así como en el de unimodalidad y en el de unimodalidad y simetría, es fundamental considerar el siguiente lema cuya demostración aparece en Sivaganesan y Berger (1987).

**Lema 1 (Sivaganesan y Berger (1987))** Si  $A > 0$  y  $f(x)$  y  $g(x)$  son funciones continuas con  $g(x) \geq 0$ , entonces:

$$\sup_{dF(x)} \left( \inf_{dF(x)} \right) \frac{B + \int f(x) dF(x)}{A + \int g(x) dF(x)} = \sup_x \left( \inf_x \right) \frac{B + f(x)}{A + g(x)},$$

donde sup e inf están tomados sobre todas las distribuciones de probabilidad  $dF(x)$  y  $A, B, f(x), g(x)$  son tales que el ínfimo y el supremo de  $\frac{B + f(x)}{A + g(x)}$  son alcanzados para algunos valores de  $x$ .

En el siguiente teorema probaremos que el rango de la media a posteriori de  $g(\theta)$  sobre la clase  $\Gamma_\varepsilon$  se puede obtener encontrando los extremos de una función de una variable. La demostración es similar a la del teorema de Sivaganesan (1988), elaborada esta para  $g(\theta) = \theta$  y que contiene un error.

**Teorema 1** Sea  $\varrho^\pi(\mathbf{x})$  el valor esperado a posteriori de  $g(\theta)$  con respecto a la priori  $\pi$ , entonces para  $\Gamma_\varepsilon, \mathcal{Q}_1$  y siempre que  $\int_{\Theta} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta < \infty$ ,

$$\sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} \left( \inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} \right) \varrho^\pi(\mathbf{x}) = \sup_{\theta} \left( \inf_{\theta} \right) R(\theta),$$

donde  $R(\theta) = \frac{A_0 + g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta)}{A + f(\mathbf{x} | \theta)}$ ,  $A = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0)$ ,  $A_0 = A \cdot \varrho^{\pi_0}(\mathbf{x})$  y  $m(\mathbf{x} | \pi_0)$  es la densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$ .

Demostración.- La densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$  es

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x} | \pi) &= \int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta) d\theta \\ &= (1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) + \varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q). \end{aligned}$$

Por otro lado observemos que  $\pi(\theta | \mathbf{x})$  puede escribirse como

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta)}{\int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi(\theta) d\theta}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1 - \varepsilon) \cdot f(\mathbf{x} | \theta) \cdot \pi_0(\theta) + \varepsilon \cdot f(\mathbf{x} | \theta) \cdot q(\theta)}{m(\mathbf{x} | \pi)} \\
&= \frac{(1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \pi_0(\theta | \mathbf{x}) + \varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q) \cdot q(\theta | \mathbf{x})}{m(\mathbf{x} | \pi)} \\
&= \lambda(\mathbf{x}) \cdot \pi_0(\theta | \mathbf{x}) + [1 - \lambda(\mathbf{x})] \cdot q(\theta | \mathbf{x}),
\end{aligned}$$

con

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0)}{m(\mathbf{x} | \pi)}.$$

Luego

$$\begin{aligned}
\rho^\pi(\mathbf{x}) &= \lambda(\mathbf{x}) \cdot \rho^{\pi_0}(\mathbf{x}) + [1 - \lambda(\mathbf{x})] \cdot \rho^q(\mathbf{x}) \\
&= \frac{(1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \rho^{\pi_0}(\mathbf{x}) + \varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q) \cdot \rho^q(\mathbf{x})}{(1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) + \varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q)} \\
&= \frac{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \rho^{\pi_0}(\mathbf{x}) + m(\mathbf{x} | q) \cdot \frac{\int_{\Theta} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta}{m(\mathbf{x} | q)}}{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) + m(\mathbf{x} | q)} \\
&= \frac{A_0 + \int_{\Theta} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta}{A + \int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta}.
\end{aligned}$$

Ahora aplicando el lema 1 el teorema queda demostrado.

□

El siguiente lema constituye el tratamiento básico para contaminaciones unimodales. La demostración está basada en la representación de densidades unimodales como una mixtura de densidades uniformes (ver *Feller (1989)*).

**Lema 2 (Sivaganesan y Berger (1987))** Dada  $q$  como en  $\mathcal{Q}_2$  y  $g$  tal que  $\int_{\Theta} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta < \infty$ , entonces

$$\int_{\Theta} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta = \int_0^{\infty} H^g(z) \cdot dF(z),$$

donde  $F$  es alguna función de distribución (la mixtura que produce  $q$ ) y

$$H^g(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ g(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$



En este caso los extremos se alcanzan sobre contaminaciones uniformes, como exponemos a continuación.

### Rango del valor esperado a posteriori de $g(\theta)$

Sea  $\Gamma_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon^1 \subset \Gamma_\varepsilon$  dada por

$$\Gamma_\varepsilon^1 = \{(1 - \varepsilon) \cdot \pi_0(\theta) + \varepsilon \cdot q(\theta) : q \sim \mathcal{U}(\theta_0, \theta_0 + z) \text{ ó } \mathcal{U}(\theta_0 - z, \theta_0), z \geq 0\}.$$

En orden a encontrar el rango del valor esperado a posteriori de  $g(\theta)$  sobre la clase  $\Gamma_\varepsilon$  es suficiente maximizar y minimizar sobre la clase mucho más pequeña y sencilla  $\Gamma_\varepsilon^1$ , como se muestra en el siguiente teorema, cuya demostración, que puede verse en *Sivaganesan y Berger (1989)*, pasa por demostrar que los extremos se alcanzan sobre una subclase de  $\Gamma_\varepsilon$  (de nuevo hay que utilizar el lema 1). De este modo el problema se reduce a encontrar los extremos de una función de una variable.

**Teorema 2 (Sivaganesan y Berger (1989))** *Sea  $\rho^\pi(\mathbf{x})$  el valor esperado a posteriori de  $g(\theta)$  con respecto a la priori  $\pi$ . Entonces, para  $\Gamma_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon^1$  como las anteriores,*

$$\sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^1}) \rho^\pi(\mathbf{x}) = \sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^1} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^1}) \rho^\pi(\mathbf{x}) = \sup_z (\inf_z) \frac{A_0 + H^g(z)}{A + H_0(z)},$$

donde  $A = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0)$ ,  $A_0 = A \cdot \rho^\pi(\mathbf{x})$ ,  $m(\mathbf{x} | \pi_0)$  es la densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$ , mientras que  $H_0(z)$ ,  $H^g(z)$  vienen dadas por

$$H_0(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} f(\mathbf{x} | \theta) d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

$$H^g(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ g(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

El siguiente lema constituye el tratamiento básico para contaminaciones simétricas y unimodales.

**Lema 3 (Sivaganesan y Berger (1987))** Para  $q$  como en  $\mathcal{Q}_3$  y  $g$  tal que  $\int_{\Theta} g(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)q(\theta)d\theta < \infty$ , entonces

$$\int_{\Theta} g(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)q(\theta)d\theta = \int_0^{\infty} H^g(z) \cdot dF(z),$$

donde  $F$  es alguna función de distribución (la mixtura que produce  $q$ ) y

$$H^g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} g(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ g(\theta_0)f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Al igual que ocurría en el caso de contaminaciones simétricas, los extremos se alcanzan de nuevo sobre contaminaciones uniformes, como reflejamos en el siguiente apartado.

**Rango del valor esperado a posteriori de  $g(\theta)$ .**

Sea  $\Gamma_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon^2 \subset \Gamma_\varepsilon$  dada por:

$$\Gamma_\varepsilon^2 = \{(1 - \varepsilon) \cdot \pi_0(\theta) + \varepsilon \cdot q(\theta) : q \sim \mathcal{U}(\theta_0 - z, \theta_0 + z), z \geq 0\}.$$

En orden a encontrar el rango del valor esperado a posteriori de  $g(\theta)$  sobre la clase  $\Gamma_\varepsilon$  es suficiente maximizar y minimizar sobre la clase mucho más pequeña y sencilla  $\Gamma_\varepsilon^2$ , como se muestra en el siguiente teorema, cuya demostración, que puede verse en *Sivaganesan y Berger (1989)*, pasa por demostrar que los extremos se alcanzan sobre una subclase de  $\Gamma_\varepsilon$  (de nuevo hay que utilizar el lema 1). De este modo el problema se reduce a encontrar los extremos de una función de una variable.

**Teorema 3 (Sivaganesan y Berger (1989))** Sea  $\rho^\pi(\mathbf{x})$  el valor esperado a posteriori de  $g(\theta)$  con respecto a la priori  $\pi$ . Entonces, para  $\Gamma_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon^2$  como las anteriores,

$$\sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} ) \rho^\pi(\mathbf{x}) = \sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^2} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^2} ) \rho^\pi(\mathbf{x}) = \sup_z (\inf_z) \frac{A_0 + H^g(z)}{A + H_0(z)},$$

donde  $A = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0)$ ,  $A_0 = A \cdot \rho^\pi(\mathbf{x})$ ,  $m(\mathbf{x} | \pi_0)$  es la densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$ , mientras que  $H_0(z)$ ,  $H^g(z)$  vienen dadas por

$$H_0(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} f(\mathbf{x} | \theta) d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

$$H^g(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ g(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

## 2.2 Rango de variación del cociente de medias a posteriori.

En esta sección expondremos los resultados del análisis bayesiano robusto que nos permite estudiar el rango de variación a posteriori de expresiones del tipo

$$\frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta}.$$

De nuevo probaremos que el rango de variación del cociente de medias a posteriori se puede obtener encontrando los extremos de una función de una variable, como demostramos en el siguiente teorema.

**Teorema 4** Sea  $\delta^\pi(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta}$  el cociente de las medias a posteriori de  $g_1(\theta)$  y de  $g_2(\theta)$  respectivamente con respecto a la priori  $\pi$ . Entonces para  $\Gamma_\varepsilon$ ,  $\mathcal{Q}_1$  y siempre que  $\int_{\Theta} g_1(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta < \infty$  y  $\int_{\Theta} g_2(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta < \infty$ ,

$$\sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon}) \delta^\pi(\mathbf{x}) = \sup_{\theta} (\inf_{\theta}) S(\theta),$$

donde  $S(\theta) = \frac{A_0 + g_1(\theta) f(\mathbf{x} | \theta)}{A + g_2(\theta) f(\mathbf{x} | \theta)}$ ,  $A = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta$ ,  $A_0 = A \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x})$ , y  $m(\mathbf{x} | \pi_0)$  es la densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$ .

Demostración.- En el teorema 1 se obtuvo que la distribución a posteriori,  $\pi_0(\theta | \mathbf{x})$ , se podía escribir como

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \pi_0(\theta | \mathbf{x}) + [1 - \lambda(\mathbf{x})] \cdot q(\theta | \mathbf{x}),$$

con

$$\lambda(\mathbf{x}) = \frac{(1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0)}{m(\mathbf{x} | \pi)},$$

y

$$1 - \lambda(\mathbf{x}) = \frac{\varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q)}{m(\mathbf{x} | \pi)}.$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta} g_1(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta \\ &= \lambda(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Theta} g_1(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta + [1 - \lambda(\mathbf{x})] \int_{\Theta} g_1(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta. \end{aligned}$$

A partir de aquí se tiene,

$$\begin{aligned} \delta^\pi(\mathbf{x}) &= \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \\ &= \frac{1}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \left\{ \lambda(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Theta} g_1(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right. \\ &+ \left. [1 - \lambda(\mathbf{x})] \cdot \int_{\Theta} g_1(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \left\{ \lambda(\mathbf{x}) \left( \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \right) \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right. \\ &+ \left. [1 - \lambda(\mathbf{x})] \cdot \int_{\Theta} g_1(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right\} \\ &= \frac{1}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \left\{ \lambda(\mathbf{x}) \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x}) \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right. \\ &+ \left. [1 - \lambda(\mathbf{x})] \cdot \int_{\Theta} g_1(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right\} \\ &= \lambda(\mathbf{x}) \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x}) \cdot \frac{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} + [1 - \lambda(\mathbf{x})] \cdot \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \\ &= \frac{(1 - \varepsilon) m(\mathbf{x} | \pi_0)}{m(\mathbf{x} | \pi)} \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x}) \frac{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q) \int_{\Theta} g_1(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta}{m(\mathbf{x} | \pi) \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \\
& = \frac{1}{m(\mathbf{x} | \pi) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta} \left\{ (1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x}) \right. \\
& \cdot \left. \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta + \varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q) \cdot \int_{\Theta} g_1(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right\}.
\end{aligned}$$

Ahora teniendo en cuenta que

$$q(\theta | \mathbf{x}) = \frac{f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta)}{m(\mathbf{x} | q)},$$

que

$$\begin{aligned}
& \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi(\theta | \mathbf{x}) d\theta \\
& = \lambda(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta + [1 - \lambda(\mathbf{x})] \int_{\Theta} g_2(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta,
\end{aligned}$$

y denominando

$$\begin{aligned}
M & = m(\mathbf{x} | \pi) \cdot \left[ \lambda(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right. \\
& \quad \left. + (1 - \lambda(\mathbf{x})) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) q(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right] \\
& = (1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta \\
& \quad + \varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \frac{f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta)}{m(\mathbf{x} | q)} d\theta,
\end{aligned}$$

nos queda,

$$\begin{aligned}
& \delta^{\pi}(\mathbf{x}) \\
& = \frac{1}{M} \cdot \left\{ (1 - \varepsilon) \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta \right. \\
& \quad \left. + \varepsilon \cdot m(\mathbf{x} | q) \cdot \int_{\Theta} g_1(\theta) \frac{f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta)}{m(\mathbf{x} | q)} d\theta \right\} \\
& = \frac{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x}) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta + \int_{\Theta} g_1(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta}{\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \cdot m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta + \int_{\Theta} g_2(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta} \\
& = \frac{A_0 + \int_{\Theta} g_1(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta}{A + \int_{\Theta} g_2(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) q(\theta) d\theta}.
\end{aligned}$$

Aplicando ahora el lema 1 el teorema queda demostrado.

□

Para el caso en el que se exija que la contaminación sea simétrica es fundamental el siguiente teorema.

**Teorema 5** Sea  $\delta^\pi(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta)\pi(\theta | \mathbf{x})d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta)\pi(\theta | \mathbf{x})d\theta}$ , entonces para  $\Gamma_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon^1$  como las anteriores y siempre que  $\int_{\Theta} g_1(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)q(\theta)d\theta < \infty$  y  $\int_{\Theta} g_2(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)q(\theta)d\theta < \infty$ ,

$$\sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^1}) \delta^\pi(\mathbf{x}) = \sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^1} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^1}) \delta^\pi(\mathbf{x}) = \sup_z \frac{A_0 + H^{g_1}(z)}{A + H^{g_2}(z)},$$

donde  $A = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)d\theta$ ,  $A_0 = A \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x})$ ,  $m(\mathbf{x} | \pi_0)$  es la densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$ , mientras que  $H^{g_1}(z)$ ,  $H^{g_2}(z)$  vienen dadas por

$$H^{g_1}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g_1(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ g_1(\theta_0)f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

$$H^{g_2}(z) = \begin{cases} \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g_2(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ g_2(\theta_0)f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Demostración.- La demostración es idéntica a la del teorema 4 hasta llegar a

$$\frac{A_0 + \int_{\Theta} g_1(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)q(\theta)d\theta}{A + \int_{\Theta} g_2(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)q(\theta)d\theta},$$

y esto puede ser reescrito, teniendo en cuenta el lema 2, como

$$\delta^\pi(\mathbf{x}) = \frac{A_0 + \int_0^\infty H^{g_1}(z) \cdot dF(z)}{A + \int_0^\infty H^{g_2}(z) \cdot dF(z)},$$

para alguna distribución  $F(\cdot)$ . Aplicando ahora el lema 1 el teorema queda demostrado.

□

Por último, para el caso en el que se exija que la contaminación sea simétrica y unimodal se precisará del siguiente teorema.

**Teorema 6** Sea  $\delta^\pi(\mathbf{x}) = \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta)\pi(\theta | \mathbf{x})d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta)\pi(\theta | \mathbf{x})d\theta}$ , entonces para  $\Gamma_\varepsilon$  y  $\Gamma_\varepsilon^2$  como las anteriores y siempre que  $\int_{\Theta} g_1(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)q(\theta)d\theta < \infty$  y  $\int_{\Theta} g_2(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)q(\theta)d\theta < \infty$ ,

$$\sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon} \delta^\pi(\mathbf{x})) = \sup_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^2} (\inf_{\pi \in \Gamma_\varepsilon^2} \delta^\pi(\mathbf{x})) = \sup_z (\inf_z) \frac{A_0 + H^{g_1}(z)}{A + H^{g_2}(z)},$$

donde  $A = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)d\theta$ ,  $A_0 = A \cdot \delta^{\pi_0}(\mathbf{x})$ ,  $m(\mathbf{x} | \pi_0)$  es la densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$ , mientras que  $H^{g_1}(z)$ ,  $H^{g_2}(z)$  vienen dadas por

$$H^{g_1}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} g_1(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ g_1(\theta_0)f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0, \end{cases}$$

$$H^{g_2}(z) = \begin{cases} \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} g_2(\theta)f(\mathbf{x} | \theta)d\theta, & \text{si } z \neq 0, \\ g_2(\theta_0)f(\mathbf{x} | \theta_0), & \text{si } z = 0. \end{cases}$$

Demostración.- La demostración se omite por ser similar a la del teorema anterior, aplicando ahora el lema 3.

□

## 2.3 Sensibilidad relativa.

Cuando los resúmenes a posteriori tienen diferentes órdenes de magnitud, por ejemplo la media a posteriori y la probabilidad a posteriori, sus rangos son difíciles de comparar. Incluso aunque no vayamos a comparar entre dos, a veces, con uno solo no es fácil concluir si un determinado intervalo es grande o es pequeño. El estudio de estos rangos, por lo tanto, será más sencillo si definimos un factor normalizado de modo que sus valores a través de distintas clases y resúmenes a posteriori puedan ser comparados. Uno de estos factores se denomina *sensibilidad relativa (R.S.)* (ver *Sivaganesan (1991)*) que se define como

$$R.S. = \frac{\text{Rango } E^\pi(g)}{2 \cdot E^{\pi_0}(g)} \times 100\%.$$

La idea de este factor es que R.S. puede ser entendido como una cantidad de variación, en porcentaje, de  $E^\pi(g)$  cuando  $\pi$  varía sobre  $\Gamma$ . Por ejemplo,  $R.S. = 5$  significa que  $E^\pi(g)$  puede variar aproximadamente un 5% a cada lado del centro de su rango de variación sobre  $\Gamma$ . R.S. se usará pues como una medida de robustez (o de carencia de la misma).



## 2.4 Algunos aspectos del análisis bayesiano jerárquico.

### 2.4.1 Introducción.

Consideremos la siguiente situación. Sea una secuencia de variables aleatorias  $X_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$  independientes con función de densidad de  $X_i$  dada  $\theta_i$ ,  $f(x_i | \theta_i)$ . Cada  $\theta_i$  tiene una densidad  $\pi_i(\theta_i | \lambda)$  dependiente de un hiperparámetro  $\lambda$  ( $\lambda$  varía en un espacio paramétrico  $\Lambda$ ) cuya densidad es  $\pi(\lambda)$ .

El modelo jerárquico asumido (se denomina jerárquico porque la información a priori se incorpora de forma recursiva) consistirá, pues, de los siguientes estados.

- Primer estado:

$$X_i \sim f(x_i | \theta_i), \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.1)$$

- Segundo estado:

$$\theta_i \sim \pi_i(\theta_i | \lambda_i), \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (2.2)$$

Usualmente se consideran i.i.d., luego el vector de parámetros  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^t$  tiene la distribución  $\theta \sim \prod_{i=1}^p \pi_i(\theta_i | \lambda) = \pi_1(\theta | \lambda)$ .

- Tercer estado:

$$\lambda \sim \pi_2(\lambda).$$

Esta última densidad suele considerarse, por simplicidad, impropia. Además para ayudar en los cálculos suele escribirse:  $\lambda = (\lambda^1, \lambda^2)$ , y suponiendo  $\lambda^1$  y  $\lambda^2$  independientes, de este modo

$$\pi_2(\lambda) = \pi_{21}(\lambda^1 | \lambda^2) \cdot \pi_{22}(\lambda^2).$$

Nuestro interés radica en la distribución a posteriori de  $\theta$  o alguna característica de ella, habitualmente la media. La herramienta clave para el cálculo está en el resultado siguiente, que expresa la distribución a posteriori en términos de las distribuciones a posteriori de los diversos estados de la estructura jerárquica. El resultado es el siguiente, donde se hace el supuesto de que existen todas las distribuciones y son distintas de cero.

Habiendo observado  $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^p = (x_1, x_2, \dots, x_p)$  la distribución a posteriori de  $\theta$  dados los datos es

$$\begin{aligned}\pi(\theta | \mathbf{x}) &= \int_{\Lambda} \pi_1(\theta | \mathbf{x}, \lambda) \pi_2(\lambda | \mathbf{x}) d\lambda \\ &= \int_{\Lambda} \pi_1(\theta | \mathbf{x}, \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \mathbf{x}, \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2 | \mathbf{x}) d\lambda,\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\pi_1(\theta | \mathbf{x}, \lambda) &= \frac{f(\mathbf{x} | \theta) \pi_1(\theta | \lambda)}{\int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi_1(\theta | \lambda) d\theta} = \frac{f(\mathbf{x} | \theta) \pi_1(\theta | \lambda)}{m_1(\mathbf{x} | \lambda)}, \\ \pi_{21}(\lambda^1 | \mathbf{x}, \lambda^2) &= \frac{m_1(\mathbf{x} | \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \lambda^2)}{\int_{\Lambda^1} m_1(\mathbf{x} | \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \lambda^2) d\lambda^1} = \frac{m_1(\mathbf{x} | \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \lambda^2)}{m_2(\mathbf{x} | \lambda^2)}, \\ \pi_{22}(\lambda^2 | \mathbf{x}) &= \frac{m_2(\mathbf{x} | \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2)}{\int_{\Lambda^2} m_2(\mathbf{x} | \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2) d\lambda^2} = \frac{m_2(\mathbf{x} | \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2)}{m(\mathbf{x})}.\end{aligned}$$

En definitiva queda

$$\begin{aligned}\pi(\theta | \mathbf{x}) &= \\ &= \int_{\Lambda} \frac{f(\mathbf{x} | \theta) \pi_1(\theta | \lambda)}{m_1(\mathbf{x} | \lambda)} \cdot \frac{m_1(\mathbf{x} | \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \lambda^2)}{m_2(\mathbf{x} | \lambda^2)} \cdot \frac{m_2(\mathbf{x} | \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2)}{m(\mathbf{x})} d\lambda \\ &= \frac{f(\mathbf{x} | \theta) \int_{\Lambda} \pi_1(\theta | \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2) d\lambda}{m(\mathbf{x})} \\ &= \frac{f(\mathbf{x} | \theta) \pi_{21}(\theta | \lambda) \pi_2(\lambda) d\lambda}{\int_{\Lambda^2} \int_{\Lambda^1} \int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi_1(\theta | \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2) d\lambda^1 d\lambda^2 d\theta}.\end{aligned}$$

Supongamos ahora que estamos interesados en la media a posteriori de alguna función  $\Phi(\theta)$ , y asumamos que las esperanzas

$$\Phi_1(\mathbf{x}, \lambda) = E^{\pi_1(\theta | \mathbf{x}, \lambda)} [\Phi(\theta)],$$

y

$$\Phi_2(\mathbf{x}, \lambda^2) = E^{\pi_{21}(\lambda^1 | \mathbf{x}, \lambda^2)} [\Phi_1(\mathbf{x}, \lambda)],$$

son conocidas. Entonces resulta que

$$E^{\pi(\theta | \mathbf{x})} [\Phi(\theta)] = \int_{\Theta} \int_{\Lambda} \Phi(\theta) \pi_1(\theta | \mathbf{x}, \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \mathbf{x}, \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2 | \mathbf{x}) d\lambda d\theta =$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Lambda} \left[ \int_{\Theta} \Phi(\theta) \pi_1(\theta | \mathbf{x}, \lambda) d\theta \right] \pi_{21}(\lambda^1 | \mathbf{x}, \lambda^2) d\lambda^1 \pi_{22}(\lambda^2 | \mathbf{x}) d\lambda^2 \\
&= \int_{\Lambda} \Phi_1(\mathbf{x}, \lambda) \pi_{21}(\lambda^1 | \mathbf{x}, \lambda^2) d\lambda^1 \pi_{22}(\lambda^2 | \mathbf{x}) d\lambda^2 \\
&= \int_{\Lambda^2} \Phi_2(\mathbf{x}, \lambda^2) \pi_{22}(\lambda^2 | \mathbf{x}) d\lambda^2.
\end{aligned}$$

Es evidente que según las distribuciones que adoptemos en ( 2.1) y en ( 2.2) el modelo tendrá mayor o menor complejidad. Una de las situaciones que conduce a resultados aseguibles y sencillos de tratar es el que se expone a continuación, donde se suponen distribuciones normales en ( 2.1) y en ( 2.2)

### Caso normal

Supongamos un vector aleatorio  $X = (X_1, X_2, \dots, X_p)^t$ , siendo  $X_i, i = 1, 2, \dots, p$ , independientes con distribución  $N(\theta_i, \sigma_f^2)$ ,  $\sigma_f^2$  conocida, mientras que  $\theta_i$  son i.i.d.  $N(\mu_\pi, \sigma_\pi^2)$ . Supongamos, también, que el hiperparámetro  $\mu_\pi$  tiene la distribución  $N(\beta_0, A)$  ( $\beta_0$  y  $A$  son constantes dadas), mientras que  $\sigma_\pi^2$  es independiente de  $\mu_\pi$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{x} | \theta) &\text{ es } N(\theta, \sigma_f^2 \cdot I), \text{ donde } \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_p)^t; \\
\pi_1(\theta | \lambda) &\text{ es } N(\pi_\mu \cdot \mathbf{1}, \sigma_\pi^2 \cdot \mathbf{1}), \text{ donde } \lambda = (\mu_\pi, \sigma_\pi^2) \text{ y } \mathbf{1} = (1, \dots, 1)^t; \\
\pi_2(\lambda) &= \pi_{21}(\mu_\pi) \cdot \pi_{22}(\sigma_\pi^2), \text{ donde } \pi_{21}(\mu_\pi) \text{ es } N(\beta_0, A).
\end{aligned}$$

**Teorema 7 (Berger(1985))** Dada la priori jerárquica  $\pi$ , definida por  $\pi_1$  y  $\pi_2$  como las anteriores, la media a posteriori,  $\mu^\pi(\mathbf{x})$  y matriz de covarianza  $V^\pi(\mathbf{x})$ , son

$$\mu^\pi(\mathbf{x}) = E^{\pi_{22}(\sigma_\pi^2 | \mathbf{x})} [\mu^*(\mathbf{x}, \sigma_\pi^2)],$$

y

$$\begin{aligned}
V^\pi(\mathbf{x}) &= E^{\pi_{22}(\sigma_\pi^2 | \mathbf{x})} \left[ \sigma_f^2 \cdot I - \frac{\sigma_f^4}{\sigma_f^2 + \sigma_\pi^2} \cdot I \right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma_f^4 \cdot A}{(\sigma_f^2 + \sigma_\pi^2)(pA + \sigma_f^2 + \sigma_\pi^2)} (\mathbf{1}) + (\mu^*(\mathbf{x}, \sigma_\pi^2) - \mu^\pi(\mathbf{x})) (\mu^*(\mathbf{x}, \sigma_\pi^2) - \mu^\pi(\mathbf{x}))^t \right],
\end{aligned}$$

donde  $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^t$ ,  $(\mathbf{1})$  es la matriz toda de unos,

$$\mu^*(\mathbf{x}, \sigma_\pi^2) = \mathbf{x} - \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_\pi^2} (\mathbf{x} - \bar{x}\mathbf{1}) - \frac{\sigma_f^2}{pA + \sigma_f^2 + \sigma_\pi^2} (\bar{x} - \beta_0)\mathbf{1},$$

y

$$\pi_{22}(\sigma_{\pi}^2 | \mathbf{x}) = k \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[ \frac{s^2}{\sigma_f^2 + \sigma_{\pi}^2} + \frac{p(\bar{x} - \beta_0)^2}{pA + \sigma_f^2 + \sigma_{\pi}^2} \right] \right\}}{(\sigma_f^2 + \sigma_{\pi}^2)^{(p-1)/2} (pA + \sigma_f^2 + \sigma_{\pi}^2)^{1/2} A^{-1/2}} \pi_{22}(\sigma_{\pi}^2).$$

Con  $s^2 = \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2$  y  $k$  la constante de normalización que resulta al integrar sobre  $\sigma_{\pi}^2$  e igualar a 1.

Ahora bien, la distribución a priori  $\pi_{21}(\mu_{\pi})$  se suele elegir frecuentemente impropia, esto es  $\pi_{21}(\mu_{\pi}) \equiv 1$ . Antes habíamos supuesto  $\pi_{21}(\mu_{\pi}) \sim N(\beta_0, A)$ , haciendo  $A \rightarrow \infty$  entonces  $\pi_{21}(\mu_{\pi})$  es constante. Además, si tomamos  $\pi_{22}(\sigma_{\pi}^2) \equiv 1$  el teorema anterior quedaría reducido al siguiente corolario cuya demostración también puede verse en *Berger (1985) pp.187-188*, y que constituirá el resultado básico en el que nos apoyaremos para realizar el análisis que nos proponemos.

**Corolario 1 (Berger (1985))** Si  $\pi_2(\mu_{\pi}, \sigma_{\pi}^2) \equiv 1$  y  $p \geq 4$  (de modo que  $\pi_{22}(\sigma_{\pi}^2 | \mathbf{x})$  que aparece abajo sea propia) tomando  $B = \frac{\sigma_f^2}{\sigma_f^2 + \sigma_{\pi}^2}$  se tiene

$$\mu^{\pi}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - E[B](\mathbf{x} - \bar{x} \cdot \mathbf{1}),$$

y

$$V^{\pi}(\mathbf{x}) = \sigma_f^2 I - \sigma_f^2 E[B] \left( I - \frac{1}{p} \mathbf{1} \right) + (E[B^2] - E^2[B])(\mathbf{x} - \bar{x} \cdot \mathbf{1})(\mathbf{x} - \bar{x} \cdot \mathbf{1})^t,$$

donde  $E$  es la esperanza respecto a

$$\pi_{22}(\sigma_{\pi}^2 | \mathbf{x}) = k(\sigma_f^2 + \sigma_{\pi}^2)^{-(p-1)/2} \exp \left\{ -\frac{s^2}{2(\sigma_f^2 + \sigma_{\pi}^2)} \right\},$$

$\mathbf{1} = (1, \dots, 1)^t$ ,  $(\mathbf{1}) \equiv$  Matriz toda de unos,  $s^2 = \sum_{i=1}^p (x_i - \bar{x})^2$  y  $k$  es la constante de normalización que resulta al integrar sobre  $\sigma_{\pi}^2$  e igualar a 1.

## 2.4.2 Robustez en modelos bayesianos jerárquicos.

Hasta ahora hemos especificado nuestras creencias subjetivas acerca del hiperparámetro  $\sigma_{\pi}^2$  (recuérdese que se ha considerado  $\pi_{22}(\sigma_{\pi}^2) \equiv 1$ ). Sin embargo es discutible especificar subjetivamente una distribución a priori para

este parámetro y para el tercer estado, así que a partir de ahora introduciremos algunas clases para este hiperparámetro. Al igual que hicimos en el corolario 1 supondremos  $\pi_{21}(\mu_\pi) \equiv 1$ , mientras que  $\sigma_\pi^2$  se supondrá que tiene una densidad (independiente de  $\mu_\pi$ )  $g(\sigma_\pi^2)$  perteneciente a alguna clase  $\Gamma$ .

Los siguientes resultados sobre robustez en modelos bayesianos jerárquicos están extraídos de *Cano (1993)*.

Observemos que según el corolario 1 la media a posteriori de  $\theta_i$ ,  $\mu_i^g(\mathbf{x})$ , donde  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p)^t$  denota el vector aleatorio observado, es

$$\mu_i^\pi(\mathbf{x}) = x_i - E^{\pi_{22}(\sigma_\pi^2|\mathbf{x})} \left[ \frac{\sigma^2(x_i - \bar{x})}{\sigma^2 + \tau^2} \right], \quad (2.3)$$

### 2.4.3 Distribuciones arbitrarias y unimodales

En primer lugar elegiremos  $\Gamma$  como la clase  $\Gamma_A$  de todas las posibles distribuciones y la clase  $\Gamma_U$  de distribuciones unimodales.

#### El caso $\Gamma_A$ .

En este caso

$$\Gamma_A = \{\text{Todas las distribuciones posibles}\},$$

Usando (2.3), y a partir del lema 1 no es muy difícil obtener

$$\sup_{g \in \Gamma_A} (\inf_{g \in \Gamma_A}) \mu_i^g(\mathbf{x}) = \sup_{\sigma_f^2 > 0} (\inf_{\sigma_\pi^2 > 0}) \left\{ x_i - \frac{\sigma_f^2(x_i - \bar{x})}{\sigma_f^2 + \sigma_\pi^2} \right\}. \quad (2.4)$$

Ahora el problema se reduce a averiguar el  $\sup_{\sigma_f^2 > 0} (\inf_{\sigma_\pi^2 > 0}) (\sigma_f^2 + \sigma_\pi^2)^{-1}$ , que está dado por  $(\sigma_f^2)^{-1}(0)$ . Luego el intervalo en el que varía  $\mu_i^\pi(\mathbf{x})$  es  $(\bar{x}, x_i)$  o bien  $(x_i, \bar{x})$  dependiendo del signo de  $x_i - \bar{x}$ .

#### El caso $\Gamma_U$ .

En este caso

$$\Gamma_U = \{\text{Todas las distribuciones unimodales con moda fija } \tau_0^2\}.$$

Utilizando el hecho de que cada  $\pi_{22}$  en  $\Gamma_U$  se puede representar como una mixtura de densidades uniformes y después de ciertos cálculos algebraicos

se obtiene que el intervalo en el que varía  $\mu_i^\pi(\mathbf{x})$  es

$$\left[ x_i - \sigma_f^2(x_i - \bar{x}) \frac{\int_0^{\tau_0^2} H_{p+2}(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2}{\int_0^{\tau_0^2} H_p(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2}, x_i - \sigma_f^2(x_i - \bar{x}) \frac{\int_{\tau_0^2}^{\infty} H_{p+2}(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2}{\int_{\tau_0^2}^{\infty} H_p(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2} \right], \quad (2.5)$$

donde por simplicidad utilizaremos

$$H_p(\sigma_\pi^2) = \frac{\exp\left\{-\frac{s^2}{2(\sigma_f^2 + \sigma_\pi^2)}\right\}}{(\sigma_f^2 + \sigma_\pi^2)^{(p-1)/2}}.$$

### Clase de $\varepsilon$ -contaminaciones.

Una reducción considerable en el rango de variación de los intervalos de las medias a posteriori se conseguirá a través de las clases de  $\varepsilon$ -contaminaciones ya comentadas anteriormente.

A partir de aquí abordaremos clases de la forma

$$\Gamma_\varepsilon = \{g \mid g = (1 - \varepsilon)g_0 + \varepsilon \cdot q, q \in \mathcal{Q}\}.$$

Es posible probar, ver *Cano (1993)*, que  $\mu_i^\pi(\mathbf{x})$  se puede escribir como:

$$\mu_i^\pi(\mathbf{x}) = \frac{A + x_i \int_0^\infty H_p(\sigma_\pi^2) q(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2 - \sigma_f^2(x_i - \bar{x}) \int_0^\infty H_{p+2}(\sigma_\pi^2) q(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2}{B + \int_0^\infty H_p(\sigma_\pi^2) q(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2},$$

donde:

$$B = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int_0^\infty H_p(\sigma_\pi^2) g_0(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2,$$

y

$$A = x_i B - \sigma_f^2(x_i - \bar{x}) \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int_0^\infty H_{p+2}(\sigma_\pi^2) g_0(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2.$$

### $\mathcal{Q}$ como todas las distribuciones posibles.

En este caso, para  $\Gamma_\varepsilon$  y  $\mathcal{Q}_1$  dada por

$$\mathcal{Q}_1 = \{ \text{Todas las distribuciones posibles} \}$$

Se demuestra (ver *Cano (1993)*) que

$$\sup_{g \in \Gamma_\varepsilon} (\inf_{g \in \Gamma_\varepsilon}) \mu_i^\pi(\mathbf{x}) = \sup_{t > 0} (\inf_{t > 0}) \frac{A + x_i H_p(t) - \sigma_f^2(x_i - \bar{x}) H_{p+2}(t)}{B + H_p(t)}, \quad (2.6)$$

con  $A$ ,  $B$  y  $H_p(t)$  como las dadas anteriormente.

$\mathcal{Q}$  como todas las distribuciones unimodales.

En este caso, para  $\Gamma_\epsilon$  y  $\mathcal{Q}_2$  dada por

$$\mathcal{Q}_2 = \left\{ \text{Todas las distribuciones unimodales con moda fija } \tau_0^2 \right\},$$

se demuestra que el ínfimo y el supremo de la media a posteriori se obtiene minimizando y maximizando una función de una variable, obteniéndose,

$$\sup_{g \in \Gamma_\epsilon} (\inf_{g \in \Gamma_\epsilon} \mu_i^\pi(\mathbf{x})) = \sup_{t > 0} (\inf_{t > 0} \frac{A + \frac{1}{t - \tau_0^2} \int_{\tau_0^2}^t (x_i H_p(\sigma_\pi^2) - \sigma^2(x_i - \bar{x}) H_{p+2}(\sigma_\pi^2)) d\sigma_\pi^2}{B + \frac{1}{t - \tau_0^2} \int_{\tau_0^2}^t H_p(\sigma_\pi^2) d\sigma_\pi^2}),$$

donde  $A$ ,  $B$  y  $H_p(\sigma_\pi^2)$  son como las dadas anteriormente.

## Capítulo 3

### El modelo colectivo.

El modelo colectivo de la Teoría del Riesgo, como ya dijimos en el capítulo 1, es una secuencia  $N, X_1, X_2, \dots$  de variables con la siguiente interpretación:

- $N$  es la variable aleatoria *número de siniestros*.
- $X_i, (i = 1, 2, \dots, N)$  es la variable aleatoria *coste del  $i$ -ésimo siniestro*. Estas variables aleatorias son entre sí independientes y equidistribuidas.
- $X = \sum_{i=1}^N X_i$  es la variable aleatoria *coste total*.

En algunos casos específicos estas variables aleatorias degeneran en variables deterministas. Por ejemplo en muchas de las diferentes formas de los seguros de vida los costes de los siniestros son sumas fijas. En otras ocasiones  $X_i$  y  $N$  son variables aleatorias, como ocurre en seguros de accidentes, especialmente en seguros de automóviles.

Este capítulo lo hemos dividido en dos secciones; en la primera sección nos ocuparemos del modelo colectivo no compuesto y en la segunda del modelo colectivo compuesto, ambos modelos ya comentados en el capítulo 1.

En ambas secciones obtendremos las expresiones, para las distribuciones oportunas, de la verdadera prima, de la prima a priori y de la prima a posteriori, para cada uno de los cuatro principios de cálculo de prima que van a ser objeto de estudio en toda la Memoria: principio de prima neta, de utilidad exponencial, Esscher y de varianza. Posteriormente obtendremos expresiones de la prima a posteriori en un modelo de clases de contaminaciones y realizaremos un análisis de sensibilidad bayesiano.



### 3.1 El modelo colectivo no compuesto.

Consideraremos en esta sección variables  $X_1 | \theta, X_2 | \theta, \dots$  independientes y equidistribuidas, mientras que  $\theta$  varía en el espacio paramétrico  $\Theta$ .

Interpretaremos  $X_i | \theta$  como la variable aleatoria coste del siniestro caracterizado por  $\theta$  en el período  $i$ . Bajo los supuestos anteriores se entiende que las cantidades de reclamación en los períodos consecutivos están igualmente distribuidas y no hay influencia de un período a otro. Además, al comenzar el período  $n + 1$  conocemos las cantidades reclamadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$  de los períodos precedentes, que son interpretadas como realizaciones de las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$ .

Siguiendo la metodología adoptada por Heilmann (1989) supondremos que la distribución del riesgo  $X$ ,  $F(x | \theta)$ , es conocida, con  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ .

Supondremos también una distribución a priori,  $\pi_0(\theta)$ , del parámetro  $\theta$ ; en Teoría del Riesgo a la distribución a priori se le suele denominar *distribución estructura*, pues describe la estructura del colectivo de riesgos bajo consideración.

Para calcular la prima a posteriori tal y como la definimos en el capítulo 1 es preciso calcular la distribución a posteriori de  $\theta$  a partir de la distribución a priori y de la información muestral. Así, si por ejemplo  $X$  sigue en el colectivo una distribución Poisson de parámetro  $\theta$  (interpretaremos este parámetro como la cantidad media de indemnización), esto es,  $X \sim P(\theta)$ , y  $\theta$  tiene por distribución a priori una gamma con parámetros  $a$  y  $b$ , esto es,  $\pi_0(\theta) = \Gamma(a, b)$ , y realizamos una observación de los  $n$  años anteriores para los que se han observado  $X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n$ , la distribución a posteriori es

$$\pi_0(\theta | \mathbf{x}) = \pi_0(\theta | x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{f(\mathbf{x} | \theta) \cdot \pi_0(\theta)}{\int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi_0(\theta) d\theta},$$

con  $f(\mathbf{x} | \theta)$  la verosimilitud de la muestra, que en nuestro caso es

$$f(\mathbf{x} | \theta) = f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) = \frac{e^{-n\theta} \theta^{n\bar{x}}}{\prod_{i=1}^n x_i!},$$

siendo  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i/n$ ; luego la distribución a posteriori de  $\theta$  es

$$\pi_0(\theta | \mathbf{x}) \propto e^{-(a+n)\theta} \cdot \theta^{b+n\bar{x}-1},$$

y esto es de nuevo una densidad gamma, ahora con parámetros  $a + n$  y  $b + n\bar{x}$ .

En un contexto bayesiano una vía cómoda consiste en determinar una función de estructura para  $\theta$  perteneciente a una clase que sea *cerrada* bajo muestreo, esto es, elegir una densidad a priori para  $\theta$  sobre una clase de tal manera que la densidad a posteriori permanezca en la misma clase y así la construcción de la función de estructura revisada sea inmediata. A estas clases se las denomina *conjugadas*.

Esta será la vía para nuestro trabajo, que al mismo tiempo es la seguida por *Heilmann (1989)*, quien considera toda una batería de verosimilitudes y distribuciones a priori, de manera que la distribución a posteriori pertenezca a la misma clase que la distribución a priori.

A lo largo de toda esta sección manejaremos las distribuciones discretas y continuas que aparecen en la tabla 3.1 junto con algunas características de las mismas que serán necesarias para el desarrollo del trabajo que nos proponemos.

Tabla 3.1: Distribuciones discretas y continuas.

Nombre	Función de probabilidad	Parámetros	Media	Función generatriz de momentos
Binomial $B(N, p)$	$p(x) = \binom{N}{x} p^x q^{n-x}$	$N = 1, 2, \dots$ $(p = 1 - q) \in [0, 1]$	$Np$	$(pe^t + q)^N$ $t \in (-\infty, +\infty)$
Binomial Negativa $BN(r, p)$	$p(x) = \binom{r+x-1}{x} p^r q^x$	$r > 0$ $(p = 1 - q) \in [0, 1]$	$r \frac{q}{p}$	$\left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$ $t \in (-\infty, -\text{Log } q)$
Poisson $P(\lambda)$	$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$\lambda > 0$	$\lambda$	$e^{\lambda(e^t-1)}$ $t \in (-\infty, +\infty)$
Gamma $\Gamma(a, b)$	$f(x) = \frac{a^b}{\Gamma(b)} x^{b-1} e^{-ax}$	$a > 0, b > 0$	$\frac{b}{a}$	$\left(\frac{a}{a-t}\right)^b$ $t \in (-\infty, a)$
Exponencial $Exp(a)$	$f(x) = ae^{-ax}$	$a > 0$	$\frac{1}{a}$	$\frac{a}{a-t}$ $t \in (-\infty, a)$
Beta $Be(a, b)$	$f(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}$	$a > 0, b > 0$	$\frac{a}{a+b}$	
Normal $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$\mu \in (-\infty, +\infty)$ $\sigma^2 > 0$	$\mu$	$e^{1/2\sigma^2 t^2 + \mu t}$ $t \in (-\infty, +\infty)$

En la tabla 3.2 se recogen los pares de distribuciones conjugadas para los que obtendremos las primas a posteriori.

Tabla 3.2: Pares de distribuciones conjugadas.

Verosimilitud Priori	Posteriori
$X   \theta \sim P(\theta)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$\Gamma(a + n, b + n\bar{x})$
$X   \theta \sim BN(r, \theta)$ $\theta \sim Be(a, b)$	$Be(a + nr, b + n\bar{x})$
$X   \theta \sim B(m, \theta)$ $\theta \sim Be(a, b)$	$Be(a + n\bar{x}, b + mn - n\bar{x})$
$X   \theta \sim \Gamma(\theta, \nu)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$\Gamma(a + n\bar{x}, b + n\nu)$
$X   \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\theta \sim N(a, \tau^2)$	$N\left(\frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}, \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}\right)$
$X   \theta \sim Exp(\theta)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$\Gamma(a + n\bar{x}, b + n)$

No es objetivo de esta Memoria el obtener las expresiones de las primas verdaderas, a priori y a posteriori para todos los pares de verosimilitudes y distribuciones a priori de la tabla 3.2 y para los distintos principios de cálculo de primas; para un seguimiento detallado de ese cometido el lector puede consultar *Heilmann (1989)*.

Sin embargo vamos a exponer el cálculo de las primas verdadera, a priori y a posteriori en un par de ejemplos que puede ser exponente del procedimiento a seguir en los demás casos.

### Ejemplo 1.

Supongamos que la distribución del riesgo es  $N(\theta, \sigma^2)$ , esto es,  $X \sim N(\theta, \sigma^2)$ , con  $\sigma^2$  conocida. La verdadera prima individual, aplicando el principio de utilidad exponencial es

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \{E_F [e^{\alpha x} | \theta]\} \\
 &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} [e^{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \theta\alpha}] = \frac{1}{2}\sigma^2\alpha + \theta,
 \end{aligned}$$

ya que la función generatriz de momentos de la distribución normal  $N(\theta, \sigma^2)$  es  $e^{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \theta\alpha}$ .

Supongamos ahora que  $\theta$  sigue en el colectivo una distribución  $N(a, \tau^2)$ ,  $a$  y  $\tau^2$  deben ser asignadas por el actuario. Entonces la prima a priori es  $P^* = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \{ E_{\pi_0} [e^{\alpha P}] \}$ , siendo  $P$  la expresión obtenida anteriormente, esto es la verdadera prima. Observemos que para el cálculo de la prima a priori sólo se necesita especificar una distribución a priori al parámetro  $\theta$ ; el cálculo de la misma es como sigue

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \{ E_{\pi_0} [e^{\alpha P}] \} \\ &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left[ \int_{\Theta} e^{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \alpha\theta} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{(\theta-a)^2}{2\tau^2}} d\theta \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left[ e^{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2} \int_{\Theta} e^{\alpha\theta} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{(\theta-a)^2}{2\tau^2}} d\theta \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left[ e^{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2} e^{\frac{1}{2}\tau^2\alpha^2 + a\alpha} \right] \\ &= a + \frac{\alpha}{2}(\sigma^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

Si ahora observamos las cantidades reclamadas en los  $n$  primeros años podemos combinar la información muestral proporcionada con la distribución a priori para obtener la prima a posteriori, que pasa simplemente por sustituir, a la vista de la tabla 3.2 a por  $\frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}$  y  $\tau^2$  por  $\frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}$  para obtener la expresión

$$P^* = \frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \sigma^2 \right).$$

### Ejemplo 2.

Si suponemos ahora que el riesgo  $X$  sigue una distribución de Poisson de parámetro  $\theta$ , con distribución a priori  $\Gamma(a, b)$ , entonces la verdadera prima utilizando el principio Esscher es

$$\begin{aligned} P &= \frac{E_F [xe^{\alpha x} | \theta]}{E_F [e^{\alpha x} | \theta]} = \frac{\sum_x x e^{\alpha x} \frac{e^{-\theta} \theta^x}{x!}}{e^{\theta(e^\alpha - 1)}} \\ &= \frac{\theta e^\alpha \sum_x e^{-\theta} \frac{\theta^{x-1}}{x!} e^{\alpha(x-1)}}{e^{\theta(e^\alpha - 1)}} = \frac{\theta e^\alpha e^{\theta(e^\alpha - 1)}}{e^{\theta(e^\alpha - 1)}} \\ &= \theta e^\alpha. \end{aligned}$$

La prima a priori es

$$P' = \frac{E_{\pi_0} [P e^{\alpha P}]}{E_{\pi_0} [e^{\alpha P}]}.$$

El desarrollo del numerador es

$$\begin{aligned} E_{\pi_0} [P e^{\alpha P}] &= \int_{\Theta} \theta e^{\alpha} e^{\alpha \theta e^{\alpha}} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \theta^{b-1} e^{-a\theta} d\theta \\ &= \frac{a^b}{\Gamma(b)} e^{\alpha} \int_{\Theta} \theta^b e^{-(a-\alpha e^{\alpha})\theta} d\theta = e^{\alpha} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+1)}{(a-\alpha e^{\alpha})^{b+1}} \\ &= \frac{b a^b e^{\alpha}}{(a-\alpha e^{\alpha})^{b+1}}. \end{aligned}$$

El desarrollo del denominador es

$$\begin{aligned} E_{\pi_0} [e^{\alpha P}] &= \int_{\Theta} e^{\alpha \theta e^{\alpha}} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \theta^{b-1} e^{-a\theta} d\theta \\ &= \frac{a^b}{\Gamma(b)} \int_{\Theta} \theta^{b-1} e^{-(a-\alpha e^{\alpha})\theta} d\theta = \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b)}{(a-\alpha e^{\alpha})^b} \\ &= \frac{a^b}{(a-\alpha e^{\alpha})^b}. \end{aligned}$$

Luego

$$P' = \frac{b e^{\alpha}}{a - \alpha e^{\alpha}}.$$

La prima a posteriori se obtiene sin más que sustituir  $a$  por  $a+n$  y  $b$  por  $b+n\bar{x}$ , y es

$$P^* = \frac{(b+n\bar{x})e^{\alpha}}{a+n-\alpha e^{\alpha}}.$$

Siguiendo a *Heilman (1989)* recogemos únicamente las primas que aparecen en las tablas 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6.

Tabla 3.3: Prima verdadera, a priori y a posteriori para distintas verosimilitudes y distribuciones a priori. Principio de prima neta.

Verosimilitud Priori	Verdadera	Priori	Posteriori
$X   \theta \sim P(\theta)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$P = \theta$	$P' = \frac{b}{a}$	$P^* = \frac{b+n\bar{x}}{a+n}$
$X   \theta \sim BN(\tau, \theta)$ $\theta \sim Be(a, b)$	$P = \tau \frac{1-\theta}{\theta}$	$P' = \tau \frac{b}{a-1}$	$P^* = \tau \frac{b+n\bar{x}}{a+n\tau-1}$
$X   \theta \sim B(m, \theta)$ $\theta \sim Be(a, b)$	$P = m\theta$	$P' = m \frac{a}{a+b}$	$P^* = m \frac{a+n\bar{x}}{a+b+mn}$
$X   \theta \sim \Gamma(\theta, \nu)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$P = \frac{\nu}{\theta}$	$P' = \nu \frac{a}{b-1}$	$P^* = \nu \frac{a+n\bar{x}}{b+n\nu-1}$
$X   \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\theta \sim N(a, \tau^2)$	$P = \theta$	$P' = a$	$P^* = \frac{a\sigma^2+n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2}$
$X   \theta \sim Exp(\theta)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$P = \frac{1}{\theta}$	$P' = \frac{a}{b-1}$	$P^* = \frac{a+n\bar{x}}{b+n-1}$

Tabla 3.4: Prima verdadera, a priori y a posteriori para distintas verosimilitudes y distribuciones a priori. Principio de utilidad exponencial.

Verosimilitud Priori	Verdadera	Priori	Posteriori
$X   \theta \sim P(\theta)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$P = \frac{\theta(e^\alpha-1)}{\alpha}$	$P' = \frac{b}{\alpha} \text{Log} \left[ \frac{a}{a-e^\alpha+1} \right]$	$P^* = \frac{b+n\bar{x}}{\alpha} \text{Log} \left[ \frac{a+n}{a+n-e^\alpha+1} \right]$
$X   \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\theta \sim N(a, \tau^2)$	$P = \frac{1}{2}\sigma^2\alpha + \theta$	$P' = a + \frac{\alpha}{2}(\sigma^2 + \tau^2)$	$P^* = \frac{a\sigma^2+n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2} + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2} + \sigma^2 \right)$

Tabla 3.5: Prima verdadera, a priori y a posteriori para distintas verosimilitudes y distribuciones a priori. Principio Esscher.

Verosimilitud Priori	Verdadera	Priori	Posteriori
$X   \theta \sim P(\theta)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$P = \theta e^\alpha$	$P' = \frac{be^\alpha}{a-\alpha e^\alpha}$	$P^* = \frac{(b+n\bar{x})e^\alpha}{a+n-\alpha e^\alpha}$
$X   \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ $\theta \sim N(a, \tau^2)$	$P = \theta + \alpha\sigma^2$	$P' = a + (\sigma^2 + \tau^2)\alpha$	$P^* = \frac{a\sigma^2+n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2} + \left( \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2+n\tau^2} + \sigma^2 \right) \alpha$

Tabla 3.6: Prima verdadera, a priori y a posteriori para distintas verosimilitudes y distribuciones a priori. Principio de varianza.

Verosimilitud Priori	Verdadera	Priori	Posteriori
$X   \theta \sim P(\theta)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$P = \theta + 1$	$P' = \frac{b(b+1)+2ab+a^2}{a(a+b)}$	$P^* = \frac{(b+n\bar{x})(b+n\bar{x}+1)+2(a+n)(b+n\bar{x})+(a+n)^2}{(a+n)(a+n+b+n\bar{x})}$
$X   \theta \sim \Gamma(\theta, \nu)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$P = \frac{\nu+1}{\theta}$	$P' = (\nu+1)\frac{a}{b-2}$	$P^* = (\nu+1)\frac{a+n\bar{x}}{b+n\nu+2}$
$X   \theta \sim Exp(\theta)$ $\theta \sim \Gamma(a, b)$	$P = \frac{2}{\theta}$	$P' = \frac{2a}{b-2}$	$P^* = \frac{2(a+n\bar{x})}{b+n-2}$

Nos proponemos, como hemos manifestado en repetidas ocasiones, estudiar el rango de variación de  $P^*$  cuando la distribución a priori pertenece a  $\Gamma_\varepsilon$ . Comenzaremos nuestro estudio en el caso más general o amplio posible, admitiendo que el actuario tiene imprecisión total en la distribución a priori, elegiremos así la clase contaminante  $\mathcal{Q}_1$  de *todas las distribuciones*. Obviamente este planteamiento puede admitir distribuciones a priori que no sean nada plausibles con la información subjetiva del actuario, ahora bien situación de fuerte estabilidad para estos casos indicarán desde luego gran confianza en una distribución a priori a contaminar.

A continuación incorporaremos al estudio ciertas características cualitativas que creemos pueden resultar ciertamente intuitivas para el actuario, nos referimos a características de unimodalidad y simetría. Si la distribución a priori elegida es unimodal, incorporaremos esta característica a través de la clase contaminante  $\mathcal{Q}_2$  de *todas las distribuciones unimodales con la misma moda que  $\pi_0(\theta)$* . Los habituales caso con distribución a priori gamma o normal son adecuados para esta situación. Por último cuando la distribución a priori sea simétrica y unimodal la clase contaminante elegida será  $\mathcal{Q}_3$  de *todas las distribuciones simétricas y unimodales con la misma moda que  $\pi_0(\theta)$* , como ocurre en el caso en que la distribución a priori es normal.

Pasemos pues ya sin más comentarios a calcular el ínfimo y el supremo de  $P^*$  para cada uno de los cuatro principios de cálculo de primas mencionados, los pares de verosimilitudes-priori y las clases contaminantes  $\mathcal{Q}_1$ ,  $\mathcal{Q}_2$  y  $\mathcal{Q}_3$ .

### 3.1.1 Principio de prima neta.

Recordemos que según este principio la verdadera prima individual para un riesgo  $X$  con función de densidad  $f(x | \theta)$  es,

$$P = \int_{\mathcal{X}} x f(x | \theta) dx = g(\theta),$$

y la prima a posteriori viene dada por,

$$P^* = \int_{\Theta} \left[ \int_{\mathcal{X}} x f(x | \theta) dx \right] \pi_0(\theta | \mathbf{x}) \theta = \int_{\Theta} P \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta = \int_{\Theta} g(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}).$$

$\mathcal{Q}_1$ : Todas las distribuciones.

Según el resultado del teorema 1, el ínfimo y el supremo de  $P^*$  en el modelo  $\Gamma_\varepsilon$  con  $\mathcal{Q}_1$  se obtiene calculando el mínimo y el máximo de

$$R(\theta) = \frac{A_0 + g(\theta) \cdot f(\mathbf{x} | \theta)}{A + f(\mathbf{x} | \theta)}. \quad (3.1)$$

Poisson-Gamma:  $X | \theta \sim P(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

Utilizaremos el resultado (3.1). En este caso

$$g(\theta) = P = \theta, \quad (3.2)$$

como puede verse en la tabla 3.3. Si observamos la siniestralidad ocurrida en los  $n$  años anteriores, la verosimilitud es

$$f(\mathbf{x} | \theta) = \frac{e^{-n\theta} \cdot \theta^{n\bar{x}}}{\prod x_i!}, \quad (3.3)$$

donde  $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$  es la siniestralidad media muestral. Las expresiones de  $A$  y  $A_0$  son,

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi_0(\theta) d\theta \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{\prod x_i!} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \int_{\Theta} \theta^{b+n\bar{x}-1} e^{-(a+n)\theta} d\theta \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{\prod x_i!} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+n\bar{x})}{(a+n)^{b+n\bar{x}}}, \end{aligned} \quad (3.4)$$



$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \frac{b + n\bar{x}}{a + n}. \quad (3.5)$$

$P^*$ , como en los casos posteriores, aparece en la tabla 3.3. Llevando todo esto a (3.1) resulta

$$R(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)}, \quad (3.6)$$

con

$$P_1 = (1 - \varepsilon)a^b \Gamma(b + n\bar{x}), \quad (3.7)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon \Gamma(b)(a + n)^{b+n\bar{x}} \theta^{n\bar{x}+1} e^{-n\theta}, \quad (3.8)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon \Gamma(b)(a + n)^{b+n\bar{x}} \theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}. \quad (3.9)$$

Minimizando y maximizando la expresión (3.6) con respecto a  $\theta$  se obtiene el inferior y superior de  $P^*$ .

### Binomial Negativa-Beta: $X | \theta \sim BN(r, \theta)$ , $\theta \sim Be(a, b)$ .

De nuevo utilizamos el resultado (3.1). Ahora

$$g(\theta) = P = r \frac{1 - \theta}{\theta},$$

como puede verse de nuevo en la tabla 3.3. La verosimilitud del dato observado es ahora

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | \theta) &= \\ &= \prod_{i=1}^n \binom{r + x_i - 1}{x_i} \theta^r (1 - \theta)^{x_i} = \left[ \prod_{i=1}^n \binom{r + x_i - 1}{x_i} \right] \theta^{nr} (1 - \theta)^{n\bar{x}}. \end{aligned}$$

$A$  y  $A_0$  vienen dados por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int_{\Theta} \left[ \prod_{i=1}^n \binom{r + x_i - 1}{x_i} \right] \theta^{nr} (1 - \theta)^{n\bar{x}} \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \left[ \prod_{i=1}^n \binom{r + x_i - 1}{x_i} \right] \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{\Theta} \theta^{a+nr-1} (1 - \theta)^{n\bar{x}+b-1} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \left[ \prod_{i=1}^n \binom{r + x_i - 1}{x_i} \right] \frac{\Gamma(a + b) \Gamma(a + nr) \Gamma(b + n\bar{x})}{\Gamma(a)\Gamma(b) \Gamma(a + nr + b + n\bar{x})}, \end{aligned}$$

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot r \frac{b + n\bar{x}}{a + nr - 1}.$$

Finalmente queda

$$R(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 - \varepsilon)\Gamma(a + b)\Gamma(a + nr)\Gamma(b + n\bar{x}), \\ P_2(\theta) &= \varepsilon\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a + b + nr + n\bar{x})r\theta^{nr-1}(1 - \theta)^{n\bar{x}+1}, \\ P_3(\theta) &= \varepsilon\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a + b + nr + n\bar{x})\theta^{nr}(1 - \theta)^{n\bar{x}}. \end{aligned}$$

**Binomial-Beta:**  $X | \theta \sim B(m, \theta)$ ,  $\theta \sim Be(a, b)$ .

De nuevo utilizamos el resultado ( 3.1). En este caso

$$g(\theta) = P = m\theta,$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | \theta) &= \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} \theta^{x_i} (1 - \theta)^{m-x_i} \\ &= \left[ \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} \right] \theta^{n\bar{x}} (1 - \theta)^{nm - n\bar{x}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int_{\Theta} \left[ \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} \right] \theta^{n\bar{x}} (1 - \theta)^{nm - n\bar{x}} \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1} (1 - \theta)^{b-1} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \left[ \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} \right] \frac{\Gamma(a + b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \int_{\Theta} \theta^{a+n\bar{x}-1} (1 - \theta)^{b+nm-n\bar{x}-1} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \left[ \prod_{i=1}^n \binom{m}{x_i} \right] \frac{\Gamma(a + b) \Gamma(a + n\bar{x}) \Gamma(b + nm - n\bar{x})}{\Gamma(a)\Gamma(b) \Gamma(a + b + nm)}, \end{aligned}$$

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot m \frac{a + n\bar{x}}{a + b + mn}.$$

Finalmente queda

$$R(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$\begin{aligned} P_1 &= (1 - \varepsilon)\Gamma(a + b)\Gamma(a + n\bar{x})\Gamma(b + nm - n\bar{x}), \\ P_2(\theta) &= \varepsilon\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a + b + nm)m\theta^{n\bar{x}+1}(1 - \theta)^{nm - n\bar{x}}, \\ P_3(\theta) &= \varepsilon\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(a + b + nm)\theta^{n\bar{x}}(1 - \theta)^{nm - n\bar{x}}. \end{aligned}$$

Gamma-Gamma:  $X | \theta \sim \Gamma(\theta, \nu)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

Utilizamos de nuevo el resultado (3.1). En este caso

$$g(\theta) = P = \frac{\nu}{\theta}, \quad (3.10)$$

$$f(\mathbf{x} | \theta) = \prod_{i=1}^n \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} x_i^{\nu-1} e^{-\theta x_i} = \left[ \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} \right]^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\nu-1} e^{-n\bar{x}\theta}, \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int_{\Theta} \left[ \frac{\theta^\nu}{\Gamma(\nu)} \right]^n \left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{\nu-1} e^{-n\bar{x}\theta} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \theta^{b-1} e^{-a\theta} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{(\prod x_i)^{\nu-1}}{[\Gamma(\nu)]^n} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \int_{\Theta} \theta^{b+n\nu-1} e^{-(a+n\bar{x})\theta} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{(\prod x_i)^{\nu-1}}{[\Gamma(\nu)]^n} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b + n\nu)}{(a + n\bar{x})^{b+n\nu}}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \nu \frac{a + n\bar{x}}{b + n\nu - 1}. \quad (3.13)$$

Finalmente queda

$$R(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = (1 - \varepsilon)a^b \Gamma(b + n\nu), \quad (3.14)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon \Gamma(b)(a + n\bar{x})^{b+n\nu} \nu \theta^{n\nu-1} e^{-n\bar{x}\theta}, \quad (3.15)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon \Gamma(b)(a + n\bar{x})^{b+n\nu} \theta^{n\nu} e^{-n\bar{x}\theta}. \quad (3.16)$$

**Normal-Normal:**  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\theta \sim N(a, \tau^2)$ .

En este caso

$$g(\theta) = P = \theta, \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} | \theta) &= \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{\sigma(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \\ &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\}, \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde se ha utilizado la identidad

$$\sum (x_i - \theta)^2 = \sum (x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \theta)^2.$$

A partir de ahora utilizaremos por comodidad, y cuando proceda,  $e^{\cdot} \equiv \exp\{\cdot\}$ . La densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$ ,  $m(\mathbf{x} | \pi_0)$ , está desarrollada en el apéndice A, y es

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x} | \pi_0) &= \frac{\sigma}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}} \\ &\cdot \exp\left\{-\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\} \exp\left\{\frac{n[a(a - 2\bar{x}) + \bar{x}^2]}{2(\tau^2 n + \sigma^2)}\right\}, \end{aligned} \quad (3.19)$$

$$A = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0), \quad (3.20)$$

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}. \quad (3.21)$$

$R(\theta)$  es ahora,

$$R(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}} \exp \left\{ \frac{n [a(a - 2\bar{x}) + \bar{x}^2]}{2(\tau^2 n + \sigma^2)} \right\}, \quad (3.22)$$

$$P_2(\theta) = \theta \exp \left\{ -\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (3.23)$$

$$P_3(\theta) = \exp \left\{ -\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (3.24)$$

Exponencial-Gamma:  $X | \theta \sim \text{Exp}(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

Ahora

$$g(\theta) = P = \frac{1}{\theta}, \quad (3.25)$$

$$f(\mathbf{x} | \theta) = \prod_{i=1}^n \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-n\bar{x}\theta}, \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int_{\Theta} \theta^n e^{-n\bar{x}\theta} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \theta^{b-1} e^{-a\theta} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \int_{\Theta} \theta^{b+n-1} e^{-(a+n\bar{x})\theta} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+n)}{(a+n\bar{x})^{b+n}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \frac{a + n\bar{x}}{b + n - 1}. \quad (3.28)$$

La expresión a minimizar y maximizar es pues,

$$R(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = (1 - \varepsilon)a^b\Gamma(b + n), \quad (3.29)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon\Gamma(b)(a + n\bar{x})^{b+n}\theta^{n-1}e^{-n\bar{x}\theta}, \quad (3.30)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon\Gamma(b)(a + n\bar{x})^{b+n}\theta^n e^{-n\bar{x}\theta}. \quad (3.31)$$

### $\mathcal{Q}_2$ : Unimodalidad.

Ahora utilizando el resultado del teorema 2, el ínfimo y el supremo de  $P^*$  se obtienen minimizando y maximizando la siguiente función respecto a  $z$ .

$$\frac{A_0 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta}{A + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} f(\mathbf{x} | \theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0, \quad (3.32)$$

o bien, es,

$$\frac{A_0 + g(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0)}{A + f(\mathbf{x} | \theta_0)}, \text{ si } z = 0, \quad (3.33)$$

con  $A$ ,  $A_0$ ,  $g(\theta)$  y  $f(\mathbf{x} | \theta)$  como las calculadas anteriormente. Luego las funciones que habrá que minimizar y maximizar se desprenden de las obtenidas en el caso de todas las distribuciones sin más que sustituir el segundo sumando en el numerador y en el denominador por las integrales que aparecen en estas expresiones y dividir por  $z$ , cuando  $z \neq 0$ . Cuando  $z = 0$  sustituimos  $\theta$  por  $\theta_0$ .

### Poisson-Gamma: $X | \theta \sim P(\theta)$ , $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

$g(\theta)$  es como en (3.2),  $f(\mathbf{x} | \theta)$  como en (3.3),  $A$  como en (3.4) y  $A_0$  como en (3.5).

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en (3.7), (3.8) y (3.9) respectivamente.

Gamma-Gamma:  $X | \theta \sim \Gamma(\theta, \nu)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

Ahora  $g(\theta)$  es como en ( 3.10),  $f(\mathbf{x} | \theta)$  como en ( 3.11),  $A$  como en ( 3.12) y  $A_0$  como en ( 3.13).

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.14), ( 3.15) y ( 3.16) respectivamente.

Normal-Normal:  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\theta \sim N(a, \tau^2)$ .

$g(\theta)$  es como en ( 3.17),  $f(\mathbf{x} | \theta)$  como en ( 3.18),  $A$  como en ( 3.20) y  $A_0$  como en ( 3.21).

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.22), ( 3.23) y ( 3.24) respectivamente.

Exponencial-Gamma:  $X | \theta \sim Exp(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

$g(\theta)$  es como en ( 3.25),  $f(\mathbf{x} | \theta)$  como en ( 3.26),  $A$  como en ( 3.27) y  $A_0$  como en ( 3.28)

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.29), ( 3.30) y ( 3.31) respectivamente.

**Q<sub>3</sub>: Simetría y unimodalidad.**

Utilizamos ahora el resultado del teorema 3. En este caso las expresiones a minimizar y maximizar vienen dadas por,

$$\frac{A_0 + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} g(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta}{A + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} f(\mathbf{x} | \theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0, \quad (3.34)$$

$$\frac{A_0 + g(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0)}{A + f(\mathbf{x} | \theta_0)}, \text{ si } z = 0, \quad (3.35)$$

Podemos observar que las expresiones coincidirán, cuando  $z = 0$ , con el caso en el que sólo se exige unimodalidad. Cuando  $z \neq 0$  sólo habrá que cambiar los límites de integración y dividir por  $2z$  en vez de por  $z$ .

**Normal-Normal:**  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\theta \sim N(a, \tau^2)$ .

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en (3.22), (3.23) y (3.24) respectivamente.

**3.1.2 Principio de utilidad exponencial.**

En este caso la verdadera prima es

$$P = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \{ E_F [e^{\alpha x} | \theta] \}$$

y la prima a posteriori es

$$P^* = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \{ E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] \}$$

Lo que haremos en esta ocasión es estudiar el rango de variación de  $g(\theta) = E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]]$ , a cuyo resultado le aplicaremos el logaritmo y lo dividiremos por  $\alpha$ , para obtener el rango de variación de  $P^*$ .



$\mathcal{Q}_1$ : Todas las distribuciones.

Utilizaremos la expresión ( 3.1) que se deduce del teorema 1.

Poisson-Gamma:  $X | \theta \sim P(\theta), \theta \sim \Gamma(a, b)$

Observemos que

$$g(\theta) = E_F[e^{\alpha x} | \theta] = e^{\theta(e^\alpha - 1)},$$

que no es más que la función generatriz de momentos de la distribución de Poisson de parámetro  $\theta$ , como puede apreciarse en la tabla 3.1.  $f(\mathbf{x} | \theta)$  ya fue calculado anteriormente y es como en ( 3.3),  $A$  es como en ( 3.4), mientras que  $A_0$  es

$$A_0 = A \cdot E_{\pi_0} [E_F[e^{\alpha x} | \theta]] = A \cdot \left[ \frac{a + n}{a + n - e^\alpha + 1} \right]^{b+n\bar{x}}.$$

Finalmente queda

$$R(\theta) = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F[e^{\alpha x} | \theta]] + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)} \right\},$$

con

$$P_1 = (1 - \varepsilon) a^b \Gamma(b + n\bar{x}), \quad (3.36)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon \Gamma(b) (a + n)^{b+n\bar{x}} \theta^{n\bar{x}} e^{-(n-e^\alpha+1)\theta}, \quad (3.37)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon \Gamma(b) (a + n)^{b+n\bar{x}} \theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}. \quad (3.38)$$

Normal-Normal:  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2), \theta \sim N(a, \tau^2)$ .

Ahora

$$g(\theta) = E_F[e^{\alpha x} | \theta] = e^{\frac{1}{2}\sigma^2\alpha^2 + \alpha\theta},$$

que es la función generatriz de momentos de la distribución normal  $N(\theta, \sigma^2)$  como puede verse de nuevo en la Tabla 3.1.  $f(\mathbf{x} | \theta)$  es como en ( 3.18) y  $A$  es como en ( 3.20), mientras que  $A_0$  viene dada por

$$A_0 = A \cdot E_{\pi_0} [E_F[e^{\alpha x} | \theta]] = A \cdot \exp \left\{ \alpha \left[ \frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \frac{\alpha}{2} \left( \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \sigma^2 \right) \right] \right\}$$

Llevando todo esto a ( 3.1) resulta

$$R(\theta) = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)} \right\},$$

con

$$P_1 = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}} \exp \left\{ \frac{n [a(a - 2\bar{x}) + \bar{x}^2]}{2(\tau^2 n + \sigma^2)} \right\}, \quad (3.39)$$

$$P_2(\theta) = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 \alpha^2 + \alpha \theta - \frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2} \right\}, \quad (3.40)$$

$$P_3(\theta) = \exp \left\{ -\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2} \right\}. \quad (3.41)$$

### $Q_2$ : Unimodalidad.

Exponemos directamente las expresiones que permiten obtener el ínfimo y el supremos de  $P^*$  en este modelo que se obtienen utilizando el resultado ( 3.32) y ( 3.33).

Poisson-Gamma:  $X | \theta \sim P(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta} \right\}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)} \right\}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.36), ( 3.37) y ( 3.38) respectivamente.

Normal-Normal:  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\theta \sim N(a, \tau^2)$ .

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta} \right\}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)} \right\}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.39), ( 3.40) y ( 3.41) respectivamente.

### $\mathcal{Q}_3$ : Unimodalidad y simetría.

De nuevo exponemos directamente las expresiones a partir de las cuales se obtienen el ínfimo y el supremo de  $P^*$  en este modelo utilizando para ello los resultados ( 3.34) y ( 3.35) .

Normal-Normal:  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\theta \sim N(a, \tau^2)$ .

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta} \right\}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)} \right\}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.39), ( 3.40) y ( 3.41) respectivamente.

### 3.1.3 Principio Esscher.

En este caso la prima a posteriori es

$$P^* = \frac{E_{\pi_0} [P e^{\alpha P}]}{E_{\pi_0} [e^{\alpha P}]} = \frac{E_{\pi_0} [g_1(\theta)]}{E_{\pi_0} [g_2(\theta)]},$$

$$\text{con } P = \frac{E_F [X e^{\alpha X} | \theta]}{E_F [e^{\alpha X} | \theta]}, \quad g_1(\theta) = P e^{\alpha P} \text{ y } g_2(\theta) = e^{\alpha P}.$$

$\mathcal{Q}_1$ : Todas las distribuciones.

Utilizando el resultado del teorema 4, el ínfimo y el supremo de la prima a posteriori se obtiene minimizando y maximizando la siguiente expresión,

$$S(\theta) = \frac{A_0 + g_1(\theta) \cdot f(\mathbf{x} | \theta)}{A + g_2(\theta) \cdot f(\mathbf{x} | \theta)}. \quad (3.42)$$

Poisson-Gamma:  $X | \theta \sim P(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

En este caso  $P = \theta e^\alpha$ , como puede verse en la tabla 3.5, mientras que  $g_1(\theta)$  y  $g_2(\theta)$  vienen dados por

$$g_1(\theta) = P e^{\alpha P} = \theta e^\alpha e^{\alpha \theta e^\alpha},$$

$$g_2(\theta) = e^{\alpha P} = e^{\alpha \theta e^\alpha}.$$

Según se expone en el teorema 4,  $A$  viene dada por

$$A = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta.$$

$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \theta)$  fue calculado anteriormente, y es como en (3.4), mientras que  $\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta$  es

$$\begin{aligned} \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta &= \\ &= \int_{\Theta} e^{\alpha \theta e^\alpha} \frac{(a+n)^{b+n\bar{x}}}{\Gamma(b+n\bar{x})} \theta^{b+n\bar{x}-1} e^{-(a+n)\theta} d\theta \\ &= \frac{(a+n)^{b+n\bar{x}}}{\Gamma(b+n\bar{x})} \frac{\Gamma(b+n\bar{x})}{(a+n - \alpha e^\alpha)^{b+n\bar{x}}}. \end{aligned}$$

Finalmente  $A$  queda

$$A = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{\prod x_i!} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b + n\bar{x})}{(a + n - \alpha e^\alpha)^{b + n\bar{x}}}.$$

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \frac{(b + n\bar{x})e^\alpha}{a + n - \alpha e^\alpha},$$

$P^*$  puede verse en la tabla 3.5. Llevando todo esto a (3.42) resulta

$$S(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = (1 - \varepsilon)a^b \Gamma(b + n\bar{x}), \quad (3.43)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon \Gamma(b)(a + n - \alpha e^\alpha)^{b + n\bar{x}} \theta^{n\bar{x} + 1} e^{-(n - \alpha e^\alpha)\theta + \alpha}, \quad (3.44)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon \Gamma(b)(a + n - \alpha e^\alpha)^{b + n\bar{x}} \theta^{n\bar{x}} e^{-(n - \alpha e^\alpha)\theta}. \quad (3.45)$$

Normal-Normal:  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\theta \sim N(a, \tau^2)$ .

Ahora la verdadera prima es  $P = \theta + \alpha\sigma^2$ , como puede verse de nuevo en la tabla 3.5.  $g_1(\theta)$  y  $g_2(\theta)$  vienen dados por

$$g_1(\theta) = P \cdot e^{\alpha P} = (\theta + \alpha\sigma^2) \exp\{\alpha(\theta + \alpha\sigma^2)\},$$

$$g_2(\theta) = e^{\alpha P} = \exp\{\alpha(\theta + \alpha\sigma^2)\}.$$

$A$  es

$$A = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta,$$

con

$$\begin{aligned} & \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta = \\ & = \int_{\Theta} \exp\{\alpha(\theta + \alpha\sigma^2)\} \frac{1}{\frac{\sigma\tau}{\sqrt{\sigma^2 + n\tau^2}} \sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta - \frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2})^2}{2 \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2}}\right\} d\theta \\ & = \exp\left\{\alpha \left[ \frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \frac{\alpha}{2} \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \sigma^2\alpha \right]\right\}. \end{aligned}$$

$m(\mathbf{x} | \pi_0)$  es como en (3.19), mientras que  $A_0$  es

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \left[ \frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \left( \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \sigma^2 \right) \alpha \right].$$

Finalmente, y llevando todo esto a (3.42), queda

$$S(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}} \exp \left\{ \frac{n[a(a - 2\bar{x}) + \bar{x}^2]}{2(\tau^2 n + \sigma^2)} \right\} \cdot \exp \left\{ \alpha \left[ \frac{a\sigma^2 + n\bar{x}\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \frac{\alpha}{2} \frac{\sigma^2\tau^2}{\sigma^2 + n\tau^2} + \sigma^2 \alpha \right] \right\}, \quad (3.46)$$

$$P_2(\theta) = (\theta + \alpha\sigma^2) \exp\{\alpha(\theta + \alpha\sigma^2)\} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad (3.47)$$

$$P_3(\theta) = \exp\{\alpha(\theta + \alpha\sigma^2)\} \exp\left\{-\frac{n(\bar{x} - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\}. \quad (3.48)$$

### $\mathcal{Q}_2$ : Unimodalidad.

Utilizamos ahora el resultado del teorema 5 para el que las expresiones a minimizar y maximizar son,

$$\frac{A_0 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g_1(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta}{A + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} g_2(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta}, \quad \text{si } z \neq 0, \quad (3.49)$$

$$\frac{A_0 + g_1(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0)}{A + g_2(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0)}, \quad \text{si } z = 0, \quad (3.50)$$

Poisson-Gamma:  $X | \theta \sim P(\theta), \theta \sim \Gamma(a, b)$ .

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1, P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.43), ( 3.44) y ( 3.45) respectivamente.

Normal-Normal:  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2), \theta \sim N(a, \tau^2)$ .

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$  como en ( 3.46),  $P_2(\theta)$  como en ( 3.47) y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.48).

### $\mathcal{Q}_3$ : Unimodalidad y simetría.

Según el resultado del teorema 6 el ínfimo y el supremo de  $P^*$  se obtiene minimizando y maximizando

$$\frac{A_0 + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} g_1(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta}{A + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} g_2(\theta) f(\mathbf{x} | \theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0, \quad (3.51)$$

$$\frac{A_0 + g_1(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0)}{A + g_2(\theta_0) f(\mathbf{x} | \theta_0)}, \text{ si } z = 0. \quad (3.52)$$

Normal-Normal:  $X | \theta \sim N(\theta, \sigma^2)$ ,  $\theta \sim N(a, \tau^2)$ .

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{2z} \int_{\theta_0-z}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.46), ( 3.47) y ( 3.48) respectivamente.

### 3.1.4 Principio de varianza.

La prima a posteriori es

$$P^* = \frac{E_{\pi_0} [P^2]}{E_{\pi_0} [P]} = \frac{E_{\pi_0} [g_1(\theta)]}{E_{\pi_0} [g_2(\theta)]}$$

con  $P = \frac{E_F [X^2 | \theta]}{E_F [X | \theta]}$ ,  $g_1(\theta) = P^2$  y  $g_2(\theta) = P$ .

$\mathcal{Q}_1$ : Todas las distribuciones.

Poisson-Gamma:  $X | \theta \sim P(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

De nuevo utilizamos la expresión ( 3.42) que se deduce del teorema 4. En este caso  $P = \theta + 1$ , como puede apreciarse en la tabla 3.6.  $g_1(\theta)$  y  $g_2(\theta)$  son ahora

$$g_1(\theta) = P^2 = (\theta + 1)^2,$$

$$g_2(\theta) = P = \theta + 1.$$

La cantidad  $A$  viene dada por



$$\begin{aligned}
A &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta \\
&= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{\prod x_i!} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+n\bar{x})}{(a+n)^{b+n\bar{x}}} \\
&\quad \cdot \int_{\Theta} (\theta+1) \frac{(a+n)^{b+n\bar{x}}}{\Gamma(b+n\bar{x})} \theta^{b+n\bar{x}-1} e^{-(a+n)\theta} d\theta \\
&= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{\prod x_i!} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+n\bar{x})}{(a+n)^{b+n\bar{x}}} \left[ \frac{b+n\bar{x}}{a+n} - 1 \right] \\
&= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{1}{\prod x_i!} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b+n\bar{x})(a+n+b+n\bar{x})}{(a+n)^{b+n\bar{x}+1}}.
\end{aligned}$$

$P^*$  puede verse en la tabla 3.6, luego  $A_0$  es:

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \frac{(b+n\bar{x})(b+n\bar{x}+1) + 2(a+n)(b+n\bar{x}) + (a+n)^2}{(a+n)(a+n+b+n\bar{x})}.$$

Finalmente queda como expresión a minimizar y maximizar,

$$S(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)}.$$

con

$$P_1 = (1-\varepsilon)a^b \Gamma(b+n\bar{x})(a+n+b+n\bar{x}), \quad (3.53)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon \Gamma(b)(a+n)^{b+n\bar{x}+1} (\theta+1)^2 \theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}, \quad (3.54)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon \Gamma(b)(a+n)^{b+n\bar{x}+1} (\theta+1) \theta^{n\bar{x}} e^{-n\theta}. \quad (3.55)$$

Gamma-Gamma:  $X | \theta \sim \Gamma(\theta, \nu)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$

Ahora la verdadera prima,  $P$ , que aparece en la tabla 3.6 es  $P = \frac{\nu+1}{\theta}$ , mientras que  $g_1(\theta)$  y  $g_2(\theta)$  son

$$g_1(\theta) = P^2 = \left( \frac{\nu+1}{\theta} \right)^2,$$

$$g_2(\theta) = P = \frac{\nu + 1}{\theta}.$$

La cantidad  $A$  viene dada por

$$A = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta.$$

$\frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0)$  es como en (3.12), luego

$$\begin{aligned} A &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{(\prod x_i)^{\nu-1}}{[\Gamma(\nu)]^n} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(b + n\nu)}{(a + n\bar{x})^{b+n\nu}} \\ &\cdot \int_{\Theta} \frac{\nu + 1}{\theta} \frac{(a + n\bar{x})^{b+n\nu}}{\Gamma(b + n\nu)} \theta^{b+n\nu-1} e^{-(a+n)\theta} d\theta \\ &= \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{(\prod x_i)^{\nu-1}}{[\Gamma(\nu)]^n} (\nu + 1) \frac{\Gamma(b + n\nu - 1)}{(a + n)^{b+n\nu-1}}, \end{aligned}$$

mientras que  $A_0$  es

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot (\nu + 1) \frac{a + n\bar{x}}{b + n\nu + 2}.$$

Finalmente, la expresión a minimizar y maximizar es,

$$S(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = (1 - \varepsilon) a^b \Gamma(b + n\nu - 1), \quad (3.56)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon \Gamma(b) (a + n\bar{x})^{b+n\nu-1} (\nu + 1) \theta^{n\nu-2} e^{n\bar{x}\theta}, \quad (3.57)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon \Gamma(b) (a + n\bar{x})^{b+n\nu-1} \theta^{n\nu-1} e^{n\bar{x}\theta}. \quad (3.58)$$

Exponencial-Gamma:  $X | \theta \sim Exp(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

La verdadera prima,  $P$ , aparece de nuevo en la tabla 3.6 y es  $P = \frac{2}{\theta}$ .  $g_1(\theta)$  y  $g_2(\theta)$  son ahora

$$g_1(\theta) = P^2 = \left(\frac{2}{\theta}\right)^2,$$

$$g_2(\theta) = P = \frac{2}{\theta}.$$

La cantidad  $A$  es

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} m(\mathbf{x} | \pi_0) \cdot \int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | \mathbf{x}) d\theta \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(n+b)}{(a+n\bar{x})^{n+b}} \\ &\quad \cdot \int_{\Theta} \frac{2(a+n\bar{x})^{n+b}}{\theta \Gamma(n+b)} \theta^{n+b-1} e^{-(a+n\bar{x})\theta} d\theta \\ &= 2 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \int_{\Theta} \theta^{n+b-2} e^{-(a+n\bar{x})\theta} d\theta \\ &= 2 \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{a^b}{\Gamma(b)} \frac{\Gamma(n+b-1)}{(a+n\bar{x})^{n+b-1}}, \end{aligned}$$

y la cantidad  $A_0$

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \frac{2(a+n\bar{x})}{b+n-2}.$$

Finalmente queda la siguiente expresión para minimizar y maximizar,

$$S(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = (1-\varepsilon)a^b\Gamma(n+b-1), \quad (3.59)$$

$$P_2(\theta) = 2\varepsilon\Gamma(b)(a+n\bar{x})^{n+b-1}\theta^{n-2}e^{-n\bar{x}\theta}, \quad (3.60)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon\Gamma(b)(a+n\bar{x})^{n+b-1}\theta^{n-1}e^{-n\bar{x}\theta}. \quad (3.61)$$

## $\mathcal{Q}_2$ : Unimodalidad.

Volvemos a utilizar el resultado del teorema 5 para el que el ínfimo y el supremo de  $P^*$  se obtienen minimizando y maximizando (3.49) y (3.50). Escribimos sin más comentario las expresiones resultantes para cada uno de los pares de verosimilitudes y a priori.

Poisson-Gamma:  $X | \theta \sim P(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.53), ( 3.54) y ( 3.55) respectivamente.

Gamma-Gamma:  $X | \theta \sim \Gamma(\theta, \nu)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.56), ( 3.57) y ( 3.58) respectivamente.

Exponencial-Gamma:  $X | \theta \sim Exp(\theta)$ ,  $\theta \sim \Gamma(a, b)$ .

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \frac{1}{z} \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.59), ( 3.60) y ( 3.61) respectivamente.

### 3.1.5 Ilustraciones numéricas.

Para los cuatro principios de cálculo de prima y los modelos de contaminación tratados (*todas las distribuciones, unimodalidad y simetría y unimodalidad*)

se han desarrollado ejemplos considerando los pares de verosimilitudes y distribuciones a priori expuestos anteriormente. Se adoptará en todos los casos un tamaño muestral de  $n = 10$  años, y las distribuciones siguientes:

$$\begin{array}{lll} X | \theta \sim P(\theta) & X | \theta \sim BN(2, \theta) & X | \theta \sim N(\theta, 0.2) \\ \theta \sim \Gamma(2, 5) & \theta \sim Be(2, 2) & \theta \sim N(0.5, 0.2) \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} X | \theta \sim B(100, \theta) & X | \theta \sim \Gamma(\theta, 2) & X | \theta \sim Exp(\theta) \\ \theta \sim Be(2, 798) & \theta \sim \Gamma(2, 16) & \theta \sim \Gamma(2, 5) \end{array}$$

En estos ejemplos se supone que la indemnización pagada por la compañía tienen una distribución Poisson de parámetro  $\theta$ , binomial negativa de parámetros 2 y  $\theta$ , normal de parámetros  $\theta$  y 0.2, binomial de parámetros 100 y  $\theta$  y gamma de parámetros  $\theta$  y 2 respectivamente.

En el primer caso el actuario confía en que la distribución a priori de  $\theta$  (indemnización media) es  $\Gamma(2, 5)$  pues por experiencias anteriores conoce que la media de indemnizaciones pagadas está en torno a 2.5 u.m. y que la indemnización media más frecuente (la moda) es 2 u.m. Los restantes ejemplos se fijaron con criterios similares. Tomaremos como observación muestral la cantidad media de indemnización observada,  $\bar{x}$ , en los  $n = 10$  años, que se van a suponer divididas por  $10^4$  si el riesgo corresponde a un asegurado, o por  $10^7$  si se trata de un colectivo; todo ello con el único objetivo de hacer los datos más asequibles a la hora de su tratamiento informático. Por último se ha tomado como valores de  $\bar{x}$ : 0.25, 0.5, 1, 2.5, 5, 10.

En las siguientes tablas aparecen recogidos los rangos de variación de  $P^*$  para cada uno de los modelos. Las tablas están organizadas de la siguiente manera:

Principio de prima neta: Tablas 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 3.11 y 3.12.

Principio exponencial: Tablas 3.13 y 3.14.

Principio Esscher: Tablas 3.15 y 3.16.

Principio de varianza: Tablas 3.17, 3.18 y 3.19.

Todos los cálculos fueron elaborados con el programa MATHEMATICA<sup>1</sup> y los gráficos con el programa MATLAB<sup>2</sup> en ordenadores convencionales (386DX, 486DX y PENTIUM) con tiempos de proceso relativamente pequeños.

<sup>1</sup>Mathematica es propiedad de Wolfram Research, Inc.

<sup>2</sup>Matlab es propiedad de The Math Works, Inc.

Tabla 3.7: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Poisson-Gamma.

Todas las distribuciones.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 0.833333$	$P^*_{inf}$	0.583694	0.494310	0.442846	0.407255	0.380071	0.357954	0.339140
	$P^*_{sup}$	0.874909	0.907168	0.934383	0.958513	0.980649	1.00149	1.02151
	R.S.	15.67	24.77	29.49	33.07	36.03	38.61	40.94
$\bar{x} = 1$ $P' = 2.5$ $P^* = 1.25$	$P^*_{inf}$	1.15951	1.09242	1.03923	0.995020	0.956945	0.923222	0.892655
	$P^*_{sup}$	1.27818	1.30414	1.32857	1.35192	1.37457	1.39682	1.41895
	R.S.	4.74	8.46	11.57	14.27	16.70	18.94	21.05
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 2.5$	$P^*_{inf}$	2.46568	2.43291	2.40136	2.37074	2.34078	2.31123	2.28187
	$P^*_{sup}$	2.53941	2.57741	2.61438	2.65064	2.68649	2.72223	2.75815
	R.S.	1.47	2.89	4.26	5.59	6.91	8.22	9.52
$\bar{x} = 5$ $P' = 2.5$ $P^* = 4.58333$	$P^*_{inf}$	4.48171	4.40502	4.34216	4.28793	4.23945	4.19492	4.15311
	$P^*_{sup}$	4.91566	5.11866	5.26649	5.38461	5.48468	5.57299	5.65337
	R.S.	4.73	7.78	10.08	11.96	13.58	15.03	16.36
$\bar{x} = 10$ $P' = 2.5$ $P^* = 8.75$	$P^*_{inf}$	7.62825	7.46469	7.36696	7.29418	7.23546	7.18497	7.13975
	$P^*_{sup}$	12.46600	12.75430	12.92610	12.96750	13.01280	13.04360	13.06590
	R.S.	27.64	30.22	31.76	32.41	33.01	33.47	33.86
Unimodalidad.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 2.5$	$P^*_{inf}$	2.46586	2.43300	2.40136	2.37088	2.34148	2.31312	2.28574
	$P^*_{sup}$	2.51288	2.52516	2.53691	2.54818	2.55904	2.56953	2.57969
	R.S.	0.94	1.84	2.71	3.54	4.35	5.12	5.87
$\bar{x} = 5$ $P' = 2.5$ $P^* = 4.58333$	$P^*_{inf}$	4.54515	4.50938	4.47535	4.44256	4.41060	4.37911	4.34777
	$P^*_{sup}$	4.67853	4.74881	4.80310	4.84649	4.88207	4.91187	4.93725
	R.S.	1.45	2.61	3.57	4.40	5.14	5.81	6.43
$\bar{x} = 10$ $P' = 2.5$ $P^* = 8.75$	$P^*_{inf}$	8.09915	7.93643	7.83512	7.75921	7.69697	7.64302	7.59443
	$P^*_{sup}$	8.75	8.75	8.75	8.75	8.75	8.75	8.75
	R.S.	3.72	4.64	5.22	5.66	6.01	6.32	6.60

Tabla 3.8: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Binomial Negativa-Beta.

Todas las distribuciones.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.66$ $P^* = 0.666667$	$P_{inf}^*$	0.61131	0.56833	0.53326	0.50360	0.47778	0.45478	0.43387
	$P_{sup}^*$	0.69418	0.71996	0.74454	0.76834	0.79169	0.81488	0.83817
	R.S.	6.21	11.37	15.84	19.85	23.54	27.00	30.32
$\bar{x} = 1$ $P' = 1.14$ $P^* = 1.14286$	$P_{inf}^*$	1.09265	1.04923	1.01078	0.97607	0.94422	0.91457	0.88658
	$P_{sup}^*$	1.18009	1.21563	1.25000	1.28362	1.31687	1.35010	1.38363
	R.S.	3.82	7.27	10.46	13.45	16.30	19.05	21.74
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 2.84$ $P^* = 2.57143$	$P_{inf}^*$	2.49406	2.42607	2.36499	2.30909	2.25714	2.20817	2.16142
	$P_{sup}^*$	2.66163	2.74516	2.82394	2.89939	2.97266	3.04469	3.11635
	R.S.	3.25	6.20	8.92	11.47	13.91	16.26	18.56
$\bar{x} = 5$ $P' = 4.95$ $P^* = 4.95238$	$P_{inf}^*$	4.77338	4.62973	4.50869	4.40306	4.30836	4.22156	4.14052
	$P_{sup}^*$	5.21905	5.44216	5.63773	5.81496	5.97975	6.13622	6.28750
	R.S.	4.49	8.20	11.39	14.25	16.87	19.33	21.67
$\bar{x} = 10$ $P' = 9.71$ $P^* = 9.71429$	$P_{inf}^*$	9.16579	8.78299	8.50066	8.28354	8.10081	7.96347	7.81066
	$P_{sup}^*$	10.67640	11.39390	11.87450	12.33830	12.73430	13.07720	13.37290
	R.S.	7.77	13.43	17.36	20.87	23.84	26.32	28.63

Tabla 3.9: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Binomial-Beta.

Todas las distribuciones.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.25$ $P' = 0.25$ $P^* = 0.054$	$P_{inf}^*$	0.03385	0.03284	0.03223	0.03178	0.03142	0.03110	0.03081
	$P_{sup}^*$	0.71703	0.72414	0.72850	0.73177	0.73446	0.73680	0.73892
	R.S.	632.57	640.08	644.69	648.13	650.96	653.43	655.65
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.25$ $P^* = 0.104$	$P_{inf}^*$	0.05442	0.05358	0.05307	0.05269	0.05237	0.05210	0.05185
	$P_{sup}^*$	1.32040	1.32442	1.32688	1.32873	1.33026	1.33158	1.33279
	R.S.	608.64	610.97	612.405	613.48	614.36	615.13	615.83
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.25$ $P^* = 0.204$	$P_{inf}^*$	0.09576	0.09503	0.09458	0.09424	0.09396	0.09371	0.09349
	$P_{sup}^*$	1.90144	1.90221	1.90268	1.90303	1.90332	1.90357	1.90380
	R.S.	442.56	442.93	443.16	443.33	443.47	443.59	443.70

Tabla 3.10: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Gamma-Gamma.

Todas las distribuciones.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.25$ $P' = 0.26$ $P^* = 0.25714$	$P_{inf}^*$	0.25456	0.25198	0.24940	0.24680	0.24417	0.24150	0.23878
	$P_{sup}^*$	0.25988	0.26270	0.26560	0.26860	0.27171	0.27496	0.27837
	R.S.	1.03	2.08	3.15	4.23	5.35	6.50	7.69
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.26$ $P^* = 0.4$	$P_{inf}^*$	0.39366	0.38826	0.38350	0.37916	0.37513	0.37131	0.36763
	$P_{sup}^*$	0.46250	0.50172	0.53088	0.55462	0.57509	0.59345	0.61044
	R.S.	8.60	14.18	18.42	21.93	24.99	27.76	30.35
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.26$ $P^* = 0.68571$	$P_{inf}^*$	0.59556	0.57663	0.56518	0.55675	0.54992	0.54407	0.53884
	$P_{sup}^*$	1.71020	1.83646	1.91578	1.97614	2.02646	2.07077	2.11132
	R.S.	81.27	91.86	98.48	103.49	107.66	111.32	114.65
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.26$ $P^* = 1.54286$	$P_{inf}^*$	0.98828	0.96765	0.95537	0.94635	0.93905	0.93278	0.92716
	$P_{sup}^*$	9.79005	10.27290	10.58040	10.81630	11.01410	11.18910	11.34980
	R.S.	285.24	301.77	311.92	319.85	326.50	332.38	337.76
$\bar{x} = 5$ $P' = 0.26$ $P^* = 2.97143$	$P_{inf}^*$	1.55587	1.53197	1.51758	1.50695	1.49830	1.49083	1.48413
	$P_{sup}^*$	35.29030	36.83190	37.81510	38.57030	39.20390	39.76470	40.28010
	R.S.	567.64	593.98	610.77	623.66	634.46	644.03	652.81
$\bar{x} = 10$ $P' = 0.26$ $P^* = 5.82857$	$P_{inf}^*$	2.56678	2.53577	2.51699	2.50306	2.49168	2.48183	2.47297
	$P_{sup}^*$	125.5720	130.7270	134.0170	136.5440	138.6640	140.5420	142.2670
	R.S.	1055.19	1099.67	1128.06	1149.86	1168.14	1184.33	1199.21
Unimodalidad.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.25$ $P' = 0.26$ $P^* = 0.257143$	$P_{inf}^*$	0.25538	0.25363	0.25190	0.25017	0.24845	0.24674	0.24502
	$P_{sup}^*$	0.25781	0.25845	0.25907	0.25966	0.26023	0.26078	0.26130
	R.S.	0.47	0.93	1.39	1.84	2.29	2.73	3.16



Tabla 3.11: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Normal-Normal.

Todas las distribuciones.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.25$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.27272$	$P_{inf}^*$	0.24474	0.22266	0.20419	0.18811	0.17366	0.16038	0.14791
	$P_{sup}^*$	0.29355	0.31072	0.32554	0.33878	0.35091	0.36224	0.37304
	R.S.	8.94	16.14	22.24	27.62	32.49	37.00	41.27
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P_{inf}^*$	0.47266	0.45141	0.43375	0.41843	0.40470	0.39208	0.38023
	$P_{sup}^*$	0.52733	0.54859	0.56624	0.58156	0.59529	0.60791	0.61976
	R.S.	5.46	9.71	13.24	16.31	19.05	21.58	23.95
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.95454$	$P_{inf}^*$	0.94246	0.93140	0.92110	0.91135	0.90198	0.89289	0.88395
	$P_{sup}^*$	0.97675	0.99579	1.01261	1.02782	1.04187	1.05506	1.06764
	R.S.	1.79	3.37	4.79	6.10	7.32	8.49	9.62
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31818$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31817	2.31817	2.31817	2.31817	2.31817
	$P_{sup}^*$	2.31819	2.31820	2.31821	2.31823	2.31824	2.31826	2.31828
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Unimodalidad.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P_{inf}^*$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	$P_{sup}^*$	0.51966	0.53390	0.54490	0.55377	0.56115	0.56743	0.57289
	R.S.	1.96	3.39	4.49	5.37	6.11	6.74	7.28
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.95454$	$P_{inf}^*$	0.94834	0.94211	0.93583	0.92947	0.92298	0.91634	0.90949
	$P_{sup}^*$	0.95814	0.96150	0.96465	0.96760	0.97038	0.97301	0.97551
	R.S.	0.51	1.01	1.50	1.99	2.48	2.96	3.45
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31818$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818
	$P_{sup}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.321819	2.31819
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Unimodalidad y simetría.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.95454$	$P_{inf}^*$	0.95135	0.94799	0.94444	0.94068	0.93668	0.93241	0.92783
	$P_{sup}^*$	0.95642	0.95832	0.96024	0.96220	0.96419	0.96621	0.96826
	R.S.	0.26	0.54	0.82	1.12	1.44	1.77	2.11
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31818$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818
	$P_{sup}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabla 3.12: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo no compuesto. Caso Exponencial-Gamma.

Todas las distribuciones.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P^*_{inf}$	0.49255	0.48526	0.47808	0.47098	0.46392	0.45687	0.44979
	$P^*_{sup}$	0.51159	0.52325	0.53504	0.54702	0.55929	0.57191	0.58501
	R.S.	1.90	3.79	5.69	7.60	9.53	11.50	13.52
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.85714$	$P^*_{inf}$	0.83597	0.81772	0.80150	0.78674	0.77304	0.76013	0.74779
	$P^*_{sup}$	0.94419	1.01509	1.07621	1.13103	1.18169	1.22963	1.27591
	R.S.	6.31	11.51	16.02	20.08	23.83	27.38	30.80
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 1.92857$	$P^*_{inf}$	1.68157	1.59434	1.53985	1.49954	1.46699	1.43922	1.41461
	$P^*_{sup}$	3.47910	3.95886	4.27643	4.52539	4.73738	4.92732	5.10371
	R.S.	46.60	61.30	70.94	78.44	84.78	90.43	95.64
$\bar{x} = 5$ $P' = 0.5$ $P^* = 3.71429$	$P^*_{inf}$	2.68515	2.54809	2.46929	2.41293	2.36823	2.33051	2.29728
	$P^*_{sup}$	11.0963	12.3726	13.2075	13.8601	14.4151	14.9123	15.3741
	R.S.	113.22	132.25	144.55	154.09	162.16	169.37	176.03
$\bar{x} = 10$ $P' = 0.5$ $P^* = 7.28571$	$P^*_{inf}$	4.35131	4.16892	4.06388	3.98846	3.92840	3.87750	3.83250
	$P^*_{sup}$	34.34010	37.7730	40.0246	41.7872	43.2883	44.6342	45.8854
	R.S.	205.80	230.61	246.78	259.40	270.11	279.70	288.59
Unimodalidad.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P^*_{inf}$	0.49429	0.48876	0.48341	0.47819	0.47309	0.46809	0.46317
	$P^*_{sup}$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	R.S.	0.57	1.12	1.65	2.18	2.69	3.19	3.68

Tabla 3.13: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo no compuesto. Caso Poisson-Gamma.

Todas las distribuciones.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 0.833351$	$P_{inf}^*$	0.58370	0.49432	0.44285	0.40726	0.38008	0.35796	0.33914
	$P_{sup}^*$	0.87492	0.90718	0.93440	0.95853	0.98067	1.00151	1.02153
	R.S.	17.47	24.77	29.49	33.07	36.03	38.61	40.94
$\bar{x} = 1$ $P' = 2.5$ $P^* = 1.25003$	$P_{inf}^*$	1.15953	1.09244	1.03925	0.99504	0.95696	0.92324	0.89267
	$P_{sup}^*$	1.27820	1.30417	1.32860	1.35195	1.37460	1.39685	1.41898
	R.S.	4.74	8.46	11.57	14.27	16.70	18.94	21.05
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 2.50005$	$P_{inf}^*$	2.46573	2.43296	2.40142	2.37079	2.34083	2.31128	2.28192
	$P_{sup}^*$	2.53947	2.57747	2.61443	2.65069	2.68655	2.72229	2.75821
	R.S.	1.47	2.89	4.26	5.59	6.91	8.22	9.52
$\bar{x} = 5$ $P' = 2.5$ $P^* = 4.58343$	$P_{inf}^*$	4.48181	4.40511	4.34225	4.28803	4.23954	4.19501	4.15319
	$P_{sup}^*$	4.91577	5.11878	5.26661	5.38474	5.48480	5.57311	5.65350
	R.S.	4.73	7.78	10.08	11.96	13.58	15.03	16.36
$\bar{x} = 10$ $P' = 2.5$ $P^* = 8.75019$	$P_{inf}^*$	7.62842	7.46485	7.36711	7.29434	7.23561	7.18512	7.13990
	$P_{sup}^*$	12.46630	12.75460	12.92640	12.96770	13.01310	13.04390	13.06620
	R.S.	27.64	30.22	31.76	32.41	33.01	33.47	33.86
Unimodalidad.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 2.50005$	$P_{inf}^*$	2.46591	2.43305	2.40142	2.37093	2.34154	2.31317	2.28579
	$P_{sup}^*$	2.51294	2.52522	2.53696	2.54824	2.55909	2.56958	2.57974
	R.S.	0.94	1.84	2.71	3.54	4.35	5.12	5.87
$\bar{x} = 5$ $P' = 4.58343$ $P^* = 4.5828$	$P_{inf}^*$	4.54525	4.50948	4.47545	4.44266	4.41069	4.37920	4.34786
	$P_{sup}^*$	4.67864	4.74892	4.80321	4.84660	4.88218	4.91198	4.93736
	R.S.	1.45	2.61	3.57	4.40	5.14	5.81	6.43

Tabla 3.14: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo no compuesto. Caso Normal-Normal.

Todas las distribuciones.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P_{inf}^*$	0.47267	0.45141	0.43376	0.41844	0.40471	0.39209	0.38023
	$P_{sup}^*$	0.52733	0.54859	0.56624	0.58156	0.59529	0.60791	0.61977
	R.S.	5.46	9.71	13.24	16.31	19.05	21.58	23.95
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.95455$	$P_{inf}^*$	0.94246	0.93141	0.92110	0.91135	0.90199	0.89290	0.88396
	$P_{sup}^*$	0.97676	0.99579	1.01261	1.02783	1.04187	1.05506	1.06764
	R.S.	1.79	3.37	4.79	6.10	7.32	8.49	9.62
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31819$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31817
	$P_{sup}^*$	2.31820	2.31821	2.31822	2.31823	2.31825	2.31827	2.31829
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Unimodalidad.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P_{inf}^*$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	$P_{sup}^*$	0.51967	0.53390	0.54490	0.55377	0.56115	0.56744	0.57289
	R.S.	1.96	3.39	4.49	5.37	6.11	6.74	7.28
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31819$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818
	$P_{sup}^*$	2.31818	2.31818	2.31919	2.31919	2.31819	2.31819	2.31819
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Unimodalidad y simetría.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P_{inf}^*$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	$P_{sup}^*$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31819$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818
	$P_{sup}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31819	2.31819
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabla 3.15: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo no compuesto. Caso Poisson-Gamma.

Todas las distribuciones.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 0.833369$	$P_{inf}^*$	0.58372	0.49433	0.442867	0.40727	0.38008	0.35797	0.33915
	$P_{sup}^*$	0.87494	0.90720	0.93442	0.95855	0.98069	1.00153	1.02156
	R.S.	17.47	24.77	29.49	33.07	36.03	38.61	40.94
$\bar{x} = 1$ $P' = 2.5$ $P^* = 1.25005$	$P_{inf}^*$	1.15956	1.09247	1.03928	0.99506	0.95698	0.92326	0.89269
	$P_{sup}^*$	1.27823	1.30420	1.32863	1.35198	1.37463	1.39688	1.41901
	R.S.	4.74	8.46	11.57	14.27	16.70	18.94	21.05
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 2.50011$	$P_{inf}^*$	2.46578	2.43302	2.40147	2.37084	2.34088	2.31133	2.28197
	$P_{sup}^*$	2.53952	2.57752	2.61449	2.65075	2.68661	2.72235	2.75827
	R.S.	1.47	2.88	4.26	5.59	6.91	8.22	9.52
$\bar{x} = 5$ $P' = 2.5$ $P^* = 4.58353$	$P_{inf}^*$	4.48190	4.40521	4.34235	4.28812	4.23964	4.19510	4.15328
	$P_{sup}^*$	4.91588	5.11889	5.26673	5.38486	5.48493	5.57324	5.65363
	R.S.	4.73	7.78	10.08	11.96	13.58	15.03	16.36
$\bar{x} = 10$ $P' = 2.5$ $P^* = 8.75038$	$P_{inf}^*$	7.62858	7.46501	7.36727	7.29449	7.23577	7.18527	7.14005
	$P_{sup}^*$	12.46580	12.71550	12.92580	12.77960	13.12310	13.24250	13.29920
	R.S.	27.64	30.00	31.76	31.34	33.64	34.61	35.19
Unimodalidad.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 2.5$ $P^* = 2.50011$	$P_{inf}^*$	2.46596	2.43311	2.40147	2.37198	2.34159	2.31322	2.28584
	$P_{sup}^*$	2.51299	2.52527	2.53702	2.54829	2.55915	2.56964	2.57980
	R.S.	0.94	1.84	2.71	3.52	4.35	5.12	5.87
$\bar{x} = 5$ $P' = 2.5$ $P^* = 4.58353$	$P_{inf}^*$	4.54535	4.50957	4.47554	4.44275	4.41079	4.37930	4.34795
	$P_{sup}^*$	4.67874	4.74902	4.80332	4.84670	4.88229	4.91209	4.93747
	R.S.	1.45	2.61	3.57	4.40	5.14	5.81	6.43

Tabla 3.16: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo no compuesto. Caso Normal-Normal.

Todas las distribuciones.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P_{inf}^*$	0.47267	0.45141	0.43376	0.41844	0.40471	0.39209	0.38024
	$P_{sup}^*$	0.52733	0.54859	0.56624	0.58156	0.59529	0.60792	0.61977
	R.S.	5.46	9.71	13.24	16.31	19.05	21.58	23.95
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.95454$	$P_{inf}^*$	0.94246	0.93141	0.92110	0.91135	0.90199	0.89290	0.88396
	$P_{sup}^*$	0.97675	0.99579	1.01261	1.02783	1.04187	1.05506	1.06764
	R.S.	1.79	3.37	4.79	6.10	7.32	8.49	9.62
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31818$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31817	2.31817
	$P_{sup}^*$	2.31819	2.31820	2.31822	2.31823	2.31825	2.31826	2.31828
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Unimodalidad.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.5$	$P_{inf}^*$	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
	$P_{sup}^*$	0.51967	0.53390	0.54490	0.55377	0.56115	0.56744	0.57289
	R.S.	1.96	3.39	4.49	5.37	6.11	6.74	7.28
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.95454$	$P_{inf}^*$	0.94834	0.94211	0.93583	0.92947	0.92298	0.91634	0.90949
	$P_{sup}^*$	0.95815	0.96151	0.96465	0.96761	0.97039	0.97302	0.97551
	R.S.	0.51	1.01	1.50	1.99	2.48	2.96	3.45
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31818$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818
	$P_{sup}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31819	2.31819	2.31819
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Unimodalidad y simetría.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.5$ $P^* = 0.95454$	$P_{inf}^*$	0.95135	0.94799	0.94444	0.94068	0.93668	0.93241	0.92783
	$P_{sup}^*$	0.95642	0.95832	0.96025	0.96220	0.96419	0.96621	0.96826
	R.S.	0.26	0.54	0.82	1.12	1.44	1.77	2.11
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.5$ $P^* = 2.31818$	$P_{inf}^*$	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818	2.31818
	$P_{sup}^*$	2.31818	2.31819	2.31819	2.31819	2.31819	2.31819	2.31819
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tabla 3.17: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo no compuesto. Caso Poisson-Gamma.

Todas las distribuciones.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 3.857$ $P^* = 1.87121$	$P_{inf}^*$	1.63872	1.54589	1.49078	1.45213	1.42238	1.39806	1.37730
	$P_{sup}^*$	1.91058	1.94205	1.96903	1.99321	2.01556	2.03671	2.05712
	R.S.	7.26	10.58	12.77	14.45	15.85	17.06	18.16
$\bar{x} = 1$ $P' = 3.857$ $P^* = 2.2963$	$P_{inf}^*$	2.21259	2.14835	2.09624	2.05222	2.01384	1.97954	1.94822
	$P_{sup}^*$	2.32389	2.34959	2.37394	2.39738	2.42021	2.44274	2.46521
	R.S.	2.42	4.38	6.04	7.51	8.84	10.08	11.25
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 3.857$ $P^* = 3.55952$	$P_{inf}^*$	3.52512	3.49226	3.46061	3.42987	3.39978	3.37008	3.34056
	$P_{sup}^*$	3.60086	3.64060	3.67916	3.71689	3.75413	3.79117	3.82833
	R.S.	1.06	2.08	3.06	4.03	4.97	5.91	6.85
$\bar{x} = 5$ $P' = 3.857$ $P^* = 5.65174$	$P_{inf}^*$	5.54454	5.46502	5.40046	5.34509	5.29580	5.25066	5.20838
	$P_{sup}^*$	6.00966	6.22153	6.37374	6.49447	6.59628	6.68584	6.76719
	R.S.	4.11	6.69	8.61	10.16	11.50	12.69	13.79
$\bar{x} = 10$ $P' = 3.857$ $P^* = 9.82479$	$P_{inf}^*$	8.67658	8.51346	8.41664	8.34361	8.28469	8.23438	8.18916
	$P_{sup}^*$	13.61650	13.90390	13.97490	14.02630	14.05780	14.38720	14.46850
	R.S.	25.14	27.43	28.28	28.92	29.38	31.31	31.95
Unimodalidad.								
$\varepsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 3.857$ $P^* = 3.55952$	$P_{inf}^*$	3.52546	3.49270	3.46100	3.43013	3.39990	3.37010	3.34061
	$P_{sup}^*$	3.57208	3.58405	3.59551	3.60651	3.61711	3.62734	3.63726
	R.S.	0.65	1.28	1.88	2.47	3.05	3.61	4.16
$\bar{x} = 5$ $P' = 3.857$ $P^* = 5.65174$	$P_{inf}^*$	5.61197	5.57495	5.53992	5.50630	5.47364	5.44156	5.40971
	$P_{sup}^*$	5.75536	5.83009	5.88686	5.93164	5.96800	5.99819	6.02372
	R.S.	1.26	2.25	3.06	3.76	4.37	4.92	5.43

Tabla 3.18: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo no compuesto. Caso Gamma-Gamma.

Todas las distribuciones.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.25$ $P' = 0.4285$ $P^* = 0.397059$	$P_{inf}^*$	0.39336	0.38965	0.38590	0.38212	0.37828	0.37436	0.37035
	$P_{sup}^*$	0.40188	0.40681	0.41187	0.41708	0.42247	0.42808	0.43395
	R.S.	1.07	2.16	3.27	4.40	5.56	6.76	8.00
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 0.4285$ $P^* = 0.617647$	$P_{inf}^*$	0.60667	0.59763	0.58980	0.58278	0.57633	0.57027	0.56448
	$P_{sup}^*$	0.74152	0.81228	0.86303	0.90360	0.93822	0.96909	0.99752
	R.S.	10.91	17.37	22.11	25.97	29.29	32.28	35.05
$\bar{x} = 1$ $P' = 0.4285$ $P^* = 1.05882$	$P_{inf}^*$	0.90910	0.88007	0.86259	0.84975	0.83936	0.83046	0.82251
	$P_{sup}^*$	2.85640	3.06818	3.20168	3.30350	3.38852	3.46349	3.53218
	R.S.	91.95	103.32	110.45	115.87	120.37	124.33	127.95
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 0.4285$ $P^* = 2.38235$	$P_{inf}^*$	1.50581	1.47448	1.45581	1.44210	1.43100	1.42146	1.41293
	$P_{sup}^*$	16.73490	17.58490	18.12720	18.54380	18.89340	19.2030	19.4876
	R.S.	319.62	338.12	349.89	358.92	366.49	373.19	379.34
$\bar{x} = 5$ $P' = 0.4285$ $P^* = 4.58824$	$P_{inf}^*$	2.36933	2.33291	2.31099	2.29479	2.28160	2.27022	2.25999
	$P_{sup}^*$	61.67160	64.46950	66.25690	67.63120	68.78530	69.80760	70.74790
	R.S.	646.24	677.12	696.84	711.99	724.72	735.98	746.34
Unimodalidad.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.25$ $P' = 0.4285$ $P^* = 0.397059$	$P_{inf}^*$	0.39430	0.39157	0.38884	0.38613	0.38341	0.38069	0.37795
	$P_{sup}^*$	0.39727	0.39747	0.39764	0.39786	0.39803	0.39820	0.39837
	R.S.	0.37	0.74	1.10	1.47	1.84	2.20	2.57



Tabla 3.19: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo no compuesto. Caso Exponencial-Gamma.

Todas las distribuciones.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 1.33$ $P^* = 2$	$P^*_{inf}$	1.41156	1.21904	1.11395	1.04385	0.99170	0.95014	0.91537
	$P^*_{sup}$	2.06290	2.11885	2.17048	2.21942	2.26677	2.31338	2.35996
	R.S.	16.28	22.49	26.41	29.38	31.87	34.08	36.11
$\bar{x} = 1$ $P' = 1.33$ $P^* = 3$	$P^*_{inf}$	2.80486	2.65186	2.52670	2.42087	2.32898	2.24741	2.17359
	$P^*_{sup}$	3.06206	3.12321	3.18405	3.24515	3.30704	3.37029	3.43551
	R.S.	4.28	7.85	10.95	13.73	16.30	18.71	21.03
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 1.33$ $P^* = 6$	$P^*_{inf}$	5.85483	5.71939	5.59182	5.47059	5.35443	5.24222	5.13294
	$P^*_{sup}$	6.15012	6.29949	6.44919	6.60032	6.75402	6.91151	7.07416
	R.S.	2.46	4.83	7.14	9.41	11.66	13.91	16.17
$\bar{x} = 5$ $P' = 1.33$ $P^* = 11$	$P^*_{inf}$	10.68930	10.41410	10.16530	9.93660	9.72325	9.52160	9.32872
	$P^*_{sup}$	11.5320	12.02520	12.49140	12.93950	13.37640	13.80830	14.24030
	R.S.	3.83	7.32	10.57	13.64	16.60	19.48	22.32
$\bar{x} = 10$ $P' = 1.33$ $P^* = 21$	$P^*_{inf}$	19.91550	19.12270	18.49310	17.96590	17.50740	17.0971	16.72130
	$P^*_{sup}$	23.46010	25.34900	26.93030	28.32600	29.60390	30.80700	31.96540
	R.S.	8.43	14.82	20.08	24.66	28.80	32.64	36.29
Unimodalidad.								
$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
$\bar{x} = 0.5$ $P' = 1.33$ $P^* = 2$	$P^*_{inf}$	1.64519	1.48768	1.39732	1.33808	1.29592	1.26420	1.23933
	$P^*_{sup}$	2.03127	2.06204	2.09264	2.12340	2.15461	2.18659	2.21965
	R.S.	9.65	14.35	17.38	19.63	21.46	23.05	24.50
$\bar{x} = 1$ $P' = 1.33$ $P^* = 3$	$P^*_{inf}$	2.91905	2.84816	2.78540	2.72929	2.67869	2.63271	2.59063
	$P^*_{sup}$	3.03829	3.07776	3.11865	3.16121	3.20577	3.25269	3.30243
	R.S.	1.98	3.82	5.55	7.19	8.78	10.33	11.86
$\bar{x} = 2.5$ $P' = 1.33$ $P^* = 6$	$P^*_{inf}$	5.95876	5.91933	5.88151	5.84512	5.81001	5.77604	5.74307
	$P^*_{sup}$	6.13696	6.27854	6.42498	6.57654	6.73348	6.89610	7.06471
	R.S.	1.48	2.99	4.52	6.09	7.69	9.33	11.01

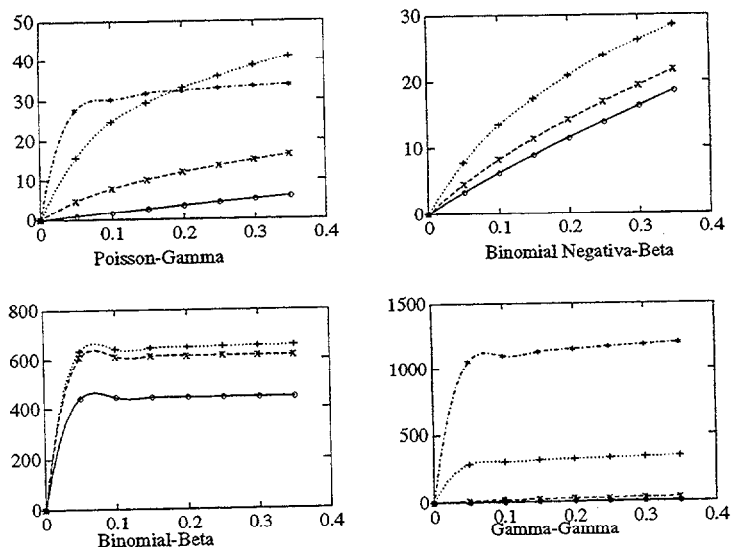


Figura 3.1: Gráfica de algunos R.S. para el principio de prima neta. Casos Poisson-Gamma, Binomial Negativa-Beta, Binomial-Beta y Gamma-Gamma.

La unimodalidad es una propiedad altamente recomendada desde el punto de vista de la robustez de la prima a posteriori. Dicha propiedad reduce drásticamente los factores de sensibilidad relativa, R.S., dando al actuario cierta tranquilidad a la hora de tarificar un riesgo.

Más aún cuando se añade a la unimodalidad la propiedad de simetría (si bien esta propiedad puede depender del tipo de *cartera* ya que se utiliza para el caso normal).

Merece la pena hacer algunos comentarios más detallados sobre ciertos aspectos que sobresalen.

Para una mejor aclaración de los siguientes comentarios el lector puede observar los gráficos 3.1, 3.2, 3.3, 3.4 y 3.5.

1. El modelo binomial-beta es el menos robusto de todos, con valores de R.S. en torno al 400 y al 600%. Esto significa que las fluctuaciones (a izquierda y derecha) de la prima a posteriori alrededor de  $P^*$ , el valor obtenido para la distribución base  $\pi_0(\theta)$ , pueden ser de hasta el 600%. El modelo exponencial-gamma también sobresale en cuanto a carencia de robustez, llegando a alcanzar el factor R.S. valores de hasta el 288.59%.

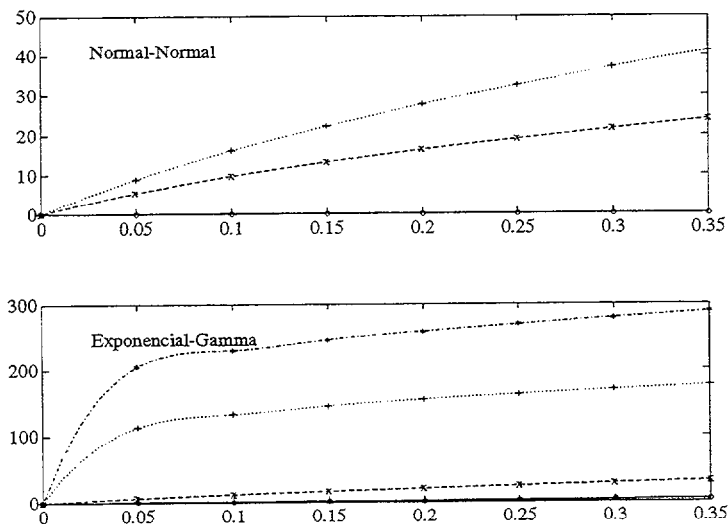


Figura 3.2: Gráfica de algunos R.S. para el principio de prima neta. Casos Normal-Normal y Exponencial-Gamma.

2. Hay que indicar que para todos los pares verosimilitudes-priori la ausencia de robustez se incrementa conforme la media muestral refleja un resultado que entra en conflicto con la información a priori especificada. Esto es, las distribuciones a priori, en la mayoría de los casos refleja la impresión que el actuario tiene sobre  $\bar{x}$ , y que está en torno a 2.5. Al obtener medias muestrales que se van alejando por abajo y por arriba de este valor los R.S. se incrementan. En este sentido hay que indicar que R.S. es cero para el caso Normal-Normal y  $\bar{x} = 2.5$ . Ya indicamos antes que incluso se dan situaciones en las que nuestro modelo no aporta solución, pues se obtienen valores inferiores y superiores de  $P^*$  que se alcanzan para  $\theta < 0$  ó para  $z < 0$ .
3. Como resultado más destacable hay que decir que el principio de cálculo de prima más robusto es el de varianza, y que no hay diferencias significativas, en cuanto a robustez se refiere, entre el resto de principios.

También merece ser indicado que a partir de la tercera y a veces la cuarta cifra decimal hay diferencias en los valores de los R.S. para el principio de prima neta, de utilidad exponencial y Esscher, y que hasta la segunda

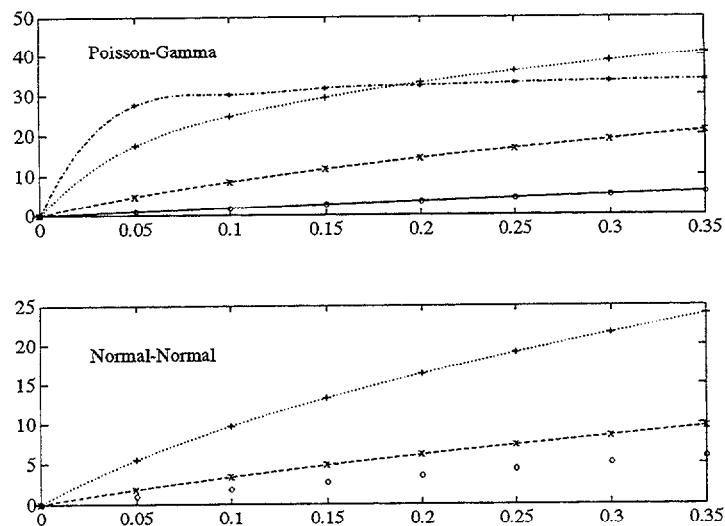


Figura 3.3: Gráfica de algunos R.S. para el principio de utilidad exponencial. Casos Poisson-Gamma y Normal-Normal.

cifra decimal coinciden totalmente para la misma observación muestral. Por ejemplo, para  $\bar{x} = 2.5$ , y para el par Poisson-Gamma los R.S. varían desde 1.47 hasta 9.52, y esto ocurre para los principios de prima neta, exponencial y Esscher; en el modelo de unimodalidad los R.S. varían desde 0.99 hasta 5.87, de nuevo igual en todos los principios. Es decir, los tres principios tienen un comportamiento igual en cuanto a robustez se refiere, aunque los intervalos de variación de  $P^*$  sean ligeramente diferentes, como puede observarse en la tabla 3.20.

Tabla 3.20: Intervalo de variación de  $P^*$  para  $\bar{x} = 2.5$  y  $\varepsilon = 0.05$ .

	Prima neta	Exponencial	Esscher	Varianza
$P_{inf}^*$	2.46568	2.46573	2.46578	3.52512
$P^*$	2.5	2.50005	2.50011	3.55952
$P_{sup}^*$	2.53941	2.53947	2.53952	3.60086
R.S.	1.47	1.47	1.47	1.06

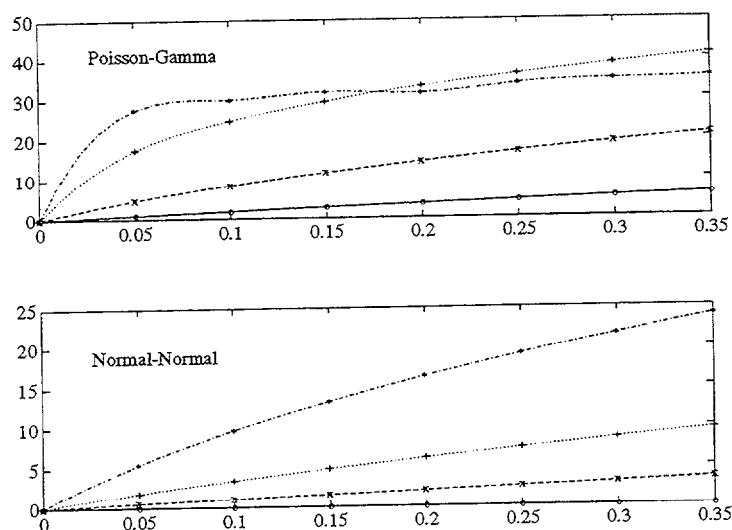


Figura 3.4: Gráfica de algunos R.S. para el principio Esscher. Casos Poisson-Gamma y Normal-Normal.

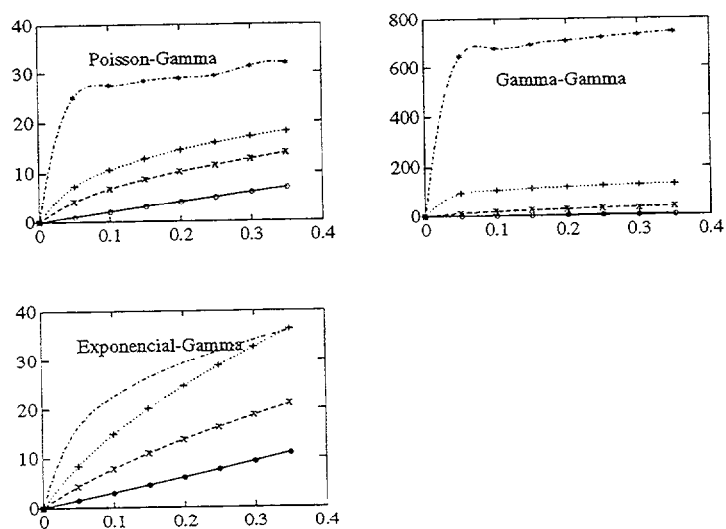


Figura 3.5: Gráfica de algunos R.S. para el principio de varianza. Casos Poisson-Gamma, Gamma-Gamma y Exponencial-Gamma.

### 3.2 El modelo colectivo compuesto.

Ya se comentó con anterioridad que lo ideal cuando se trabaja en T.C. es hacerlo con la distribución del coste total, componiendo los modelos del número de siniestros y coste de los mismos. Desde principios de siglo los investigadores actuariales se han empeñado en proporcionar teorías adecuadas que proporcionen la distribución del daño total, pero muy pocos progresos se han obtenido al respecto, hasta descubrir que la distribución de Poisson proporciona un camino satisfactorio para representar la distribución del número de siniestros ocurridos en una cartera dada de contratos de seguros en un período especificado de tiempo. Escribamos esta distribución de probabilidad como  $P_n(t) \equiv P_n$ . Si  $X_i$  es el coste individual de un siniestro, que es una variable aleatoria positiva independiente de la variable aleatoria número de siniestros, con función de distribución  $V(x_i)$  y que no depende de  $t$ , entonces

$$\text{Prob}[X \leq x] = F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cdot V^{n*}(x), \quad x = \sum_{i=1}^n x_i,$$

donde  $V^{n*}(x_i)$ , la  $n$ -ésima convolución de  $V(x_i)$ , viene dada por

$$V^{n*}(x) = \int_0^x V^{(n-1)*}(x - x_i) dV(x_i), \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

y donde definimos

$$V^{0*}(x) = \begin{cases} 0, & x_i < 0, \\ 1, & x_i \geq 0. \end{cases}$$

Una de las desventajas de suponer la distribución de Poisson para  $P_n$  es que la varianza del número de siniestros es igual al número esperado de siniestros. En algunas situaciones la varianza es mayor que la media y es por ello que se han sugerido otras distribuciones, como la distribución binomial negativa. Pese a todo, la suposición de una distribución de Poisson para el número de siniestros es la más extendida (quizás por su sencillez analítica a la hora de calcular la distribución del coste total).

Nosotros en esta sección nos proponemos hacer un estudio similar al desarrollado en la anterior pero para el modelo compuesto. Supondremos que el número de siniestros y el coste de los mismos son variables aleatorias independientes y que las distribuciones relevantes son como sigue:

- Número de siniestros  $\sim P_n(\theta) = \theta^n e^{-\theta} / n!$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$
- Coste del  $i$ -ésimo siniestro  $\sim Exp(\lambda) : f(x_i | \lambda) = \lambda e^{-\lambda x_i}$ ,  $\lambda \geq 0$
- Coste total  $\sim f(x | \lambda, \theta) = \sum_n f^{n*}(x_i) \cdot P_n$ ,
- La distribución de  $X$ ,  $f(x | \lambda, \theta)$ , depende de los parámetros  $\lambda$  y  $\theta$ . En T.C. es usual considerar  $\lambda$  conocido y  $\theta$  aleatorio. Por tanto se considerará una distribución a priori (distribución estructura)  $\pi_0(\theta)$  para el parámetro  $\theta$ .

$$\theta \sim \Gamma(a, b) : \pi_0(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} 1_{[0, \infty)}(\theta), \quad \theta > 0, a > 0, b > 0.$$

En esta sección modificaremos la expresión de la función de densidad de una distribución gamma y adoptaremos la misma que toma *Freifelder (1974)*, que difiere de la adoptada en la sección anterior, que se tomó de esa otra forma para no confundir al lector que consultase a *Heilmann (1989)*.

El modelo así asumido es idéntico al elaborado por *Freifelder (1974)*, *Seal (1969)*, *Miller (1980)* y otros. Ahora, si en un número  $t$  de períodos de tiempo se observan  $m$  siniestros, la probabilidad de este suceso (la verosimilitud del dato observado) es

$$l(m | \theta) = \frac{(\theta t)^m \cdot e^{-\theta t}}{m!}. \quad (3.62)$$

La distribución a posteriori de  $\theta$ , vía teorema de Bayes, es

$$\pi_0(\theta | m) \propto \theta^{a-1} e^{-b\theta} \theta^m e^{-\theta t} \sim \Gamma(a + m, b + t).$$

Indiquemos que el actuario en esta ocasión observa el número de siniestros ocurridos durante el número de períodos de tiempo  $t$ , y le es indiferente, por ejemplo, las dos observaciones siguientes,

$$\begin{aligned} &0, 1, 3, 2, 0, 3, \\ &1, 2, 0, 0, 3, 3, \end{aligned}$$

que proporcionan ambas 9 siniestros en 6 períodos de tiempo. Sin embargo, y como un hecho curioso, el lector puede comprobar que se obtienen las mismas expresiones para las primas a posteriori si la verosimilitud es

$$\frac{\theta^{\sum_{i=1}^n m_i} \cdot e^{-\theta t}}{\prod m_i!}, \quad \sum_{i=1}^n m_i = m,$$

siendo  $m_i$  el número de siniestros observados en el período  $i$ . La verosimilitud así considerada fue la adoptada en la sección anterior. Obsérvese que la distribución a posteriori, para una u otra verosimilitud, es la misma,  $\Gamma(a + m, b + t)$ , y que es indicativo del cumplimiento del Principio de Verosimilitud.

El primer paso a desarrollar será el cálculo de  $f(x | \theta)$ , que viene dada, como expusimos antes, por

$$f(x) = \sum_n P_n \cdot f^{n*}(x), \quad \text{siendo } x = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Pasemos, pues, a calcular esta densidad compuesta bajo los supuestos anteriormente citados de distribución poissoniana para el número de siniestros y exponencial para el coste de los mismos (tomaremos en este apartado y por comodidad  $x_i \equiv s$ ).

$$f * f(x) = \int_0^x f(x-s)f(s)ds = \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-s)} \lambda e^{-\lambda s} ds = \lambda^2 e^{-\lambda x} x.$$

$$f * (f * f)(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-s)} \lambda^2 s e^{-\lambda s} ds = \frac{x^2}{2} \lambda^3 e^{-\lambda x}.$$

Por inducción, supongamos cierta que  $f^{n*}(x) = \lambda^n e^{-\lambda x} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$ , entonces

$$f^{(n+1)*}(x) = f * (f^{n*})(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda s} e^{-\lambda(x-s)} \lambda^n \frac{s^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda x} x^n}{n!}.$$

luego, por inducción matemática, tenemos <sup>3</sup>

$$f(x | \theta) = \sum_n \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \cdot \frac{e^{-\theta} \theta^n}{n!}.$$

A continuación obtendremos las expresiones de la verdadera prima individual, de la prima a priori y de la prima a posteriori para los principios de prima neta, exponencial, Esscher y varianza, así como las expresiones

<sup>3</sup>Para una consulta más detallada del cálculo de  $f(x | \theta)$  el lector puede consultar a Seal (1969).



de  $P^*$  en un modelo de contaminaciones. El procedimiento en este caso es similar al desarrollado en la sección anterior, con la excepción de que ahora sí procederemos al cálculo de la verdadera prima, de la prima a priori y de la prima a posteriori.

### 3.2.1 Principio de prima neta.

#### Verdadera prima individual.

Según este principio la verdadera prima individual es

$$P = E_F[X | \theta],$$

que en nuestro modelo de Poisson compuesto quedaría de la siguiente forma,

$$\begin{aligned} P &= \int_{\mathcal{X}} xf(x | \theta)dx \\ &= \int_{\mathcal{X}} x \sum_n \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \frac{e^{-\theta} \theta^n}{n!} dx \\ &= \sum_n \frac{\lambda^n e^{-\theta} \theta^n}{(n-1)!n!} \int_{\mathcal{X}} x^n e^{-\lambda x} dx \\ &= \sum_n \frac{\lambda^n e^{-\theta} \theta^n}{(n-1)!n!} \frac{\Gamma(n+1)}{\lambda^{n+1}} = \frac{1}{\lambda} \cdot \theta = E[X_i] \cdot E[N], \end{aligned}$$

es decir la verdadera prima es la media del número de siniestros por el valor medio del coste de un siniestro.

#### Prima a priori.

Si como hasta ahora suponemos que  $\theta$  sigue en el colectivo una distribución a priori  $\Gamma(a, b)$  se tiene

$$\begin{aligned} P' &= \int_{\Theta} \left[ \int_{\mathcal{X}} xf(x | \theta)dx \right] \pi_0(\theta) d\theta \\ &= \int_{\mathcal{X}} \frac{\theta}{\lambda} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-(b)\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \int_{\mathcal{X}} \theta^a e^{-b\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\lambda} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+1)}{b^{a+1}} = \frac{1}{\lambda} \frac{a}{b}, \end{aligned}$$

que es el valor esperado del coste de un siniestro por la media de la distribución a priori.

### Prima a posteriori.

Ahora utilizando la propiedad de conjugación, el cálculo de la prima a posteriori es idéntico al anterior, sin más que reemplazar los parámetros de la distribución a priori por los de la a posteriori; es decir, en la expresión anterior  $a$  por  $a + m$  y  $b$  por  $b + t$ .

$$P^* = \frac{1}{\lambda} \frac{a + m}{b + t}.$$

Observemos que  $P^*$  puede escribirse de la siguiente forma

$$P^* = \frac{1}{\lambda} \left[ \frac{t}{b+t} \frac{m}{t} + \frac{b}{b+t} \frac{a}{b} \right] = \frac{1}{\lambda} \left\{ Z \frac{m}{t} + [1 - Z] \frac{a}{b} \right\},$$

con  $Z = \frac{t}{b+t}$ , que se denomina *factor de credibilidad*.

Además  $Z \in [0, 1]$  y  $Z \rightarrow 1$  cuando  $t \rightarrow \infty$ , i.e.  $P^* \rightarrow \frac{m}{t}$ , que es la media muestral. Por último si  $t \rightarrow 0$ ,  $Z \rightarrow 0$ , y  $P^* \rightarrow \frac{a}{b}$ , que es la media de la distribución a priori.

### $\mathcal{Q}_1$ : Todas las distribuciones.

Según el resultado del teorema 1 el ínfimo y supremo de la prima a posteriori se obtiene calculando el mínimo y el máximo de

$$R(\theta) = \frac{A_0 + g(\theta)l(m | \theta)}{A + l(m | \theta)},$$

como función de  $\theta$ , con

$$g(\theta) = \frac{\theta}{\lambda},$$

$l(m | \theta)$  es como en (3.62), mientras que  $A$  y  $A_0$  son como se exponen a continuación

$$A = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \int_{\Theta} l(m | \theta) \pi_0(\theta) d\theta = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon} \frac{\Gamma(a + m)}{(b + t)^{a+m}} \frac{b^a t^m}{\Gamma(a) m!},$$

$$A_0 = A \cdot P^* = A \cdot \frac{1}{\lambda} \frac{a+m}{b+t}.$$

Luego  $R(\theta)$  queda,

$$R(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)}, \quad (3.63)$$

con

$$P_1 = (1 - \varepsilon)\Gamma(a+m)b^a, \quad (3.64)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon(b+t)^{a+m}\Gamma(a)\frac{1}{\lambda}\theta^{m+1} \cdot e^{-\theta \cdot t}, \quad (3.65)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon(b+t)^{a+m}\Gamma(a)\theta^m \cdot e^{-\theta \cdot t}. \quad (3.66)$$

### $\mathcal{Q}_2$ : Unimodalidad.

Según el resultado del teorema 2 el ínfimo y supremo de la prima a posteriori se obtiene ahora utilizando las expresiones (3.32) y (3.33), quedando,

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \quad \text{si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \quad \text{si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en (3.64), (3.65) y (3.66) respectivamente.

## 3.2.2 Principio de utilidad exponencial.

Verdadera prima individual.

De la expresión

$$P = \frac{1}{\alpha} \text{Log} E_F [e^{\alpha \cdot x}],$$

se deduce que debemos calcular la función generatriz de momentos.

$$\begin{aligned} E_F [e^{\alpha x}] &= \int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x | \theta) dx \\ &= \int_{\mathcal{X}} \sum_n \frac{\theta^n e^{-\theta} \lambda^n}{n!(n-1)!} \cdot e^{-(\lambda-\alpha)x} x^{n-1} dx = \sum_n \frac{\theta^n e^{-\theta} \lambda^n}{n!(n-1)!} \cdot \frac{\Gamma(n)}{(\lambda-\alpha)^n} \\ &= e^{-\theta + \frac{\lambda\theta}{\lambda-\alpha}} = e^{\frac{\theta\alpha}{\lambda-\alpha}}, \end{aligned}$$

luego, la verdadera prima individual es

$$P = \frac{\theta}{\lambda - \alpha}, \quad \text{con } \lambda > \alpha.$$

### Prima a priori.

De nuevo, suponiendo que  $\theta$  sigue en el colectivo una distribución a priori  $\Gamma(a, b)$ ,

$$\begin{aligned} P' &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \int_{\Theta} \left[ \int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x | \theta) dx \right] \pi_0(\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \int_{\Theta} e^{\frac{\theta - \alpha}{\lambda - \alpha}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \theta^{a-1} \cdot e^{-b\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \int_{\Theta} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-\frac{b(\lambda - \alpha) - \alpha}{\lambda - \alpha} \theta} d\theta \\ &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left[ \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a)}{\left[ \frac{b(\lambda - \alpha) - \alpha}{\lambda - \alpha} \right]^a} \right] \\ &= \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left[ \frac{b(\lambda - \alpha)}{b(\lambda - \alpha) - \alpha} \right]^a \\ &= \frac{a}{\alpha} \text{Log} \left[ \frac{b(\lambda - \alpha)}{(b + 1)(\lambda - \alpha) - \lambda} \right]. \end{aligned}$$

### Prima a posteriori.

Sustituyendo ahora en la expresión anterior  $a$  por  $a + m$  y  $b$  por  $b + t$  se obtiene la siguiente expresión para la prima a posteriori y para el principio de utilidad exponencial.

$$P^* = \frac{a + m}{\alpha} \text{Log} \left[ \frac{(b + t)(\lambda - \alpha)}{(b + t + 1)(\lambda - \alpha) - \lambda} \right].$$

### $Q_1$ : Todas las distribuciones.

En este caso  $A$  y  $l(m | \theta)$  son evidentemente como los dados anteriormente.

Para obtener la expresión que permite obtener el ínfimo y el supremo de  $P^*$  en este caso se precisa de,

$$g(\theta) = E_F [e^{\alpha x} | \theta] = e^{\frac{\alpha \theta}{\lambda - \alpha}},$$

$$g(\theta) \cdot l(m | \theta) = e^{\frac{\alpha\theta}{\lambda-\alpha}} \cdot \frac{(\theta t)^m e^{-\theta t}}{m!} = \frac{t^m}{m!} \theta^m e^{-(t-\frac{\alpha}{\lambda-\alpha})\theta},$$

$$A_0 = A \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] = A \cdot \left[ \frac{(b+t)(\lambda-\alpha)}{(b+t+1)(\lambda-\alpha)-\lambda} \right]^{a+m}.$$

Finalmente la expresión a minimizar y maximizar en el modelo de contaminaciones con  $\mathcal{Q}_1$  es

$$R(\theta) = \frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)} \right\},$$

con:

$$P_1 = (1 - \varepsilon) \Gamma(a + m) b^a, \quad (3.67)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon (b + t)^{a+m} \Gamma(a) \theta^m \cdot e^{-(t-\frac{\alpha}{\lambda-\alpha})\theta}, \quad (3.68)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon (b + t)^{a+m} \Gamma(a) \theta^m \cdot e^{-\theta \cdot t}, \quad (3.69)$$

$\mathcal{Q}_2$ : Unimodalidad.

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta} \right\}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{1}{\alpha} \text{Log} \left\{ \frac{P_1 \cdot E_{\pi_0} [E_F [e^{\alpha x} | \theta]] + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)} \right\}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.67), ( 3.68) y ( 3.69) respectivamente.

### 3.2.3 Principio Esscher.

Verdadera prima individual.

$$\begin{aligned} P &= \frac{\int_{\mathcal{X}} x e^{\alpha x} f(x | \theta) dx}{\int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} f(x | \theta) dx} \\ &= \frac{\int_{\mathcal{X}} x e^{\alpha x} \sum_n \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \frac{e^{-\theta \theta^n}}{n!} dx}{\int_{\mathcal{X}} e^{\alpha x} \sum_n \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x}}{(n-1)!} \frac{e^{-\theta \theta^n}}{n!} dx} \\ &= \frac{\sum_n \frac{\lambda^n e^{-\theta \theta^n}}{n!(n-1)!} \int x^n e^{-(\lambda-\alpha)x} dx}{\sum_n \frac{\lambda^n e^{-\theta \theta^n}}{n!(n-1)!} \int x^{n-1} e^{-(\lambda-\alpha)x} dx} \\ &= \frac{\lambda \cdot \theta}{(\lambda - \alpha)^2}. \end{aligned}$$

Prima a priori.

$$\begin{aligned}
 P' &= \frac{\int_{\Theta} P e^{\alpha P} \pi_0(\theta) d\theta}{\int_{\Theta} e^{\alpha P} \pi_0(\theta) d\theta} \\
 &= \frac{\int_{\Theta} \frac{\lambda \cdot \theta}{(\lambda - \alpha)^2} e^{\frac{\lambda \cdot \theta}{(\lambda - \alpha)^2}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta}{\int_{\Theta} e^{\frac{\lambda \cdot \theta}{(\lambda - \alpha)^2}} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta} \\
 &= \frac{\lambda \cdot a}{b(\lambda - \alpha)^2 - \lambda \cdot \alpha}.
 \end{aligned}$$

Prima a posteriori.

$$P^* = \frac{\lambda \cdot (a + m)}{(b + t)(\lambda - \alpha)^2 - \lambda \cdot \alpha}.$$

$\mathcal{Q}_1$ : Todas las distribuciones.

En este caso estamos interesados en calcular el rango de variación de

$$P^* = \frac{\int_{\Theta} P e^{\alpha P} \pi_0(\theta | m) d\theta}{\int_{\Theta} e^{\alpha P} \pi_0(\theta | m) d\theta} = \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) \pi_0(\theta | m) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \pi_0(\theta | m) d\theta}.$$

Utilizando el resultado del teorema 4 el ínfimo y supremo de  $P^*$  se obtiene hallando el mínimo y el máximo de

$$S(\theta) = \frac{A_0 + g_1(\theta)l(m | \theta)}{A + g_2(\theta)l(m | \theta)}. \quad (3.70)$$

$g_1(\theta)$  y  $g_2(\theta)$  vienen dadas por

$$\begin{aligned}
 g_1(\theta) &= P e^{\alpha P} = \frac{\lambda \theta}{(\lambda - \alpha)^2} e^{\frac{\lambda \alpha \theta}{(\lambda - \alpha)^2}}, \\
 g_2(\theta) &= e^{\alpha P} = e^{\frac{\lambda \alpha \theta}{(\lambda - \alpha)^2}}.
 \end{aligned}$$

Luego

$$g_1(\theta) \cdot l(m | \theta) = \frac{\lambda \theta}{(\lambda - \alpha)^2} e^{\frac{\lambda \alpha \theta}{(\lambda - \alpha)^2}} \frac{(\theta t)^m e^{-\theta t}}{m!} = \frac{t^m}{m!} \frac{\lambda}{(\lambda - \alpha)^2} \theta^{m+1} e^{-\left[t - \frac{\lambda \alpha}{(\lambda - \alpha)^2}\right] \theta},$$

$$g_2(\theta) \cdot l(m | \theta) = \frac{t^m}{m!} \theta^m e^{-\left[t - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda-\alpha)^2}\right]\theta}.$$

La cantidad  $A$  viene dada por

$$\begin{aligned} A &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int l(m | \theta) \pi_0(\theta) d\theta \cdot \int g_2(\theta) \pi_0(\theta | m) d\theta \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int \frac{(\theta t)^m e^{-\theta t}}{m!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta \\ &\quad \cdot \int e^{\frac{\lambda\alpha\theta}{(\lambda-\alpha)^2}} \frac{(b+t)^{a+m}}{\Gamma(a+m)} \theta^{a+m-1} e^{-(b+t)\theta} d\theta \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{t^m}{m!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{(b+t)^{a+m}}{\Gamma(a+m)} \int \theta^{a+m-1} e^{-(b+t)\theta} d\theta \\ &\quad \cdot \int \theta^{a+m-1} e^{-\left[b+t - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda-\alpha)^2}\right]\theta} d\theta \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{t^m}{m!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{(b+t)^{a+m}}{\Gamma(a+m)} \frac{\Gamma(a+m)}{(b+t)^{a+m} \left[b+t - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda-\alpha)^2}\right]^{a+m}} \\ &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{t^m}{m!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+m)}{\left[b+t - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda-\alpha)^2}\right]^{a+m}}. \end{aligned}$$

Recordemos que,

$$P^* = \frac{\int_{\Theta} g_1(\theta) \cdot \pi_0(\theta | m) d\theta}{\int_{\Theta} g_2(\theta) \cdot \pi_0(\theta | m) d\theta} = \frac{\lambda(a+m)}{(b+t)(\lambda-\alpha)^2 - \lambda\alpha},$$

luego la cantidad  $A_0$  es

$$A_0 = A \cdot P^* = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \frac{t^m}{m!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+m)}{\left[b+t - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda-\alpha)^2}\right]^{a+m}} \frac{\lambda(a+m)}{(b+t)(\lambda-\alpha)^2 - \lambda\alpha}.$$

Llevando todo esto a (3.70) resulta la siguiente expresión a minimizar y maximizar,

$$S(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = (1-\varepsilon)\Gamma(a+m)b^a, \quad (3.71)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon\Gamma(a) \left[ b+t - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda-\alpha)^2} \right]^{a+m}, \quad (3.72)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon\Gamma(a) \left[ b+t - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda-\alpha)^2} \right]^{a+m} \theta^m e^{-\left[t - \frac{\lambda\alpha}{(\lambda-\alpha)^2}\right]\theta}, \quad (3.73)$$

$Q_2$ : Unimodalidad.

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en ( 3.71), ( 3.71) y ( 3.73) respectivamente.

### 3.2.4 Principio de varianza.

Verdadera prima individual.

$$P = \frac{\int_{\mathcal{X}} x^2 f(x | \theta) dx}{\int_{\mathcal{X}} x f(x | \theta) dx}.$$

El desarrollo del numerador es el siguiente:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{X}} x^2 f(x | \theta) dx &= \int_{\mathcal{X}} x^2 \sum_n \frac{\lambda^n x^{n-1} e^{-\lambda x} e^{-\theta \theta^n}}{(n-1)! n!} dx \\ &= \sum_n \frac{\lambda^n \theta^n e^{-\theta}}{n!(n-1)!} \int_{\mathcal{X}} x^{n+1} e^{-\lambda x} dx \\ &= \sum_n \frac{\lambda^n \theta^n e^{-\theta}}{n!(n-1)!} \frac{\Gamma(n+2)}{\lambda^{n+2}} = \sum_n \frac{\theta^n e^{-\theta} (n+1)}{\lambda^2 (n-1)!} \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\lambda^2} \sum_n \left[ \frac{n \cdot \theta^n}{(n-1)!} + \frac{\theta^n}{(n-1)!} \right] \\ &= \frac{e^{-\theta}}{\lambda^2} [\theta(\theta+1)e^\theta + \theta e^\theta] = \frac{\theta^2 + 2\theta}{\lambda^2}. \end{aligned}$$

El denominador, que fue calculado antes, es,

$$\int_{\mathcal{X}} x f(x) dx = \frac{\theta}{\lambda}.$$

Luego,

$$P = \frac{\lambda(\theta^2 + 2\theta)}{\lambda^2 \theta} = \frac{\theta + 2}{\lambda}.$$



Prima a priori.

$$\begin{aligned}
 P' &= \frac{\int_{\Theta} \left(\frac{\theta+2}{\lambda}\right)^2 \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta}{\int_{\Theta} \frac{\theta+2}{\lambda} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta} \\
 &= \frac{\int_{\Theta} (\theta^2 + 4\theta + 4) \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta}{\lambda \int_{\Theta} (\theta + 2) \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta} \\
 &= \frac{1}{\lambda} \frac{(a+1)a + 4ab + 4b^2}{ab + 2b^2}.
 \end{aligned}$$

Prima a posteriori.

$$P^* = \frac{1}{\lambda} \frac{(a+m+1)(a+m) + 4(a+m)(b+t) + 4(b+t)^2}{(a+m)(b+t) + 2(b+t)^2}.$$

$\mathcal{Q}_1$ : Todas las distribuciones.

De nuevo la solución del problema pasa por calcular el mínimo y el máximo de

$$S(\theta) = \frac{A_0 + g_1(\theta)l(m|\theta)}{A + g_2(\theta)l(m|\theta)},$$

con

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int l(m|\theta) \pi_0(\theta) d\theta \cdot \int g_2(\theta) \pi_0(\theta|m) d\theta \\
 &= \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \int \frac{(\theta t)^m e^{-\theta t}}{m!} \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} e^{-b\theta} d\theta \\
 &\quad \cdot \int \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right) \frac{(b+t)^{a+m}}{\Gamma(a+m)} \theta^{a+m-1} e^{-(b+t)\theta} d\theta \\
 &= \frac{1-\varepsilon t^m}{\varepsilon} \frac{b^a}{m! \Gamma(a)} \frac{(b+t)^{a+m}}{\Gamma(a+m)} \frac{1}{\lambda} \int \theta^{a+m-1} e^{-(b+t)\theta} d\theta \\
 &\quad \cdot \left[ \int \theta^{a+m} e^{-(b+t)\theta} d\theta + 2 \int \theta^{a+m-1} e^{-(b+t)\theta} d\theta \right] \\
 &= \frac{1-\varepsilon t^m}{\varepsilon} \frac{b^a}{m! \Gamma(a)} \frac{(b+t)^{a+m}}{\Gamma(a+m)} \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(a+m)}{(b+t)^{a+m}} \left[ \frac{\Gamma(a+m+1)}{(b+t)^{a+m+1}} + 2 \frac{\Gamma(a+m)}{(b+t)^{a+m}} \right] \\
 &= \frac{1-\varepsilon t^m}{\varepsilon} \frac{b^a}{m! \Gamma(a)} \frac{1}{\lambda} \frac{\Gamma(a+m)}{(b+t)^{a+m+1}} [a+m+2(b+t)].
 \end{aligned}$$

$$P^* = \frac{1}{\lambda} \frac{(a+m+1)(a+m) + 4(a+m)(b+t) + 4(b+t)^2}{(a+m)(b+t) + 2(b+t)^2},$$

y  $A_0 = A \cdot P^*$ .

$$g_1(\theta)l(m|\theta) = \left(\frac{\theta+\lambda}{\lambda}\right)^2 \frac{(\theta t)^m e^{-\theta t}}{m!} = \frac{t^m}{m!} \frac{1}{\lambda^2} (\theta+2)^2 \theta^m e^{-\theta t},$$

$$g_2(\theta)l(m|\theta) = \frac{\theta+\lambda}{\lambda} \frac{(\theta t)^m e^{-\theta t}}{m!} = \frac{t^m}{m!} \frac{1}{\lambda} (\theta+2) \theta^m e^{-\theta t}.$$

Finalmente queda,

$$S(\theta) = \frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta)}{P_1 + P_3(\theta)},$$

con

$$P_1 = (1-\varepsilon)\Gamma(a+m)b^a [a+m+2(b+t)], \quad (3.74)$$

$$P_2(\theta) = \varepsilon(b+t)^{a+m+1}\Gamma(a) \frac{1}{\lambda} (\theta+2)^2 \theta^m e^{-\theta t}, \quad (3.75)$$

$$P_3(\theta) = \varepsilon(b+t)^{a+m+1}\Gamma(a) (\theta+2) \theta^m e^{-\theta t}, \quad (3.76)$$

$\mathcal{Q}_2$ : Unimodalidad.

$$\frac{P_1 \cdot P^* + \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_2(\theta) d\theta}{P_1 + \int_{\theta_0}^{\theta_0+z} P_3(\theta) d\theta}, \text{ si } z \neq 0,$$

$$\frac{P_1 \cdot P^* + P_2(\theta_0)}{P_1 + P_3(\theta_0)}, \text{ si } z = 0,$$

con  $P_1$ ,  $P_2(\theta)$  y  $P_3(\theta)$  como en (3.74), (3.75) y (3.76) respectivamente.

### 3.2.5 Ilustraciones numéricas.

Para todos los modelos propuestos se desarrollarán dos ejemplos numéricos basados en datos extraídos del artículo de *Freifelder (1974)* en el primer escenario y de *Lemaire y Zi (1994)* en el segundo. Nosotros calcularemos el intervalo de variación de la prima a posteriori bajo nuestro modelo y realizaremos un análisis comparativo con los resultados obtenidos por dichos

autores. Los grados de contaminación utilizados serán siempre los mismos, con contaminaciones desde el 5% hasta el 35%. Por último se incorporarán gráficos que ilustren los resultados obtenidos.

### Escenario 1.

Consideraremos:

Constante de aversión al riesgo  $\equiv \alpha = 0.00004$

Siniestralidad esperada  $\equiv \frac{1}{\lambda} = 2857.14\text{u.m.}$

Supondremos que el actuario, por experiencias anteriores, tiene certeza que la tasa promedio de siniestros más probable es del 3% (esto es, la moda de la distribución a priori es  $\theta_0 = 0.03$ ). Tomaremos  $\pi_0(\theta) = \Gamma(2, 28)$  como distribución a priori de  $\theta$ . Una elección de una función de estructura de este tipo puede realizarse utilizando la relación entre los parámetros de una densidad gamma y su moda:  $\theta_0 = \frac{a-1}{b}$ . Para el cálculo de los parámetros  $a$  y  $b$  puede combinarse esta relación con la proporcionada con algún conocimiento acerca de la media del número de siniestros  $\left(\frac{a}{b}\right)$ .

El número de períodos de tiempo observados será de 10, 50 y 100, que proporcionan 1, 5 y 8 siniestros respectivamente.

Los rangos de variación de  $P^*$ , así como el valor de  $P'$  y  $P^*$  para cada una de las muestras y modelos de contaminación y los de la sensibilidad relativa (R.S.) se exponen en las siguientes tablas, que están organizadas de la siguiente manera:

Principio de prima neta: Tablas 3.21 y 3.22.

Principio de utilidad exponencial: Tablas 3.23, 3.24, 3.29 y 3.30.

Principio Esscher: Tablas 3.25 y 3.26.

Principio de varianza: Tablas 3.27 y 3.28.

Tabla 3.21: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $Q_1$ . Escenario 1.

t=10  $P' = 204.08$  $P^* = 225.563$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	220.057	243.364	5.10
	0.10	214.436	261.709	10.4
	0.15	208.686	280.682	16.0
	0.20	202.792	300.381	21.6
	0.25	196.735	320.922	27.5
	0.30	190.494	342.445	33.6
	0.35	184.044	365.118	40.1
t=50  $P' = 204.08$  $P^* = 256.410$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	251.338	267.502	3.10
	0.10	246.341	278.335	6.20
	0.15	241.395	288.992	9.20
	0.20	236.473	299.551	12.3
	0.25	231.552	310.088	15.3
	0.30	226.605	320.679	18.3
	0.35	221.603	331.406	21.4
t=100  $P' = 204.08$  $P^* = 223.214$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	218.619	229.897	2.50
	0.10	214.194	236.387	5.00
	0.15	209.901	242.739	7.30
	0.20	205.709	249.007	9.70
	0.25	201.587	255.238	12.0
	0.30	197.506	261.482	14.3
	0.35	193.438	267.789	16.6

Tabla 3.22: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $Q_2$ . Escenario 1.

t=10  $P' = 204.08$  $P^* = 225.563$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	220.129	237.132	3.70
	0.10	214.625	248.937	7.60
	0.15	209.050	261.004	11.5
	0.20	203.404	273.366	15.5
	0.25	197.685	286.055	19.5
	0.30	191.891	299.113	23.7
t=50  $P' = 204.08$  $P^* = 256.410$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	252.071	260.960	1.70
	0.10	247.693	265.423	3.40
	0.15	243.262	269.810	5.10
	0.20	238.762	274.131	6.90
	0.25	234.174	278.396	8.60
	0.30	229.479	282.615	10.3
t=100  $P' = 204.08$  $P^* = 223.214$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	219.378	225.162	1.30
	0.10	215.567	227.063	2.50
	0.15	211.766	228.922	3.80
	0.20	207.959	230.745	5.10
	0.25	204.129	232.535	6.30
	0.30	200.257	234.296	7.60
0.35	193.323	236.034	9.50	

Tabla 3.23: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $Q_1$ . Escenario 1.

t=10  $P' = 230.940$  $P^* = 255.101$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	248.885	275.401	5.20
	0.10	242.539	296.316	10.5
	0.15	236.047	317.944	16.0
	0.20	229.391	340.395	21.7
	0.25	222.551	363.801	27.6
	0.30	215.503	388.321	33.8
0.35	208.216	414.146	40.3	
t=50  $P' = 230.940$  $P^* = 289.734$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	284.005	302.290	3.10
	0.10	278.360	314.551	6.20
	0.15	272.773	326.611	9.30
	0.20	267.213	338.560	12.3
	0.25	261.654	350.482	15.3
	0.30	256.065	362.465	18.3
0.35	250.414	374.600	21.4	
t=100  $P' = 230.940$  $P^* = 252.143$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	246.953	259.697	2.50
	0.10	241.956	267.031	5.00
	0.15	237.108	274.210	7.30
	0.20	232.373	281.293	9.70
	0.25	227.718	288.336	12.0
	0.30	223.109	295.392	14.3
0.35	218.514	302.518	16.6	

Tabla 3.24: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $Q_2$ . Escenario 1.

t=10  $P' = 230.940$  $P^* = 255.101$	$\varepsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
	0.05	248.963	268.304	3.80
	0.10	242.745	281.772	7.60
	0.15	236.445	295.538	11.5
	0.20	230.063	309.637	15.6
	0.25	223.596	324.108	19.7
	0.30	217.043	338.996	24.0
	0.35	210.403	354.355	28.2
t=50  $P' = 230.940$  $P^* = 289.734$	$\varepsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
	0.05	284.836	294.888	1.70
	0.10	279.892	299.942	3.40
	0.15	274.889	304.910	5.10
	0.20	269.807	309.802	7.00
	0.25	264.626	314.631	8.60
	0.30	259.323	319.408	10.3
	0.35	253.872	324.143	12.1
t=100  $P' = 230.940$  $P^* = 252.143$	$\varepsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
	0.05	247.812	254.345	1.30
	0.10	243.510	256.494	2.50
	0.15	239.218	258.597	3.80
	0.20	234.920	260.657	5.10
	0.25	230.595	262.681	6.30
	0.30	226.223	264.673	7.60
	0.35	221.781	266.637	8.90

Tabla 3.25: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $Q_1$ . Escenario 1.

t=10  $P' = 261.500$  $P^* = 288.635$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	281.618	311.845	5.20
	0.10	274.453	335.754	10.6
	0.15	267.123	360.471	16.1
	0.20	259.607	386.122	22.0
	0.25	251.881	412.858	27.8
	0.30	243.919	440.860	34.1
	0.35	235.687	470.346	40.6
t=50  $P' = 261.500$  $P^* = 327.460$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	320.987	341.682	3.10
	0.10	314.610	355.568	6.20
	0.15	308.297	369.225	9.30
	0.20	302.015	382.754	12.3
	0.25	295.734	396.251	15.3
	0.30	289.420	409.815	18.3
	0.35	283.035	423.551	21.4
t=100  $P' = 261.500$  $P^* = 284.858$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	278.997	293.398	2.50
	0.10	273.352	301.689	5.00
	0.15	267.877	309.805	7.30
	0.20	262.529	317.812	9.70
	0.25	257.271	325.772	12.0
	0.30	252.065	333.748	14.3
	0.35	246.875	341.803	16.6



Tabla 3.26: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $\mathcal{Q}_2$ . Escenario 1.

t=10  $P' = 261.50$  $P^* = 288.635$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	281.701	303.743	3.80
	0.10	274.674	319.153	7.70
	0.15	267.554	334.900	11.6
	0.20	260.337	351.024	15.7
	0.25	253.023	367.569	19.8
	0.30	245.609	384.589	24.0
	0.35	238.093	402.142	28.4
t=50  $P' = 261.50$  $P^* = 327.460$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	321.929	333.302	1.70
	0.10	316.347	339.030	3.40
	0.15	310.697	344.660	5.10
	0.20	304.957	350.204	7.00
	0.25	299.106	355.675	8.60
	0.30	293.117	361.087	10.3
	0.35	286.960	366.451	12.1
t=100  $P' = 261.50$  $P^* = 284.858$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	279.969	287.349	1.30
	0.10	275.111	289.780	2.50
	0.15	270.267	292.158	3.80
	0.20	265.413	294.488	5.10
	0.25	260.530	296.777	6.30
	0.30	255.593	299.030	7.60
	0.35	250.576	301.251	8.90

Tabla 3.27: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $\mathcal{Q}_1$ . Escenario 1.

t=10  $P' = 5921.880$  $P^* = 5942.700$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	5932.70	5961.85	0.5
	0.10	5931.58	5981.55	0.8
	0.15	5925.83	6001.90	1.2
	0.20	5919.93	6022.99	1.7
	0.25	5913.86	6044.94	2.2
	0.30	5907.60	6067.91	2.7
0.35	5901.13	6092.07	3.2	
t=50  $P' = 5921.880$  $P^* = 5972.260$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	5967.17	5983.57	0.2
	0.10	5962.15	5994.60	0.5
	0.15	5957.19	6005.44	0.8
	0.20	5952.25	6016.18	1.0
	0.25	5947.30	6026.88	1.3
	0.30	5942.34	6037.63	1.6
0.35	5937.31	6048.52	1.8	
t=100  $P' = 5921.880$  $P^* = 5938.330$	$\varepsilon$	$P_{\text{inf}}^*$	$P_{\text{sup}}^*$	R.S.
	0.05	5933.73	5945.07	0.2
	0.10	5929.29	5951.61	0.3
	0.15	5924.99	5958.01	0.5
	0.20	5920.79	5964.32	0.7
	0.25	5916.66	5970.60	1.0
	0.30	5912.57	5976.88	1.1
0.35	5908.49	5983.23	1.2	

Tabla 3.28: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $Q_2$ . Escenario 1.

t=10  $P' = 5921.880$  $P^* = 5942.700$	$\varepsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
	0.05	5937.25	5955.19	0.3
	0.10	5931.72	5967.93	0.6
	0.15	5926.11	5980.92	1.0
	0.20	5920.42	5994.21	1.2
	0.25	5914.64	6007.84	1.5
	0.30	5908.77	6021.84	2.0
	0.35	5902.82	6036.26	2.2
t=50  $P' = 5921.880$  $P^* = 5972.260$	$\varepsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
	0.05	5967.92	5976.92	0.1
	0.10	5963.54	5981.48	0.3
	0.15	5959.10	5985.96	0.4
	0.20	5954.60	5990.38	0.6
	0.25	5950.00	5994.73	0.7
	0.30	5945.30	5999.03	0.9
	0.35	5940.46	6003.30	1.0
t=100  $P' = 5921.880$  $P^* = 5938.330$	$\varepsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
	0.05	5934.50	5940.30	0.0
	0.10	5930.69	5942.22	0.2
	0.15	5926.89	5944.10	0.3
	0.20	5923.08	5945.94	0.4
	0.25	5919.25	5947.75	0.5
	0.30	5915.37	5949.53	0.6
	0.35	5911.43	5951.28	0.7

Tabla 3.29: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $Q_1$  y distintos  $\lambda$  y  $\alpha$ . Escenario 1.

$\varepsilon$	$\lambda$	$\alpha$	$P^*$	$P^*_{inf}$	$P^*_{sup}$	R.S.
0.05	0.00030	0.00004	345.509	338.676	360.486	3.1
	0.00035	0.00003	280.617	275.067	292.772	3.1
	0.00035	0.00002	272.056	266.675	283.834	3.1
	0.00035	0.00004	289.735	284.005	302.290	3.1
	0.00042	0.00004	236.327	231.653	246.564	3.1
0.10	0.00030	0.00004	345.509	331.945	375.111	6.2
	0.00035	0.00003	280.617	269.600	304.641	6.2
	0.00035	0.00002	272.056	261.374	295.337	6.2
	0.00035	0.00004	289.735	278.361	314.551	6.2
	0.00042	0.00004	236.327	227.049	256.562	6.2

Tabla 3.30: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Contaminaciones con  $Q_2$  y distintos  $\lambda$  y  $\alpha$ . Escenario 1.

$\varepsilon$	$\lambda$	$\alpha$	$P^*$	$P^*_{inf}$	$P^*_{sup}$	R.S.
0.05	0.00030	0.00004	345.509	339.667	351.657	1.7
	0.00035	0.00003	280.617	275.871	285.605	1.7
	0.00035	0.00002	272.056	267.454	276.889	1.7
	0.00035	0.00004	289.735	284.836	294.888	1.7
	0.00042	0.00004	236.327	232.330	240.528	1.7
0.10	0.00030	0.00004	345.509	333.773	357.686	3.4
	0.00035	0.00003	280.617	271.083	290.498	3.4
	0.00035	0.00002	272.056	262.811	281.629	3.4
	0.00035	0.00004	289.735	279.893	299.943	3.4
	0.00042	0.00004	236.327	228.298	244.649	3.4

En la gráfica 3.6 se representan los R.S. obtenidos frente al grado de contaminación para los cuatro principios de cálculo de primas en el modelo de unimodalidad y  $t = 10$ .

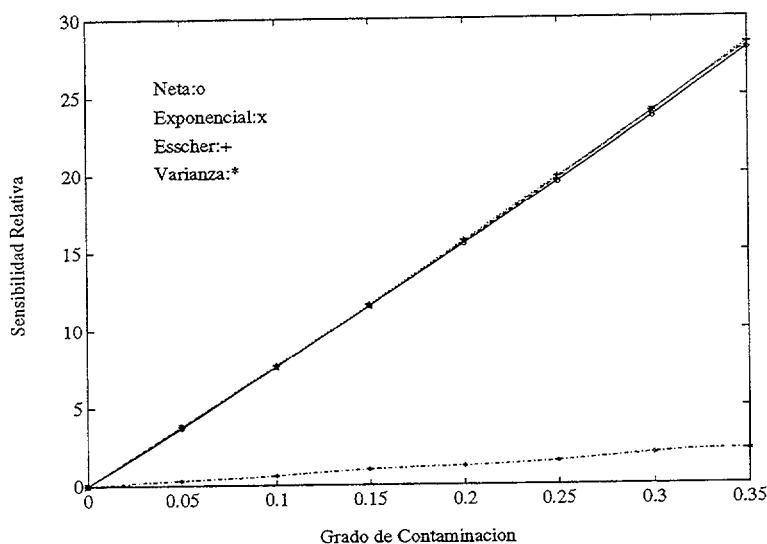


Figura 3.6: Gráfica de los R.S. para los cuatro principios de cálculo de primas en el escenario 1.

Algunas representaciones de la función  $R(\theta)$  pueden verse en las figuras 3.7, 3.8, 3.9 y 3.10. En todas ellas se observa el ínfimo y el supremo de la prima a posteriori.

La figura 3.7 corresponde al caso  $t = 10$  y  $\varepsilon = 0.05$  para el principio de prima neta (trazo continuo) y el de utilidad exponencial (trazo discontinuo).

La figura 3.8 corresponde al principio de prima neta para  $t = 10$  y los grados de contaminación del 5% (trazo continuo) y del 10% (trazo discontinuo).

La figura 3.9 corresponde al principio de utilidad exponencial para  $\alpha = 0.00002$  (trazo continuo),  $\alpha = 0.00004$  (trazo discontinuo) y  $t = 50$ .

La figura 3.10 corresponde al principio de utilidad exponencial para  $\lambda = 0.00042$  (trazo continuo),  $\lambda = 0.00035$  (trazo discontinuo) y  $t = 50$ .

La figura 3.11 representa la densidad a priori y a posteriori de  $\theta$ :  $\Gamma(2, 28)$  y  $\Gamma(7, 78)$  (en trazo discontinuo). Aquí se aprecia bastante bien como las impresiones del actuario acerca de  $\theta$  varían al tomar la muestra, pasándose de una moda de 0.035 a una moda de 0.077.

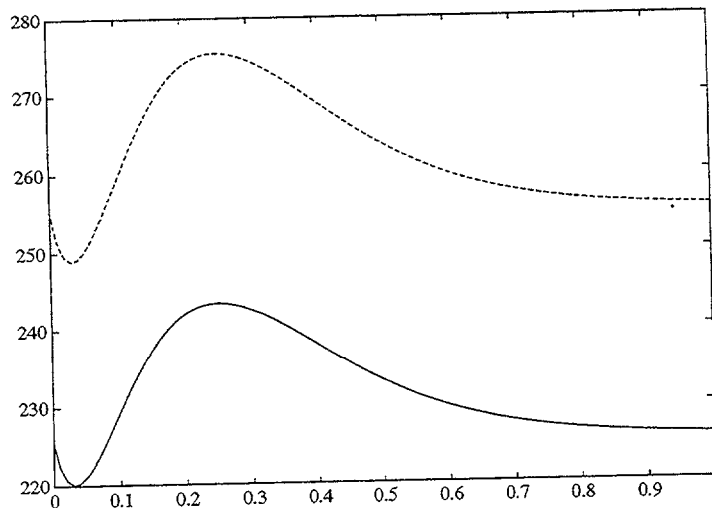


Figura 3.7: Gráfica de  $R(\theta)$  en el modelo de contaminaciones con todas las distribuciones. Comparación entre el principio de prima neta y de utilidad exponencial.

Resulta de interés hacer los siguientes comentarios:

1. En el modelo de contaminaciones con todas las distribuciones los rangos de variación de la prima a posteriori son relativamente grandes, como cabía esperar en una situación de vago conocimiento por parte del actuario acerca de la distribución a priori del parámetro  $\theta$ .
2. En el segundo caso de contaminaciones unimodales los rangos de variación disminuyen de forma considerable, pero se manifiesta también cierta falta de robustez. Además en ambos modelos se observa que a medida que aumenta el tamaño muestral los rangos disminuyen considerablemente. En todo caso, tanto en el modelo anterior como en este, el actuario habrá de tarificar la póliza con mucha cautela.
3. A la vista de las tablas 3.29 y 3.30 (el tamaño muestral es de  $t = 50$ ), podemos concluir que cuanto más adversa es al riesgo la compañía (cuanto mayor es  $\alpha$ ) más conservadora es la prima a posteriori, y mayor el rango de variación de ésta, mientras que cuanto mayor es  $\lambda$ , es decir,

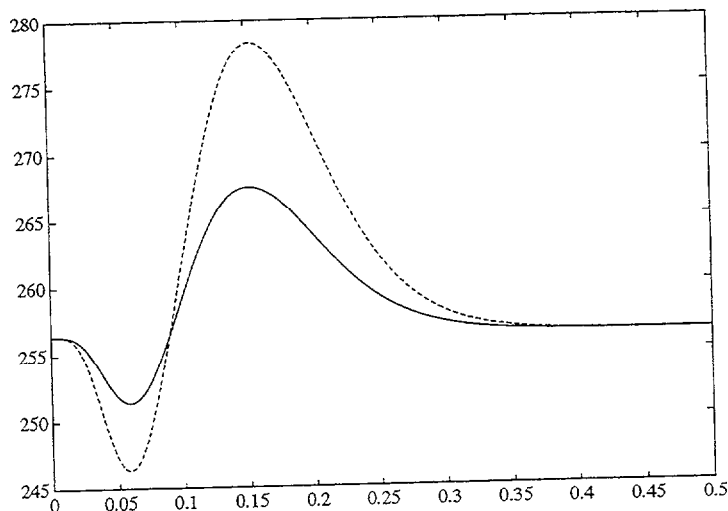


Figura 3.8: Gráfica de  $R(\theta)$  en el modelo de contaminaciones con todas las distribuciones. Principio de prima neta para los grados de contaminación del 5% y del 10%.

cuanto menor es la cantidad media de indemnización por siniestro, menor es la prima a posteriori y menor es el rango de variación de ésta.

4. Se observa que la sensibilidad relativa (R.S.) es prácticamente la misma para los distintos principios de cálculo de prima y el mismo modelo de contaminación. Así, por ejemplo, para el modelo de todas las distribuciones y para una contaminación del 5% R.S. es 5.1 para el principio de prima neta, 5.2 para el principio exponencial y 5.2 para el principio Esscher. De forma similar ocurre para el modelo de unimodalidad, los R.S. son ahora 3.7, 3.8 y 3.8 para el principio de prima neta, exponencial y Esscher respectivamente.

Resulta ilustrativo, como se observa en las tablas 3.29 y 3.30 que el R.S. es igual para los distintos  $\lambda$  y  $\alpha$  considerados. Esta situación era de esperar pues el R.S. sólo varía en función de la clase considerada (y dentro de la clase de las  $\varepsilon$ -contaminaciones para los distintos grados de contaminación).

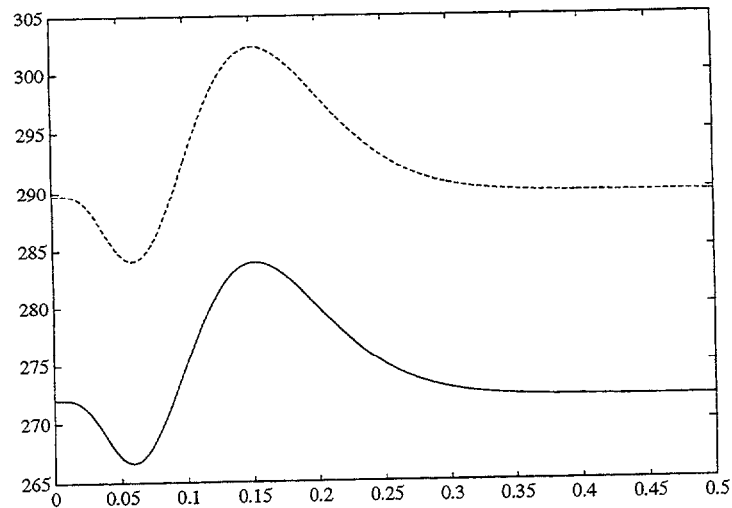


Figura 3.9: Gráfica de  $R(\theta)$  en función de  $\alpha$ . Principio de utilidad exponencial.

5. El modelo colectivo compuesto es significativamente más robusto que el colectivo no compuesto. En este modelo al igual que en el no compuesto la incorporación de unimodalidad como propiedad a la tasa media de reclamaciones es bastante aconsejable. El principio de varianza es el más robusto si bien tiende a cargar cantidades significativamente mayores que las demás. Ya se comentó en el capítulo 1 que este principio incorpora también el recargo de seguridad que debe llevar la prima para atender a las desviaciones aleatorias de la siniestralidad.



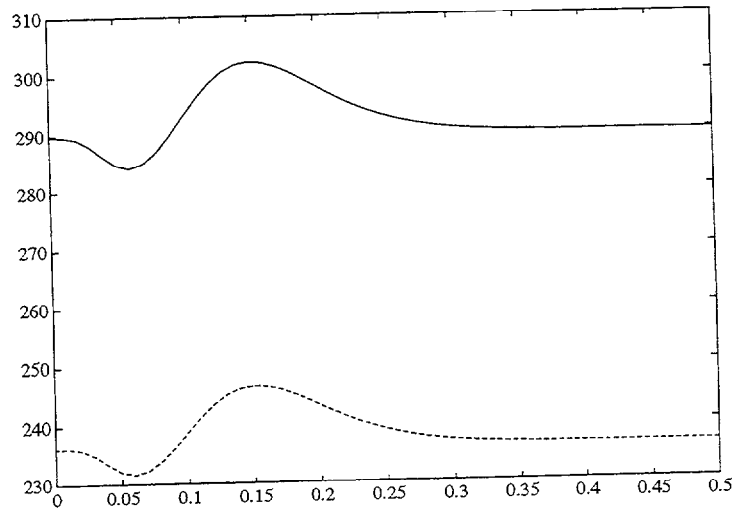


Figura 3.10: Gráfica de  $R(\theta)$  en función de  $\lambda$ . Principio de utilidad exponencial.

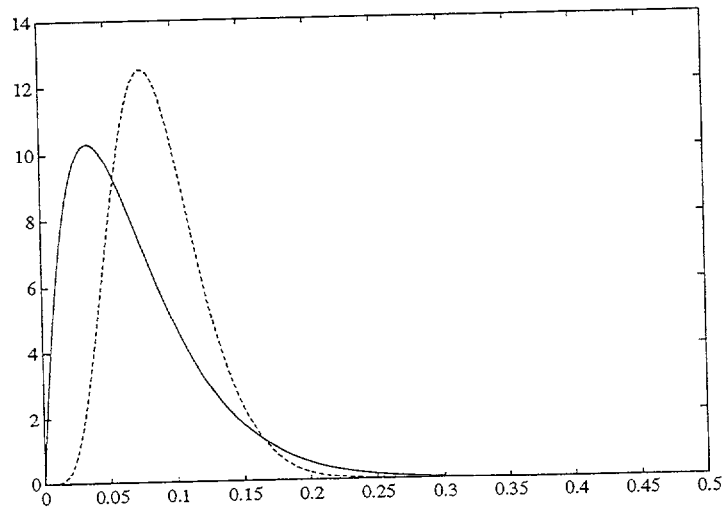


Figura 3.11: Distribución a priori y a posteriori de  $\theta$ .

**Escenario 2.**

Los datos de este segundo ejemplo se han tomado del artículo de *Lemaire y Zi (1994)* y fueron divididos por  $10^3$  para hacerlos más asequibles.

Se considerará:

Constante de aversión al riesgo  $\equiv \alpha = 0.00002$ .

Siniestralidad esperada  $\equiv \frac{1}{\lambda} = 3\text{u.m.}$

Moda de la distribución a priori  $\theta_0 = 0.05$  (el actuario tiene certeza, por experiencias anteriores, que la tasa promedio de siniestros más frecuente es del 5%). Tomaremos ahora  $\pi_0(\theta) = \Gamma(2, 20)$  como distribución a priori de  $\theta$ . Se elegirán muestras de tamaño 5 y 50 años, para las que se han observado 1 y 4 siniestros. Los resultados obtenidos en este segundo ejemplo se recogen en las tablas de las siguientes páginas, organizadas de la siguiente manera:

Principio de prima neta: Tabla 3.31.

Principio exponencial: Tabla 3.32.

Principio Esscher: Tabla 3.33.

Principio de varianza: Tabla 3.34.

Tabla 3.31: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de prima neta. Modelo colectivo compuesto. Escenario 2.

Todas las distribuciones.				
	$\epsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
$t=5$ $P' = 0.300$ $P^* = 0.360$	0.05	0.351917	0.406272	7.50
	0.10	0.343634	0.453295	15.2
	0.15	0.335126	0.501280	23.0
	0.20	0.326368	0.550466	31.0
	0.25	0.317329	0.601129	39.4
	0.30	0.307973	0.653592	48.0
	0.35	0.298256	0.708240	57.0
$t=50$ $P' = 0.300$ $P^* = 0.257$	0.05	0.250492	0.264211	2.60
	0.10	0.244000	0.271343	5.30
	0.15	0.237634	0.278573	7.90
	0.20	0.231360	0.285938	10.6
	0.25	0.225147	0.293481	13.2
	0.30	0.218964	0.301249	16.0
	0.35	0.212777	0.309298	18.7
Unimodalidad.				
	$\epsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
$t=5$ $P' = 0.300$ $P^* = 0.360$	0.05	0.351917	0.391080	5.40
	0.10	0.343637	0.422403	10.9
	0.15	0.335150	0.454036	16.5
	0.20	0.326450	0.486052	22.1
	0.25	0.317529	0.518532	28.0
	0.30	0.308377	0.551565	33.7
	0.35	0.298986	0.585255	39.7
$t=50$ $P' = 0.300$ $P^* = 0.257$	0.05	0.250492	0.260000	1.80
	0.10	0.244008	0.262843	3.60
	0.15	0.237685	0.265679	5.40
	0.20	0.231517	0.268514	7.20
	0.25	0.225498	0.271351	9.00
	0.30	0.219623	0.274199	10.6
	0.35	0.213886	0.277063	12.2

Tabla 3.32: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de utilidad exponencial. Modelo colectivo compuesto. Escenario 2.

Todas las distribuciones.				
	$\epsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
$t=5$  $P' = 0.259$  $P^* = 0.360$	0.05	0.351939	0.406298	7.50
	0.10	0.343655	0.453324	15.2
	0.15	0.335147	0.501312	23.0
	0.20	0.326388	0.550501	31.1
	0.25	0.317349	0.601168	39.4
	0.30	0.307992	0.653634	48.0
	0.35	0.298274	0.708286	57.0
$t=50$  $P' = 0.299$  $P^* = 0.257$	0.05	0.250507	0.264227	2.60
	0.10	0.244015	0.271359	5.30
	0.15	0.237648	0.278590	8.00
	0.20	0.231374	0.285956	10.6
	0.25	0.225161	0.293499	13.3
	0.30	0.218978	0.301268	16.0
	0.35	0.21279	0.309317	18.7
Unimodalidad.				
	$\epsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
$t=5$  $P' = 0.299$  $P^* = 0.360$	0.05	0.351939	0.391104	5.40
	0.10	0.343658	0.422430	11.0
	0.15	0.335171	0.454065	16.5
	0.20	0.326470	0.486083	22.1
	0.25	0.317548	0.518565	28.0
	0.30	0.308296	0.551601	33.7
	0.35	0.299005	0.585292	39.7
$t=50$  $P' = 0.299$  $P^* = 0.257$	0.05	0.250507	0.260015	1.80
	0.10	0.244023	0.262859	3.60
	0.15	0.237700	0.265695	5.40
	0.20	0.231531	0.268530	7.20
	0.25	0.225511	0.271368	8.90
	0.30	0.219636	0.274216	10.6
	0.35	0.213899	0.27708	12.2

Tabla 3.33: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio Esscher. Modelo colectivo compuesto. Escenario 2.

Todas las distribuciones.				
	$\epsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
$t=5$ $P' = 0.300$ $P^* = 0.360$	0.05	0.351960	0.406323	7.50
	0.10	0.343676	0.453352	15.2
	0.15	0.335167	0.501344	23.0
	0.20	0.326408	0.550537	31.1
	0.25	0.317368	0.601207	39.4
	0.30	0.308011	0.653677	48.0
	0.35	0.298293	0.708332	57.0
$t=50$ $P' = 0.300$ $P^* = 0.257$	0.05	0.250522	0.264243	2.60
	0.10	0.244030	0.271375	5.30
	0.15	0.237662	0.278606	8.00
	0.20	0.231388	0.285973	10.6
	0.25	0.225175	0.293517	13.2
	0.30	0.218991	0.301286	16.0
	0.35	0.212803	0.309336	18.7
Unimodalidad.				
	$\epsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
$t=5$ $p' = 0.300$ $P^* = 0.360$	0.05	0.351961	0.391128	5.40
	0.10	0.343679	0.422456	11.0
	0.15	0.335191	0.454094	16.5
	0.20	0.326490	0.486114	22.1
	0.25	0.317568	0.518598	28.0
	0.30	0.308415	0.551636	33.7
	0.35	0.299023	0.585330	40.0
$t=50$ $P' = 0.300$ $P^* = 0.257$	0.05	0.250522	0.260031	1.80
	0.10	0.244038	0.262875	3.60
	0.15	0.237714	0.265711	5.40
	0.20	0.231545	0.268546	7.20
	0.25	0.225525	0.271384	9.00
	0.30	0.219649	0.274232	10.6
	0.35	0.213912	0.277097	12.2

Tabla 3.34: Intervalo de variación de  $P^*$ . Principio de varianza. Modelo colectivo compuesto. Escenario 2.

Todas las distribuciones.				
	$\varepsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
$t=5$ $P' = 6.307$ $P^* = 6.366$	0.05	6.35871	6.42057	1.0
	0.10	6.35041	6.47493	2.0
	0.15	6.34189	6.53013	3.0
	0.20	6.33311	6.58643	4.0
	0.25	6.32404	6.64417	5.0
	0.30	6.31464	6.70369	6.1
	0.35	6.30487	6.76544	7.2
$t=50$ $P' = 6.307$ $P^* = 6.258$	0.05	6.25225	6.26605	0.2
	0.10	6.24575	6.27327	0.4
	0.15	6.23938	6.28058	0.6
	0.20	6.23309	6.28803	0.8
	0.25	6.22686	6.29566	1.0
	0.30	6.22066	6.30352	1.3
	0.35	6.21445	6.31166	1.5
Unimodalidad.				
	$\varepsilon$	$P_{inf}^*$	$P_{sup}^*$	R.S.
$t=5$ $P' = 6.307$ $P^* = 6.366$	0.05	6.35871	6.40305	0.7
	0.10	6.35042	6.43941	1.4
	0.15	6.34189	6.47596	2.1
	0.20	6.33312	6.51278	2.8
	0.25	6.32411	6.54996	3.5
	0.30	6.31484	6.58761	4.2
	0.35	6.30530	6.62583	5.0
$t=50$ $P' = 6.307$ $P^* = 6.258$	0.05	6.25225	6.26179	0.1
	0.10	6.24575	6.26466	0.3
	0.15	6.23940	6.26752	0.4
	0.20	6.23320	6.27355	0.6
	0.25	6.22713	6.27355	0.7
	0.30	6.22119	6.27613	0.8
	0.35	6.21539	6.27902	1.0

De nuevo representamos para este escenario los valores de R.S. frente al grado de contaminación para los cuatro principios de cálculo de primas con contaminaciones unimodales y  $t = 10$ .

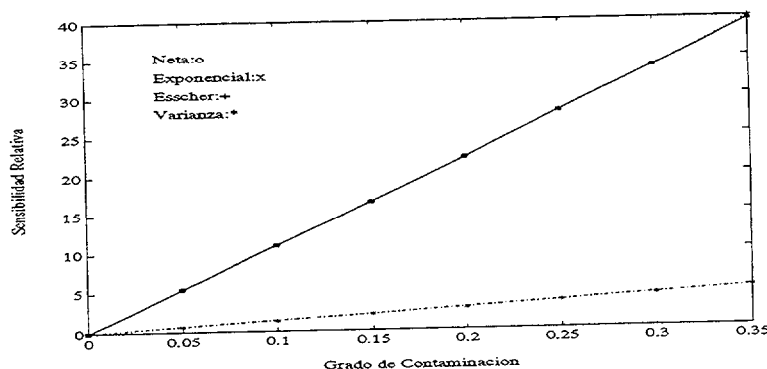


Figura 3.12: Gráfica de los R.S. para los cuatro principios de cálculo de primas en el escenario 2.

Podemos observar como las conclusiones obtenidas en el escenario 1 son válidas para este escenario, sin más que comparar los R.S. La tabla 3.35 resume los valores extremos de R.S. observados, que están asociados a los casos extremos de contaminación considerados, 5% y 35% respectivamente.

Por último, la gráfica 3.13 representa  $S(\theta)$ , y por tanto expone el ínfimo y el supremo de  $P^*$  para el caso de contaminaciones del 5% y del 10% (en trazo discontinuo) en el modelo con todas las distribuciones y el principio Esscher con  $t = 50$ .

Tabla 3.35: Intervalo de variación de los R.S. para los distintos principios, muestras y clase contaminante en el modelo colectivo compuesto.

$Q_1$ Escenario 1	Prima Neta	Utilidad Exponencial	Esscher	Varianza
R.S. ( $t = 10$ )	5.1-40.1	5.2-40.3	5.2-40.6	0.5-3.2
R.S. ( $t = 50$ )	3.1-21.4	3.1-21.4	3.1-21.4	0.2-1.8
R.S. ( $t = 100$ )	2.5-16.6	2.5-16.6	2.5-16.6	0.2-1.2
$Q_2$ Escenario 1	Prima Neta	Utilidad Exponencial	Esscher	Varianza
R.S. ( $t = 10$ )	3.7-2.8	3.8-28.2	3.8-28.4	0.3-2.2
R.S. ( $t = 50$ )	1.7-12.1	1.7-12.1	1.7-12.10	0.1-1.0
R.S. ( $t = 100$ )	1.3-9.5	1.3-8.9	1.3-8.9	0.0-0.7
$Q_1$ Escenario 2	Prima Neta	Utilidad Exponencial	Esscher	Varianza
R.S. ( $t = 5$ )	7.5-57.0	7.5-57.0	7.5-57.0	1.0-7.2
R.S. ( $t = 50$ )	2.6-18.7	2.6-18.7	2.6-18.7	0.2-1.5
$Q_2$ Escenario 2	Prima Neta	Utilidad Exponencial	Esscher	Varianza
R.S. ( $t = 5$ )	5.4-39.7	5.4-39.7	5.4-40.0	0.7-5.0
R.S. ( $t = 50$ )	1.8-12.2	1.8-12.2	1.8-12.2	0.1-1.0



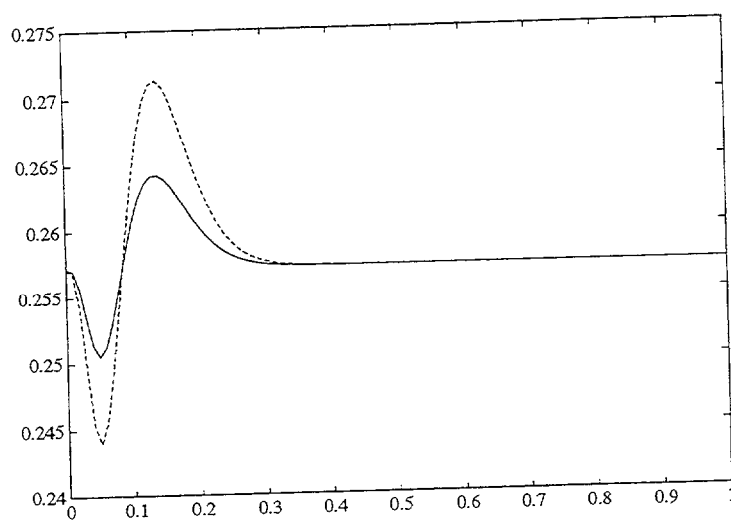


Figura 3.13: Gráfica de  $S(\theta)$  en el modelo de contaminaciones con todas las distribuciones. Principio Esscher para los grados de contaminación del 5% y del 10%.

# Capítulo 4

## El modelo jerárquico.

### 4.1 Introducción.

Hasta ahora nos hemos limitado a estudiar el problema de tarificación en el modelo colectivo de la teoría del riesgo, esto es, aquel en el que interviene como un todo la colectividad de los asegurados. En este capítulo nos ocuparemos del modelo individual o jerárquico, que se fija en el riesgo correspondiente a cada póliza o asegurado dentro de la cartera o colectivo de asegurados. En este caso la cartera se considera dividida en  $p$  pólizas,  $p \in \mathbb{N}$ , a su vez, cada una de las cuales puede estar dividida en  $r$  pólizas,  $r \in \mathbb{N}$ , etc.

El modelo jerárquico constituye una generalización del modelo de *Bühlmann-Straub*, que puede verse en *Goodvaerts y Hogstad (1987)* y en *Pons (1991)*. Se supone que cada cartera puede estar dividida en un cierto número de subcarteras, cada una de ellas caracterizada por un parámetro de riesgo desconocido que describe como difiere una subcartera de las otras. El más general de todos es el modelo jerárquico de múltiples niveles. El esquema para dos niveles (dos subcarteras) es el siguiente:

	$p = 1$		$p = 2$		...
	$\theta_1$		$\theta_2$		...
$\theta_{11}$	$\theta_{12}$	...	$\theta_{21}$	$\theta_{22}$	...
$x_{111}$	$x_{121}$	...	$x_{211}$	$x_{221}$	...
$x_{112}$	$x_{122}$	...	$x_{212}$	$x_{222}$	...

En la práctica  $\theta_{ij}$  representa las características del asegurado  $j$  dentro de la subcartera  $i$  y  $\theta_i$  puede representar, por ejemplo, la zona geográfica  $i$ -ésima. Podemos situarnos en el marco de los seguros de automóviles en España<sup>1</sup>, donde se tarifica un vehículo en función de la zona geográfica española donde se circula habitualmente. Así, determinadas regiones españolas tienen una siniestralidad mayor que otras, debido sobre todo a sus condiciones geográficas, climatológicas, número de vehículos que componen el parque automovilístico, etc.

España está dividida en tres zonas diferentes (A, B y C) según el riesgo que se le supone a cada una de ellas. Por nombrar algunas provincias digamos que en la zona A están Asturias, Gipúzcoa, Las Palmas, Tenerife, Vizcaya, etc; en la zona B, Alicante, Barcelona, Madrid, Málaga, Sevilla, etc; y por último en la zona C, Albacete, Almería, Granada, Soria, Teruel, etc.

La zona A se considera de siniestralidad alta, la zona B de siniestralidad media, y la zona C de siniestralidad baja.

Por lo que se refiere a las características individuales de los conductores asegurados podemos mencionar el sexo, la edad, estado civil, antigüedad de posesión del carnet de conducir, número de veces que precisó examinarse para la obtención del mismo, etc.

El objetivo del modelo vuelve a ser encontrar los estimadores de credibilidad para las primas de riesgo individuales, es decir las primas a cobrar para cada en cada uno de los contratos.

El más sencillo de los modelos jerárquicos es el denominado por *Klugman* **One-way**, que se corresponde con el modelo clásico de *Bühlmann-Straub* y que será objeto de estudio en esta memoria, ver tabla 1.4. Aunque insistamos, recordemos que una cartera consiste en pólizas o contratos más o menos similares, aunque nunca completamente idénticas. En la teoría actuarial moderna es costumbre pensar en un parámetro de riesgo, notado  $\theta_{js}$ , que describe totalmente las características del riesgo  $j$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$  en el período  $s$ ,  $s = 1, 2, \dots, t$ . Intuitivamente uno asume que las diferencias entre los contratos y períodos son causadas por parámetros diferentes  $\theta_{11}, \theta_{12}, \dots, \theta_{kt}$ .

Sin embargo en la mayoría de los modelos de la T.C. se supone que

<sup>1</sup>El Ramo de Automóviles es el más importante después del seguro de vida habiendo tenido una evolución de 600398 primas emitidas en 1990 a 804843 en 1993.

los  $\theta_{j_s}$  son homogéneos en el tiempo, i.e. los parámetros de riesgo para un contrato fijo no cambian con el mismo; luego desaparecen los subíndices  $s$ , en los parámetros de riesgo, y escribimos  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$ . Como es obvio, en la mayoría de las situaciones estos parámetros son desconocidos o inobservables, constituyendo uno de los objetivos de la T.C. el estimarlos para obtener las primas de credibilidad.

De ahora en adelante estos parámetros serán considerados como variables aleatorias. Interpretaremos  $x_{j_s}$  como la tasa promedio de siniestros o número medio de siniestros del contrato  $j$  en el período  $s$ , aunque en otras ocasiones también se consideran coste medio total reclamado.

Es obvio que este modelo es más realista que los tratados hasta este momento pero presenta el inconveniente de su gran complejidad matemática.

El modelo jerárquico general consta de los siguientes estados:

- Primer estado:

$$f(x | \theta, F) \quad (4.1)$$

- Segundo estado:

$$\pi_1(\theta | \mu, G) \quad (4.2)$$

- Tercer estado:

$$\pi_2(\mu, F, G)$$

El primer estado indica que los datos dependen de los parámetros de interés  $\theta$  y algún otro parámetro  $F$ . El segundo estado indica cómo varían los parámetros adicionales desconocidos  $\mu$  y  $G$ . Finalmente se incorpora un tercer estado donde se considera una distribución conjunta de los parámetros.

El interés del modelo es averiguar la media y varianza a posteriori dada la observación muestral  $\mathbf{x}$  para lo que se precisa de la distribución a posteriori de  $\theta$ , y que es (ver *Klugman (1992), capítulo 6*),

$$\pi(\theta | \mathbf{x}) = \int \int \int \pi_1(\theta | \mathbf{x}, \mu, F, G) \pi_2(\mu, F, G | \mathbf{x}) d\mu dF dG,$$

donde

$$\pi_1(\theta | \mathbf{x}, \mu, F, G) = \frac{f(\mathbf{x} | \theta, F) \pi_1(\theta | \mu, G)}{\int f(\mathbf{x} | \theta, F) \pi_1(\theta | \mu, G) d\theta}$$

$$\pi_2(\mu, F, G | \mathbf{x}) = \frac{\pi_2(\mu, F, G) \int f(\mathbf{x} | \theta, F) \pi_1(\theta | \mu, G) d\theta}{\int \int \int f(\mathbf{x} | \theta, F) \pi_1(\theta | \mu, G) \pi_2(\mu, F, G) d\mu dF dG}$$

siendo  $\pi_1(\theta \mid \mu, G)$  la distribución a priori de  $\theta$  (elegida por el actuario),  $\pi_2(\mu, F, G)$  la distribución conjunta de los parámetros implicados y  $\pi_1(\theta \mid \mathbf{x}, \mu, F, G)$  y  $\pi_2(\mu, F, G \mid \mathbf{x})$  las distribuciones a posteriori dados los datos.

De gran interés son la media y la varianza a posteriori de los elementos de  $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ . Si  $\theta_i$  es uno de esos elementos, la media y varianza a posteriori de  $\theta_i$  pueden obtenerse a partir de,

$$E(\theta_i \mid \mathbf{x}) = \int \theta_i \pi(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta,$$

$$E(\theta_i^2 \mid \mathbf{x}) = \int \theta_i^2 \pi(\theta \mid \mathbf{x}) d\theta.$$

Es obvio que el cálculo de estas integrales -múltiples- puede resultar complejo, de ahí que generalmente se impongan restricciones al modelo general para hacer el asunto más tratable, trabajándose, en el escenario bayesiano, con el *modelo jerárquico normal*.

## 4.2 El modelo jerárquico normal.

En este modelo suponemos las distribuciones en ( 4.1) y ( 4.2) normales multivariantes. A primera vista parece inapropiado considerar una distribución continua para la variable aleatoria número de siniestros; se utilizan con más frecuencia la distribución de Poisson y binomial negativa. Además para los costes totales la distribución es raramente simétrica o con números negativos.

Sin embargo hay tres argumentos para suponer normalidad:

a) El análisis se hace frecuentemente con indemnizaciones medias y no con indemnizaciones totales (o con número medio de siniestros y no con siniestros).

b) Es fácil trabajar con la distribución normal.

c) Podría darse el caso en que nuestro modelo incluya observaciones dependientes. El modelo normal multivariante es uno de los pocos en que es fácilmente tratable la dependencia.

El más sencillo de los modelo jerárquicos como dijimos antes es el denominado por *Klugman One-way*, que se corresponde en su versión clásica

con el modelo de *Bühlmann-Straub* y que puede verse en *Goodvaerts y Hogstad (1987)*. Para un seguimiento más clarificador el lector puede ver de nuevo la tabla 1.4. El modelo desarrollado por *Klugman* consta de los siguientes estados.

El primer estado consiste de  $t$  observaciones para cada uno de los  $k$  grupos. Sea  $x_{ij}$  la  $j$ -ésima observación del grupo  $i$ -ésimo. Entonces:

- Primer estado:

$$x_{ij}/\theta_i, \sigma^2 \sim N(\theta_i, \sigma^2/P_{ij}), \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad j = 1, 2, \dots, t,$$

$P_{ij}$  son valores conocidos que en la práctica suele representar el número de siniestros, aunque también son válidas otras representaciones. Se supone varianza constante,  $\sigma^2$ , por simplicidad.

- Segundo estado:

$$\theta_i/\mu, \tau^2 \sim N(\mu, \tau^2), \quad i = 1, 2, \dots, k,$$

donde  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$  son independientes dados  $\mu$  y  $\tau^2$ .

- Tercer estado:

$$\pi_2(\mu, \sigma^2, \tau^2).$$

La metodología bayesiana que nosotros adoptaremos en esta memoria diferirá sustancialmente de la adoptada por *Klugman*, y esto lo haremos así por dos razones:

1. Los resultados teóricos sobre robustez en modelos jerárquicos como ya dijimos en el capítulo 3 son pocos, y ninguno de ellos apunta en la línea de trabajo desarrollada por *Klugman*. En concreto para realizar el análisis de robustez seguiremos el trabajo de *Cano (1993)*.
2. El modelo elaborado por nosotros es más sencillo de aplicar, en el sentido de que sólo se precisarán calcular integrales numéricas sobre  $\tau^2$ , mientras que en el modelo de *Klugman* es necesario elaborar complejas integrales

múltiples. En este sentido se pronuncia *Berger (1985)*, quien además apunta la ventaja de no precisarse de la manipulación de complejas matrices.

El modelo propuesto consta de:

- Primer estado:

$$x_i \sim N(\theta_i, \sigma^2/t), \quad \sigma^2 \text{ conocida}, \quad i = 1, 2, \dots, p,$$

Este primer estado indica que las variables  $x_{ij} \sim N(\theta_i, \sigma^2)$ ; ahora bien nosotros consideraremos las variables aleatorias  $\bar{x}_i = \sum_{j=1}^t x_{ij}/t$  a las que denominaremos por simplicidad  $x_i$  y que obviamente seguirán una distribución  $N(\theta_i, \sigma^2/t)$ . Por tanto el valor observado  $\mathbf{x}$  será para nosotros la media observada para cada clase, esto es

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_p), \quad \text{con} \quad x_i = \sum_{j=1}^t x_{ij}/t.$$

- Segundo estado:

$$\theta_i \sim N(\mu, \tau^2),$$

- Tercer estado:

$$\pi(\mu, \tau^2).$$

Asumiremos también que la distribución conjunta  $\pi(\mu, \tau^2)$  se puede factorizar como

$$\pi(\mu, \tau^2) = \pi_1(\mu) \cdot \pi_2(\tau^2),$$

es decir, los parámetros son independientes, con  $\pi_1(\mu) \equiv 1$  y  $\pi_2(\tau^2) \equiv g(\tau^2)$ .

Observemos que según el resultado del corolario 1 la media a posteriori,  $\mu_i^g(\mathbf{x})$ , se puede escribir de la siguiente manera,

$$\begin{aligned}
\mu_i^g(\mathbf{x}) &= \\
& x_i - \frac{\int_0^\infty \frac{\sigma^2(x_i - \bar{x})}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\exp\{-\frac{s^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\}}{(\sigma^2 + \tau^2)^{(p-1)/2}} g(\tau^2) d\tau^2}{\int_0^\infty \frac{\exp\{-\frac{s^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\}}{(\sigma^2 + \tau^2)^{(p-1)/2}} g(\tau^2) d\tau^2} \\
&= x_i - \sigma^2(x_i - \bar{x}) \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\exp\{-\frac{s^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\}}{(\sigma^2 + \tau^2)^{(p-1)/2}} g(\tau^2) d\tau^2}{\int_0^\infty \frac{\exp\{-\frac{s^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\}}{(\sigma^2 + \tau^2)^{(p-1)/2}} g(\tau^2) d\tau^2} \\
&= Z \cdot x_i + (1 - Z) \cdot \bar{x},
\end{aligned}$$

con

$$Z = 1 - \sigma^2 \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\sigma^2 + \tau^2} \frac{\exp\{-\frac{s^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\}}{(\sigma^2 + \tau^2)^{(p-1)/2}} g(\tau^2) d\tau^2}{\int_0^\infty \frac{\exp\{-\frac{s^2}{2(\sigma^2 + \tau^2)}\}}{(\sigma^2 + \tau^2)^{(p-1)/2}} g(\tau^2) d\tau^2},$$

es decir, el estimador de credibilidad a posteriori puede escribirse como una fórmula de credibilidad, esto es una suma convexa de la prima del riesgo individual y de la del colectivo. En realidad  $Z$  es aquí lo que *Klugman* denomina *factor de credibilidad a posteriori*,  $E(Z | \mathbf{x})$ .

Obsérvese que el objetivo que se pretende alcanzar con este modelo es la obtención de la media a posteriori, luego el principio de prima a aplicar ahora es el de prima neta.

A continuación desarrollaremos dos ejemplos extraídos del libro de *Klugman (1992)*, uno simulado y el otro real. El objetivo será obtener los estimadores de credibilidad a posteriori,  $\mu_i^g(\mathbf{x})$ , y realizar un análisis comparativo con los resultados obtenidos por *Klugman* y los que se obtendrían con el modelo clásico de *Bühlmann-Straub*. En nuestro trabajo, y por simplicidad asumiremos para el cálculo de los estimadores de credibilidad a posteriori  $g(\tau^2) \equiv 1$ . Posteriormente en un análisis de sensibilidad bayesiano estudiaremos la variación de los estimadores de credibilidad a posteriori cuando  $g(\tau^2) \in \Gamma$ , siendo  $\Gamma$  una clase de distribuciones plausibles.



**Escenario 1.**

Este primer ejemplo<sup>2</sup> es artificial, en el sentido que fue simulado con el objetivo de conocer los verdaderos resultados. El ejemplo consiste en  $k = 10$  grupos con  $t = 5$  observaciones para cada uno de los grupos.  $P_{ij} = 1$  para las 50 observaciones, que se encuentran en el apéndice B. Puesto que el ejemplo está simulado, los verdaderos resultados  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{10}$  se conocen.

La observación muestral consistirá de las medias observadas para cada clase, esto es:

$$\mathbf{x} = (109.636, 101.240, 90.934, 110.048, 100.350, \\ 101.802, 106.630, 117.604, 87.472, 105.126),$$

siendo  $\bar{x} = 103.1842$ ,  $s^2 = 737.70354$ ,  $p = 10$  y  $\sigma^2 = 100/5 = 20$ .

El factor de credibilidad a posteriori es 0.810226 en nuestro modelo y 0.8218 en el modelo de Klugman. En el modelo clásico el valor de  $Z$  es 0.8129, y la media a posteriori para cada una de las clases están expuestos en la Tabla 4.1, donde también aparecen los valores del estimador de *Bühlmann-Straub* (E.B.)<sup>3</sup>.

Tabla 4.1: Estimadores de credibilidad a posteriori.

Clase	Media a posteriori en nuestro modelo	Media a posteriori de Klugman	Valor verdadero	E.B.
1	108.412	108.486	111.97	108.42
2	101.608	101.586	98.87	101.60
3	93.258	93.117	90.98	93.22
4	108.745	109.646	108.44	109.57
5	100.887	100.855	99.06	100.88
6	102.064	102.048	95.44	102.06
7	105.976	106.016	105.09	105.98
8	114.867	115.034	111.99	114.90
9	90.453	90.271	95.99	90.41
10	104.757	104.780	105.60	104.76

<sup>2</sup>El ejemplo está extraído de *Klugman (1992)*, pp.115-124.

<sup>3</sup>No confundir E.B., estimador de Bühlmann-Straub con EB, esperanza de  $B = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2}$  respecto a la distribución  $g(\tau^2 | \mathbf{x})$ .

A continuación calcularemos la varianza a posteriori que nos permitirá obtener los intervalos de confianza. Para el cálculo de la varianza utilizamos el resultado del corolario 1, según el cual

$$V^g(\mathbf{x}) = \sigma^2 I - \sigma^2 [EB] \left( I - \frac{1}{p}(\mathbf{1}) \right) + ([EB^2] - [EB]^2) (\mathbf{x} - \bar{x} \cdot \mathbf{1})(\mathbf{x} - \bar{x} \cdot \mathbf{1})^t.$$

En nuestro caso

$$EB = E^{g(\tau^2|\mathbf{x})} \left[ \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right] = 0.189774,$$

$$EB^2 = E^{g(\tau^2|\mathbf{x})} \left[ \left( \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \tau^2} \right)^2 \right] = 0.0463006,$$

luego

$$V^g(\mathbf{x}) = 20I - 3.8 \left( I - \frac{1}{10}(\mathbf{1}) \right) + 0.01028(\mathbf{x} - 103.1842 \cdot \mathbf{1})(\mathbf{x} - 103.1842 \cdot \mathbf{1})^t$$

$$= 16.2I + 0.38(\mathbf{1}) + 0.01028(\mathbf{x} - 103.1842 \cdot \mathbf{1})(\mathbf{x} - 103.1842 \cdot \mathbf{1})^t,$$

por tanto

$$V_i^g(\mathbf{x}) = 16.58 + 0.01028(\mathbf{x}_i - 103.1842)^2.$$

En la siguiente tabla se recogen las varianzas a posteriori para cada una de las clases así como los intervalos de confianza al 90% para nuestro modelo y el de Klugman.

Tabla 4.2: Varianzas a posteriori e intervalos de confianza.

Clase	$V_i^g(x)$	Intervalos	Varianza de Klugman	Intervalo de Klugman
1	17.008	102.851,116.420	16.075	101.89,115.081
2	16.618	94.534,107.945	15.646	95.079,108.093
3	18.122	83.931,97.936	17.304	86.274,99.960
4	17.064	103.252,116.843	16.304	103.004,116.288
5	16.662	93.635,107.064	15.694	94.338,107.371
6	16.600	95.099,108.504	15.624	95.546,108.550
7	16.702	99.907,113.352	15.737	99.490,112.540
8	18.717	110.487,124.720	17.961	108.062,122.005
9	19.117	80.279,94.664	18.402	83.215,97.328
10	16.618	98.420,111.831	15.645	98.273,111.286

Utilizando los resultados ( 2.4) y ( 2.5) obtenemos los intervalos de variación del estimador de credibilidad,  $\mu_i^g(\mathbf{x})$ , a posteriori, y que aparecen en la tabla 4.3

Tabla 4.3: Intervalo de variación del estimador de credibilidad a posteriori. Escenario 1. Casos con  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_U$ .

Todas las distribuciones, $\Gamma_A$										
Clase	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Infimo	103.184	101.240	90.934	103.184	100.350	101.802	103.184	103.184	87.472	103.184
Supremo	109.636	103.184	103.184	110.048	103.184	103.184	106.630	117.604	103.184	105.126
R.S.	2.97	0.95	6.56	3.15	1.40	0.67	1.62	6.27	8.68	0.92

Unimodalidad, $\Gamma_U$										
Clase	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Infimo	104.924	101.608	93.252	105.035	100.886	102.064	104.113	107.072	90.446	103.708
Supremo	108.415	102.66	99.881	108.749	102.42	102.811	105.978	114.874	98.947	104.758
R.S.	1.61	0.51	3.55	1.70	0.76	0.36	0.88	3.40	4.70	0.50

Ahora utilizando el resultado ( 2.6) obtenemos el intervalo de variación para la clase de  $\varepsilon$ -contaminaciones con la clase contaminante de *todas las distribuciones*,  $\Gamma_\varepsilon^U$ .

Tabla 4.4: Intervalo de variación del estimador de credibilidad a posteriori. Escenario 1. Caso con  $\Gamma_\epsilon^U$ .

$\epsilon$		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
Clase 1	Infimo	108.4113	108.410	108.410	108.410	108.409	108.409	108.408
	Supremo	108.4120	108.412	108.412	108.412	108.4121	108.4122	108.4124
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Clase 2	Infimo	101.608	101.608	101.608	101.608	101.608	101.608	101.608
	Supremo	101.609	101.609	101.6092	101.6093	101.6095	101.6097	101.610
	R.S.	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
Clase 3	Infimo	93.25	93.25	93.25	93.25	93.25	93.25	93.25
	Supremo	93.26	93.26	93.26	93.26	93.26	93.26	93.26
	R.S.	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
Clase 4	Infimo	108.7	108.7	108.7	108.7	108.7	108.7	108.7
	Supremo	108.745	108.744	108.744	108.743	108.743	108.742	108.742
	R.S.	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
Clase 5	Infimo	100.887	100.887	100.887	100.887	100.887	100.887	100.887
	Supremo	100.9	100.9	100.9	100.9	100.9	100.9	100.9
	R.S.	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
Clase 6	Infimo	102.064	102.064	102.064	102.064	102.064	102.064	102.064
	Supremo	102.1	102.1	102.1	102.1	102.1	102.1	102.1
	R.S.	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017	0.017
Clase 7	Infimo	105.975	105.975	105.975	105.975	105.975	105.974	105.974
	Supremo	106	106	106	106	106	106	106
	R.S.	0.011	0.011	0.011	0.011	0.011	0.012	0.012
Clase 8	Infimo	114.866	114.866	114.865	114.864	114.836	114.861	114.860
	Supremo	114.9	114.9	114.9	114.9	114.9	114.9	114.9
	R.S.	0.014	0.014	0.015	0.015	0.016	0.017	0.017
Clase 9	Infimo	90.453	90.453	90.453	90.452	90.452	90.452	90.451
	Supremo	90.46	90.46	90.46	90.46	90.46	90.46	90.46
	R.S.	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.003	0.005
Clase 10	Infimo	104.757	104.757	104.757	104.757	104.756	104.756	104.756
	Supremo	104.8	104.8	104.8	104.8	104.8	104.8	104.8
	R.S.	0.020	0.020	0.020	0.020	0.021	0.021	0.021

A la vista de la tabla 4.1 se desprende que los estimadores de credibilidad de nuestro modelo están más próximos al E.B. para todas las clases excepto para la clase 4 que está más próximo el de Klugman. Esto era de esperar, pues el factor de credibilidad a posteriori en nuestro modelo está más cercano al factor de credibilidad clásico que el de Klugman.

Si comparamos con el verdadero valor del estimador de credibilidad, el modelo de Klugman se acerca más a este para las clases 1,2,3,5,6 y 10 y el nuestro para las restantes clases.

A la vista de la tabla 4.2 se desprende que los intervalos de confianza contienen al E.B. en los dos modelos y para todas las clases. Los intervalos de confianza en nuestro modelo contienen a los verdaderos valores en todas las clases salvo para la 9, que es también la que presenta mayor varianza. Los intervalos de confianza de Klugman contienen a los verdaderos valores para todas las clases excepto para la clase 6.

Para la clase  $\Gamma_A$  el modelo se manifiesta, en general para todas las clases, bastante robusto con variación del R.S. desde el 0.67% para la clase 6 hasta el 8.68% para la 9. Observemos que los intervalos de variación del estimador de credibilidad a posteriori contienen al E.B. para todas las clases y al verdadero valor para las clases 3,4,7,8 y 9. Para la clase  $\Gamma_U$  el factor R.S., como era de esperar, disminuye, y lo hace casi a la mitad. En este caso el intervalo de variación no contiene al E.B. en ninguna clase, aunque todavía contiene al verdadero valor para las clases 4,7,8 y 9.

Para las clases  $\Gamma_\varepsilon^A$  el factor R.S. es prácticamente cero para todas las clases y el modelo es robusto. Así y todo los intervalos de variación contienen al E.B. para las clases 7 y 10. Los intervalos de variación para la clase  $\Gamma_\varepsilon^U$  no se han reflejado pues los paquetes MATHEMATICA y MATLAB proporcionan el mismo valor para el ínfimo y supremo.

## Escenario 2.

Este ejemplo<sup>4</sup> está basado en datos reales proporcionados a *Stuart A. Klugman* por el National Council on Compensation Insurance, y correspondientes a un Estado norteamericano; los mismos se encuentran en

<sup>4</sup>Extraído de *Klugman (1992) pp.125-129.*

el apéndice C, donde se recogen datos de 133 clases de empleos sobre un período de siete años. Los datos  $Y_{ij}$  son número de siniestros que provocaron incapacidad parcial permanente.  $P_{ij}$  representa los costes o pagos graduados que fueron corregidos en términos inflacionarios para representar unidades monetarias constantes. Los datos utilizados por  $x_{ij}$  son  $Y_{ij}/P_{ij}$ , el número de siniestros relativo por cada clase y año.

Por lo demás solamente los primeros seis de los siete años se utilizarán, con el objetivo de estimar el número de siniestros para el séptimo año para las clases 4, 11, 112, 70, 20 y 89 (como hace *Klugman*). Al igual que en el escenario 1 los datos que utilizaremos será la media para cada clase, aunque en este caso para los primeros seis años, esto es,  $x_i \equiv \bar{x}_i = (\sum_{j=1}^6 Y_{ij}/P_{ij})/t$ ,  $i = 1, 2, \dots, k = 133$ .

Hay que tener en cuenta que de las 133 clases sólo se han tomado las 130 para las que  $P_i = \sum P_{ij} > 0$ , es decir se excluyen las clases 7,18 y 128. Además se excluyen también del estudio los 13 años para los que no se producen pagos<sup>5</sup> quedándonos con un total de 767 observaciones ( $130 \times 6 - 13$ ). La muestra  $\mathbf{x}$  obtenida finalmente aparece recogida en el apéndice D.

Los tres estados del modelo son:

- Primer estado:

$$x_i \sim N(\theta_i, \sigma^2/t), \quad \sigma^2 = 0.002.$$

- Segundo estado:

$$\theta_i \sim N(\mu, \tau^2)$$

- Tercer estado:

$$\pi(\mu, \tau^2), \quad \pi(\mu) \equiv 1, \pi(\tau^2) \equiv 1.$$

Ahora  $p = 130$ ,  $\bar{x} = 0.05317$  y  $s^2 = 1.89251804$ .

El factor de credibilidad a posteriori es  $E[Z | \mathbf{x}] = 0.977631$ .

Los estimadores de credibilidad a posteriori para nuestro modelo así como los obtenidos por *Klugman* y los E.B. se exponen en la tabla 4.5.

<sup>5</sup>Clase 4: Año 1,2,3,5 y 6.

Clase 54: Años 1,2,3,5 y 6.

Clase 61: Años 1 y 2.

Clase 86: Año 1.

El siguiente paso consiste en predecir el número de siniestros para el séptimo año. Para el séptimo año en la clase  $i$  el número esperado de siniestros es  $P_{i7} \cdot \mu_i^g(\mathbf{x})$ , es decir  $P_{i7}$  veces el estimador puntual.

Para el cálculo de la varianza hay que tener en cuenta que

$$Var_i^g(P_{i7} \cdot \mathbf{x}) = P_{i7}^2 \cdot Var_i^g(\mathbf{x})$$

y los cálculos oportunos proporcionan  $EB = 0.0223688$ ,  $EB^2 = 0.000508242$ , con lo que

$$Var_i^g(\mathbf{x}) = 3.26 \cdot 10^{-4} + 7.87 \cdot 10^{-6}(\mathbf{x}_i - 0.05317)^2$$

En la tabla 4.8 se recogen los intervalos de variación del estimador de credibilidad a posteriori para las clases  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_U$  para este segundo ejemplo.

A la vista de la tabla 4.5 observamos que el estimador de credibilidad a posteriori está más próximo al E.B. en nuestro modelo para las clases 11 y 20, mientras que para el resto de las clases está más próximo el estimador de Klugman. En la tabla 4.6 se observa que el número de siniestros predicho en nuestro modelo,  $P_{i7} \cdot \mu_i^g(\mathbf{x})$  está más próximo al verdadero valor,  $y_{i7}$ , para las clases 70 y 89, mientras que el de Klugman para las clases 112 y 20. Ambos modelos coinciden en las clases 4 y 11. Sin embargo el valor que prevee el E.B. está más cercano a nuestro modelo en la clase 112 y al de Klugman en la 70, 20 y 89.

Los intervalos de confianza, que pueden verse en la tablas 4.7 contienen al verdadero valor salvo para la clase 89 (en el modelo de Klugman ocurre igual). De nuevo el intervalo de confianza para la clase 89 no contiene al E.B.

Solamente se han considerado contaminaciones para las clases  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_U$ , ya que las restantes proporcionan R.S.= 0. El modelo para ambas clases y como puede verse en la tabla 4.8 es poco robusto, siendo R.S.= 2235.25 para las clases ocupacionales 4 y 70 en el modelo con  $\Gamma_A$  y disminuyendo a 35.51 para  $\Gamma_U$ .

Salvo para la clase 11 los intervalos de variación del estimador de credibilidad a posteriori contienen al E.B. para  $\Gamma_A$  y ninguno para  $\Gamma_U$ .

Tabla 4.5: Estimadores de credibilidad a posteriori. Escenario 2.

Clase	$\mathbf{x}_i$	Media a posteriori en nuestro modelo	Media a posteriori de Klugman	E.B.
4	0	0.00118935	0.04045	0.03949
11	0.044	0.0442051	0.04422	0.04345
112	0.00189	0.00303707	0.00193	0.00201
70	0	0.00118935	0.01142	0.02059
20	0.03112	0.0316132	0.03151	0.03164
89	0.42415	0.415852	0.36969	0.29896

Tabla 4.6: Frecuencias predichas. Escenario 2.

Clase	$P_{i7}$	$y_{i7}$	$P_{i7} \cdot \mu_i^g(\mathbf{x})$	Klugman	E.B.
4	0.0	0	0	0	0
11	229.83	8	10.16	10.16	7.37
112	18809.67	45	57.12	36.34	66.82
70	54.81	0	0.065	0.63	3.51
20	1315.37	22	41.85	41.45	17.04
89	79.63	40	33.11	29.42	4.23

Tabla 4.7: Varianzas e intervalos de confianza al 90%. Escenario 2.

Clase	$P_{i7}^2 \cdot Var_i^g(\mathbf{x})$	Intervalo
4	0	0,0
11	17.22	3.33,16.98
112	115347.32	-501.56,615.80
70	0.97	-1.55,1.68
20	564.05	2.51,80.64
89	2.07	30.74,35.47



Tabla 4.8: Intervalo de variación del estimador de credibilidad a posteriori.  
Escenario 2. Casos con  $\Gamma_A$  y  $\Gamma_U$ .

Todas las distribuciones, $\Gamma_A$						
Clase	4	11	112	70	20	89
Ínfimo	0	0.044	0.00189	0	0.03112	0.05317
Supremo	0.05317	0.05317	0.05317	0.05317	0.05317	0.42415
R.S.	2235.25	10.37	1264.88	2235.25	34.87	44.60

Unimodalidad, $\Gamma_U$						
Clase	4	11	112	70	20	89
Ínfimo	0.000344544	0.0440594	0.0022223	0.000344544	0.0312629	0.415852
Supremo	0.00118935	0.0442051	0.00303707	0.00118935	0.0316132	0.421746
R.S.	35.51	0.16	13.41	35.51	0.55	0.70

# Capítulo 5

## Conclusiones y líneas abiertas.

### 5.1 Conclusiones.

La prima a priori constituye, como dice *Freifelder*, la mejor estimación de la verdadera prima (desconocida) cuando la compañía aseguradora no dispone de experiencia pasada para el sujeto que contrata por vez primera una póliza.

Si esta situación no se da, es decir, si la compañía dispone de la experiencia de siniestralidad del asegurado (número de siniestros o indemnización), bien porque ya contrató con la compañía en los períodos precedentes o porque procediendo de otra compañía esta le proporcione el historial correspondiente, la mejor estimación de la verdadera prima es la prima a posteriori.

Para el cálculo de esta ya se ha comentado en numerosas ocasiones en la Memoria se precisa de la especificación por parte del actuario de una distribución a priori del parámetro  $\theta$ . Este parámetro, como ya hemos reflejado, es la cantidad media de indemnización o el número medio de siniestros. La especificación de la distribución a priori constituye el punto de partida básico del análisis bayesiano.

Sin embargo, el actuario en numerosas ocasiones tendrá dificultad en especificar una única distribución a priori, de ahí que se incorpore el análisis de sensibilidad bayesiano (robustez bayesiana).

Este análisis tiene el objetivo de medir las fluctuaciones que con respecto a la prima a posteriori se produce cuando el actuario manifiesta imprecisión en la especificación de una única distribución a priori, incorporando toda una

clase.

Los siguientes comentarios recogen las conclusiones más destacadas de la Memoria, todas ellas aparecen más minuciosamente desarrolladas en los capítulos 3 y 4.

Los diversos modelos para estudiar robustez que se han usado en esta Memoria son los actualmente más usados en análisis bayesiano porque son muy intuitivos y porque permiten resultados técnicos apreciables. Insistimos en que un modelo para estudiar robustez no es cambiar un modelo bayesiano clásico por otro modelo. Un modelo para estudiar robustez es una forma de alejarse de la rigidez que supone un modelo bayesiano clásico, es una posibilidad para flexibilizar las *entradas* al sistema. Esto significa que los resultados de un análisis de robustez no admiten una interpretación en términos similares a los del análisis bayesiano clásico. Por ejemplo, la obtención de resultados para valores diversos de  $\varepsilon$  (grado de contaminación) nos sirve para obtener una idea general del comportamiento cuando *nos alejamos de o cuando aumentan nuestras dudas*. Jamás conocemos un valor concreto para  $\varepsilon$ , por tanto jamás la conclusión para un  $\varepsilon$  singular es singularmente significativa.

Conclusiones generales en cualquier análisis de robustez bayesiano y que por supuesto aquí también se aprecian son:

- Para clases de contaminación, un aumento del grado de contaminación reflejado por un crecimiento del valor de  $\varepsilon$  supone una disminución de la robustez.
- La consideración sucesiva de clases contaminantes más pequeñas supone sistemáticamente un aumento de robustez.
- La consideración de observaciones muestrales en claro conflicto con la información a priori considerada implica una disminución de robustez.

Conclusiones particulares para cada una de las situaciones estudiadas en esta Memoria son las siguientes:

- Para el modelo colectivo no compuesto se aprecia en general poca robustez para cualquiera de los principios de cálculo de primas considerados. De los distintos escenarios planteados el *binomial-beta* es el menos robusto de todos los estudiado, el escenario *exponencial-gamma* le sigue en cuanto a poca robustez.

Comparando los distintos principios de cálculo de primas entre sí, el que se revela más robusto, de entre los examinados, es el de varianza. Los otros tres principios son menos robustos y se aprecian pocas diferencias entre ellos.

- Para el modelo colectivo compuesto se aprecia para todos los casos considerados un grado de robustez notable y desde luego muy superior al caso anterior. A su vez se observa que la sensibilidad relativa (factor R.S.) es prácticamente la misma para los distintos principios de cálculo de primas estudiados.

- Para el modelo jerárquico se han considerado dos escenarios.

En el primero de ellos se observa una robustez muy notable para las dos clases contaminantes que se consideran. Observemos que una de ellas era la clases de *todas las distribuciones*.

En el segundo de los escenarios propuestos hay una menor robustez observada cuando la clase considerada es  $\Gamma_A$ , clase de todas las distribuciones, produciéndose un extraordinario aumento de robustez cuando se pasa a la clase  $\Gamma_U$ .

Finalmente destacamos para insistir en ello que las conclusiones que desde un punto de vista bayesiano enunciamos como *ausencia de robustez* significan desde el punto de vista del usuario (el actuario en este caso) una postura extraordinariamente prudente a la hora de proceder a la tarificación.

Concretando, el análisis de robustez de los diversos procedimientos de cálculo de primas, que modestamente se ha iniciado en esta Memoria, debe conducir a las siguientes indicaciones que pueden ser muy útiles para propósitos prácticos:

- Algunos principios de cálculo de primas se revelarán como muy inestables, o poco robustos, haciendo por tanto su uso poco aconsejable. Esto puede establecer una jerarquización entre los distintos principios de cálculo de primas.
- De los distintos escenarios que son usuales en cálculos actuariales, entendiéndose por tales, un par *verosimilitud-distribución a priori*, también se revelarán algunos más inestables que otros. Esto implicará que los

escenarios poco robustos sólo deben usarse si el actuario está muy seguro de que las modelizaciones probabilísticas implicadas son muy ajustadas a la realidad del problema que le ocupa. En otro caso debe acudir a escenarios más robustos.

A continuación se exponen una serie de puntos que entendemos pueden ser objeto de futuras investigaciones.

## 5.2 Sobre la distribución del coste total.

Ya indicamos que lo ideal cuando se trabaja en T.C. es hacerlo con la distribución del coste total, obtenida componiendo las distribuciones del número de siniestros y del coste de los mismos. El modelo compuesto desarrollado en esta Memoria ha supuesto la distribución de Poisson para el número de siniestros y exponencial para el coste de los mismos, siguiendo los trabajos de *Seal (1969)*, *Gerber (1979)*, *Freifelder (1974)* y *Lemaire y Zi (1994)*. Sin embargo en otros trabajos (*Goodvaerts y Hoogstad (1987)*, *Schröter (1990)* y *Nieto y Vegas (1993)*) también se consideran los casos binomial-geométrica, Poisson-Pareto y binomial negativa-exponencial, a los que, sin duda, le son aplicables la metodología seguida en esta Memoria (especialmente en el capítulo 3). Cabría preguntarse si las conclusiones obtenidas para el modelo Poisson-exponencial se mantendrían para aquellos o habrían diferencias sustanciales.

## 5.3 Sobre la clase $\Gamma$ .

El análisis de sensibilidad bayesiano en T.C. es algo novedoso, y prueba de ello es la escasa publicación de artículos relacionado con esta materia.

*Heilmann y Schröter (1986)* utilizan un concepto de robustez que no sigue la línea de *Sivaganesan, Berger y otros*, y que ha sido la adoptada por nosotros.

*Eichenauer, Lehn y Retrig (1988)* realizan un análisis de robustez basado en el conocimiento de uno o dos momentos.

*Makov (1995)* realiza un análisis de robustez pero de la función de pérdida que da origen al principio de cálculo de prima en un trabajo fundamentalmente teórico.

Por último, *Rios, M., Martín, Rios, D. y Ruggeri (1996)* utilizan técnicas de robustez bayesiana basándose en el conocimiento de ciertos cuantiles de la distribución del número de siniestros.

Esta última línea de trabajo, que es muy intuitiva y con técnicas de aplicación factibles, es susceptible de ser aplicada al modelo colectivo desarrollado en esta Memoria en el capítulo 3.

## 5.4 Sobre los principios de cálculo de primas.

Los principios de cálculo de primas utilizados en esta Memoria no son los únicos existentes. Cabe también hablar de los principios de desviación típica, pérdida maximal, del valor esperado, etc. (ver *Gerber (1979)* para más aclaración).

Es evidente que un estudio similar al desarrollado en esta Memoria en el capítulo 3 para los principios de prima neta, exponencial, Esscher y de varianza es aplicable a estos otros principios y que son utilizados en Matemática Actuarial (*Heilmann y Schröter (1987)*, *Heilmann (1989)* y *Hürlimann (1994)*).

## 5.5 Sobre la consideración de un modelo no estacionario.

A lo largo de todo este trabajo se ha considerado el proceso estacionario; es decir, las probabilidades de los sucesos que dan origen al número de siniestros o a la indemnización de los mismos no cambian con el transcurso del tiempo.

Esta suposición, que en principio parece un poco fuerte, es habitual en T.C. La razón de ello es que por un lado, considerar el proceso no estacionario complica sobremanera el problema (la dificultad en un análisis de robustez sería aún mayor), mientras que por otro lado se admite, y esto no es muy descabellado, que las circunstancias que rodean a los fenómenos aleatorios en seguros no cambian significativamente cuando el tiempo considerado es pequeño.

Sin embargo mediante la utilización de la matemática de los procesos estocásticos puede llevarse a cabo un análisis similar, aunque mucho más complejo, considerando el proceso no estacionario, y en la línea de *Gerber (1979)* y *Nieto y Vegas (1993)*.

## 5.6 Sobre el modelo jerárquico.

Quizás este modelo constituye el más abierto y susceptible de ser estudiado.

Nosotros destacaríamos dos puntos fundamentales, ambos encaminados por la vía teórica.

- a) Posibilidad de desarrollar en el modelo Normal-Normal la media a posteriori de una función de  $\theta_i$ , y no exclusivamente de  $\theta_i$ , con lo que quedaría abierta la posibilidad de aplicar otros principios de cálculo de primas que no sea el de prima neta a este modelo.
- b) Extensión del modelo a otros casos que no sean el Normal-Normal.

## 5.7 Sobre las propiedades.

No podemos asegurar de momento si cualquier valor de la prima a posteriori perteneciente al intervalo  $\left(\inf_{\pi \in \Gamma_e} P^*, \sup_{\pi \in \Gamma_e} P^*\right)$  cumple determinadas propiedades de las deseables para un principio de cálculo de prima. Si la longitud del intervalo anterior es pequeña, y se probase lo anterior, quizás el actuario se sentiría tranquilo cobrando como valor de la prima cualquiera que estuviese por encima o por abajo de  $P^*$ .

Esta política de tarificación podría solventarle a la compañía problemas de competitividad que se avecinan en este sector, y que ya comentamos en el capítulo 1.

Esto constituye una línea de trabajo que tenemos bastante avanzada, pero aún sin concluir.





## Apéndice A

### Cálculo de la densidad predictiva en el caso normal-normal.

La densidad predictiva de  $\mathbf{x}$  dada  $\pi_0$  es,

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x} | \pi_0) &= \int_{\Theta} f(\mathbf{x} | \theta) \pi_0(\theta) d\theta \\ &= \int_{\Theta} \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{\sum(x_i - \theta)^2}{2\sigma^2}\right\} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\theta - a)^2}{2\tau^2}\right\} d\theta. \end{aligned}$$

Ahora utilizando la identidad

$$\sum(x_i - \theta)^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - \theta)^2,$$

la densidad predictiva,  $m(\mathbf{x} | \pi_0)$ , se puede escribir como

$$\begin{aligned} m(\mathbf{x} | \pi_0) &= \\ &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\} \int_{\Theta} \exp\left\{-\frac{\tau^2 n(\bar{x} - \theta)^2 + \sigma^2(\theta - a)^2}{2\sigma^2\tau^2}\right\} d\theta \\ &= k \cdot \int_{\Theta} \exp\left\{-\frac{\tau^2 n(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\theta + \theta^2) + \sigma^2(\theta^2 - 2a\theta + a^2)}{2\sigma^2\tau^2}\right\} d\theta, \end{aligned}$$

donde

$$k = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \frac{1}{\tau\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2}\right\},$$

luego

$$\begin{aligned}
 m(\mathbf{x} \mid \pi_0) &= \\
 &= k \cdot \int_{\Theta} \exp \left\{ -\frac{(\tau^2 n + \sigma^2)\theta^2 - (2\tau^2 n\bar{x} + 2a\sigma^2)\theta + (\tau^2 n\bar{x}^2 + a^2\sigma^2)}{2\sigma^2\tau^2} \right\} \\
 &= k \cdot \int_{\Theta} \exp \left\{ -\frac{\theta^2 - \frac{2\tau^2 n\bar{x} + 2a\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}\theta + \frac{\tau^2 n\bar{x}^2 + a^2\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}}{\frac{2\sigma^2\tau^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \right\} d\theta \\
 &= k \cdot \int_{\Theta} \exp \left\{ -\frac{\left(\theta - \frac{\tau^2 n\bar{x} + a\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}\right)^2 + \frac{\tau^2 n\bar{x}^2 + a^2\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2} - \left(\frac{\tau^2 n\bar{x} + a\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2\tau^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \right\} d\theta \\
 &= k' \int_{\Theta} \exp \left\{ -\frac{\left(\theta - \frac{\tau^2 n\bar{x} + a\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2\tau^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \right\} d\theta,
 \end{aligned}$$

con

$$k' = k \cdot \exp \left\{ \frac{\frac{\tau^2 n\bar{x}^2 + a^2\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2} - \left(\frac{\tau^2 n\bar{x} + a\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2\tau^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \right\}.$$

Así,

$$\begin{aligned}
 m(\mathbf{x} \mid \pi_0) &= \\
 &= k' \frac{\sigma\tau\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}} \int_{\Theta} \frac{1}{\frac{\sigma\tau\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}}} \exp \left\{ -\frac{\left(\theta - \frac{\tau^2 n\bar{x} + a\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2\tau^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \right\} d\theta \\
 &= k' \frac{\sigma\tau\sqrt{2\pi}}{\sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}}.
 \end{aligned}$$

Sustituyendo ahora  $k'$  por su valor, resulta,

$$\begin{aligned}
 m(\mathbf{x} \mid \pi_0) &= \\
 &= \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \frac{\sigma}{\sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}} \exp \left\{ \frac{\frac{\tau^2 n\bar{x}^2 + a^2\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2} - \left(\frac{\tau^2 n\bar{x} + a\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2\tau^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \right\} \\
 &\cdot \exp \left\{ -\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\} \\
 &= \frac{\sigma}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}} \exp \left\{ \frac{\frac{\tau^2 n\bar{x}^2 + a^2\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2} - \left(\frac{\tau^2 n\bar{x} + a\sigma^2}{\tau^2 n + \sigma^2}\right)^2}{\frac{2\sigma^2\tau^2}{\tau^2 n + \sigma^2}} \right\}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \exp \left\{ -\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\} \\ = & \frac{\sigma}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n \sqrt{\tau^2 n + \sigma^2}} \exp \left\{ -\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{2\sigma^2} \right\} \exp \left\{ \frac{n[a(a - 2\bar{x}) + \bar{x}^2]}{2(\tau^2 n + \sigma^2)} \right\}. \end{aligned}$$



## Apéndice B

### Datos del escenario 1. Modelo jerárquico.

Clase	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Período										
1	124.93	97.16	103.57	119.53	95.68	102.04	112.71	119.16	81.71	102.51
2	110.67	89.28	86.82	125.92	110.43	93.60	101.64	111.54	90.45	123.81
3	106.93	102.88	92.49	98.05	83.59	106.12	106.50	127.24	91.51	113.83
4	104.05	111.10	87.99	117.57	110.54	98.70	111.71	115.02	84.74	94.97
5	101.60	105.78	83.80	94.17	101.51	108.55	100.59	115.06	88.95	90.51
$\theta_i$	111.97	98.87	90.98	108.44	99.06	95.44	105.09	111.99	95.99	105.60
$\bar{X}_i$	109.636	101.240	90.934	111.048	100.350	101.802	106.630	117.604	87.472	105.126



# Apéndice C

## Datos del escenario 2. Modelo jerárquico.

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
1	1	32.322	1	5	1	310.389	15
1	2	33.779	4	5	2	292.464	10
1	3	43.548	3	5	3	262.560	18
1	4	46.686	5	5	4	273.257	25
1	5	34.713	1	5	5	372.730	27
1	6	32.857	3	5	6	263.443	20
1	7	36.600	4	5	7	355.826	28
2	1	45.995	3	6	1	291.784	27
2	2	37.888	1	6	2	267.439	44
2	3	34.581	0	6	3	288.555	40
2	4	28.298	0	6	4	308.364	31
2	5	45.265	2	6	5	387.095	40
2	6	39.945	0	6	6	351.445	34
2	7	39.322	4	6	7	342.518	37
3	1	289.047	5	7	1	0.000	0
3	2	392.176	8	7	2	0.000	0
3	3	368.982	8	7	3	0.000	0
3	4	323.770	8	7	4	0.000	0
3	5	385.222	16	7	5	0.000	0
3	6	346.390	8	7	6	0.000	0
3	7	324.132	9	7	7	0.000	0
4	1	0.000	0	8	1	41.403	3
4	2	0.000	0	8	2	34.066	11
4	3	0.000	0	8	3	32.729	4
4	4	0.037	0	8	4	32.235	0
4	5	0.000	0	8	5	32.777	2
4	6	0.000	0	8	6	28.620	4
4	7	0.000	0	8	7	24.263	1



Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
9	1	6.452	0	15	1	215.898	11
9	2	6.927	1	15	2	224.229	11
9	3	5.851	0	15	3	224.306	10
9	4	3.033	1	15	4	212.232	6
9	5	1.787	0	15	5	245.198	11
9	6	1.074	1	15	6	203.698	16
9	7	0.685	0	15	7	210.496	15
10	1	537.311	11	16	1	57.265	4
10	2	569.041	12	16	2	62.662	3
10	3	597.146	15	16	3	66.984	6
10	4	570.295	15	16	4	63.211	3
10	5	1116.750	18	16	5	77.680	4
10	6	774.454	10	16	6	61.944	3
10	7	534.953	11	16	7	44.195	3
11	1	149.683	6	17	1	347.835	22
11	2	157.947	6	17	2	326.396	7
11	3	174.549	5	17	3	307.978	13
11	4	181.317	10	17	4	350.914	20
11	5	202.066	13	17	5	546.047	23
11	6	187.564	7	17	6	410.980	8
11	7	229.830	8	17	7	377.287	18
12	1	609.467	20	18	1	0.000	0
12	2	645.375	20	18	2	0.000	0
12	3	667.384	27	18	3	0.000	0
12	4	573.144	15	18	4	0.000	0
12	5	782.643	38	18	5	0.000	0
12	6	478.749	8	18	6	0.000	0
12	7	454.967	13	18	7	0.000	0
13	1	120.027	0	19	1	77.909	3
13	2	131.020	1	19	2	78.925	0
13	3	161.145	8	19	3	77.558	1
13	4	182.135	5	19	4	69.525	1
13	5	276.520	11	19	5	65.972	0
13	6	158.310	2	19	6	63.274	0
13	7	168.420	7	19	7	75.335	2
14	1	196.722	13	20	1	1787.463	50
14	2	209.923	12	20	2	2027.230	90
14	3	196.199	13	20	3	1853.812	54
14	4	188.820	14	20	4	1742.135	63
14	5	202.807	19	20	5	2119.499	56
14	6	180.979	8	20	6	1545.169	35
14	7	195.628	6	20	7	1315.368	22

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
21	1	258.885	10	27	1	131.306	1
21	2	314.825	10	27	2	130.015	2
21	3	299.999	10	27	3	138.982	1
21	4	314.081	11	27	4	131.359	5
21	5	258.487	17	27	5	187.921	6
21	6	235.082	8	27	6	148.775	3
21	7	230.142	8	27	7	134.179	3
22	1	86.381	4	28	1	103.473	3
22	2	95.036	4	28	2	102.280	0
22	3	134.285	4	28	3	111.964	1
22	4	113.491	8	28	4	115.853	2
22	5	141.717	0	28	5	164.759	3
22	6	128.956	0	28	6	138.420	3
22	7	105.489	1	28	7	123.096	0
23	1	766.953	7	29	1	129.504	5
23	2	912.516	8	29	2	150.853	13
23	3	866.413	9	29	3	180.207	8
23	4	898.687	15	29	4	226.038	21
23	5	1806.752	34	29	5	499.272	33
23	6	1018.684	14	29	6	344.642	13
23	7	984.843	11	29	7	436.146	21
24	1	62.153	1	30	1	18.708	0
24	2	84.116	1	30	2	16.761	2
24	3	75.524	1	30	3	9.341	0
24	4	109.237	1	30	4	11.269	0
24	5	119.034	2	30	5	2.485	0
24	6	116.794	1	30	6	2.056	0
24	7	136.571	3	30	7	1.556	0
25	1	3431.494	59	31	1	133.124	6
25	2	3882.069	68	31	2	156.835	13
25	3	3805.563	76	31	3	256.429	20
25	4	3919.527	77	31	4	253.184	9
25	5	4352.809	94	31	5	157.622	12
25	6	3949.550	73	31	6	75.804	2
25	7	3927.784	73	31	7	71.884	4
26	1	32.582	2	32	1	220.004	13
26	2	24.922	2	32	2	206.989	15
26	3	30.317	2	32	3	222.724	15
26	4	29.732	2	32	4	268.898	12
26	5	49.201	0	32	5	291.268	39
26	6	34.379	4	32	6	290.797	22
26	7	21.536	0	32	7	244.777	20

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
33	1	3.769	0	39	1	239.966	26
33	2	1.985	0	39	2	242.634	27
33	3	3.108	0	39	3	295.803	31
33	4	3.046	0	39	4	281.269	25
33	5	14.316	0	39	5	376.989	36
33	6	10.908	1	39	6	234.967	20
33	7	10.516	0	39	7	218.695	18
34	1	283.926	8	40	1	29.923	1
34	2	217.928	15	40	2	33.448	3
34	3	229.275	18	40	3	32.704	2
34	4	224.755	0	40	4	40.210	2
34	5	427.331	4	40	5	53.806	0
34	6	384.840	1	40	6	45.562	1
34	7	420.079	1	40	7	45.396	0
35	1	9.159	0	41	1	1100.645	54
35	2	4.492	0	41	2	1241.328	54
35	3	7.229	0	41	3	1185.711	48
35	4	9.169	0	41	4	1251.523	35
35	5	8.106	0	41	5	1420.391	44
35	6	12.594	0	41	6	1281.866	82
35	7	8.913	0	41	7	1170.673	30
36	1	981.952	22	42	1	43.101	1
36	2	527.044	17	42	2	34.826	0
36	3	533.930	21	42	3	47.346	2
36	4	451.839	19	42	4	70.784	2
36	5	352.529	20	42	5	26.081	0
36	6	230.163	16	42	6	77.421	0
36	7	243.936	19	42	7	7.120	2
37	1	543.295	12	43	1	1348.008	48
37	2	540.957	20	43	2	1408.717	59
37	3	515.061	22	43	3	1616.470	65
37	4	534.942	12	43	4	1485.584	73
37	5	620.379	13	43	5	1954.211	91
37	6	553.122	17	43	6	1528.900	62
37	7	510.214	9	43	7	1252.694	43
38	1	1029.563	67	44	1	1123.507	43
38	2	1097.433	58	44	2	1148.065	37
38	3	1272.550	68	44	3	1198.427	36
38	4	1357.884	92	44	4	1258.329	56
38	5	1622.744	68	44	5	1290.727	70
38	6	1160.147	77	44	6	1213.667	26
38	7	1056.315	57	44	7	1209.309	47

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
45	1	1558.521	50	51	1	14.229	0
45	2	1798.188	54	51	2	13.704	0
45	3	1804.204	48	51	3	15.445	1
45	4	1963.514	81	51	4	25.915	0
45	5	2758.736	122	51	5	38.275	0
45	6	2266.418	55	51	6	27.823	0
45	7	2135.638	77	51	7	18.472	0
46	1	1677.159	84	52	1	89.758	4
46	2	1818.022	132	52	2	118.457	1
46	3	1716.822	134	52	3	126.104	3
46	4	1828.931	94	52	4	106.947	5
46	5	2389.001	141	52	5	117.231	7
46	6	1838.996	93	52	6	101.401	2
46	7	1586.483	106	52	7	57.373	6
47	1	107.175	0	53	1	149.060	1
47	2	95.723	2	53	2	189.778	2
47	3	78.302	0	53	3	152.892	3
47	4	37.141	0	53	4	186.371	3
47	5	33.023	1	53	5	245.861	3
47	6	31.017	0	53	6	216.972	3
47	7	43.081	0	53	7	104.665	6
48	1	113.138	5	54	1	0.000	0
48	2	148.338	15	54	2	0.000	0
48	3	199.211	9	54	3	0.000	0
48	4	245.298	12	54	4	0.075	0
48	5	305.085	13	54	5	0.000	0
48	6	282.832	14	54	6	0.000	0
48	7	179.536	15	54	7	0.000	0
49	1	389.615	11	55	1	161.352	19
49	2	352.236	7	55	2	232.134	16
49	3	465.380	12	55	3	145.447	14
49	4	458.031	12	55	4	178.502	12
49	5	686.360	12	55	5	220.084	9
49	6	707.343	9	55	6	111.862	2
49	7	499.189	16	55	7	119.294	10
50	1	85.845	2	56	1	15.655	0
50	2	85.783	0	56	2	18.035	0
50	3	104.434	0	56	3	23.572	1
50	4	99.875	2	56	4	26.767	0
50	5	103.061	0	56	5	0.201	0
50	6	96.433	2	56	6	21.955	0
50	7	78.010	3	56	7	23.234	3

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
57	1	117.163	6	63	1	3.119	0
57	2	134.122	13	63	2	3.685	0
57	3	139.911	6	63	3	3.764	0
57	4	160.603	8	63	4	3.831	0
57	5	188.862	10	63	5	4.993	1
57	6	210.026	10	63	6	3.780	0
57	7	204.768	3	63	7	2.618	0
58	1	150.296	0	64	1	28.386	0
58	2	166.081	3	64	2	32.964	1
58	3	155.572	0	64	3	44.084	0
58	4	150.686	0	64	4	81.340	2
58	5	225.843	3	64	5	89.199	1
58	6	73.296	1	64	6	81.750	0
58	7	191.223	1	64	7	87.903	2
59	1	273.622	2	65	1	91.605	1
59	2	312.386	4	65	2	112.329	1
59	3	384.966	7	65	3	90.227	2
59	4	408.276	4	65	4	115.104	3
59	5	748.580	11	65	5	106.548	2
59	6	426.061	5	65	6	89.530	3
59	7	376.149	3	65	7	101.780	1
60	1	196.698	4	66	1	64.214	0
60	2	217.671	3	66	2	81.465	0
60	3	239.066	6	66	3	66.600	0
60	4	235.468	5	66	4	82.745	0
60	5	366.125	3	66	5	94.381	1
60	6	280.203	4	66	6	86.545	1
60	7	202.221	2	66	7	92.120	1
61	1	0.000	0	67	1	113.122	2
61	2	0.000	0	67	2	141.183	6
61	3	0.288	0	67	3	186.196	12
61	4	0.433	1	67	4	214.230	12
61	5	1.312	0	67	5	193.758	10
61	6	1.268	0	67	6	221.813	10
61	7	0.806	0	67	7	201.130	8
62	1	128.762	6	68	1	7.329	0
62	2	129.566	5	68	2	13.180	0
62	3	156.728	2	68	3	8.650	0
62	4	170.342	4	68	4	7.822	1
62	5	205.975	5	68	5	13.752	0
62	6	161.752	1	68	6	9.581	0
62	7	128.477	1	68	7	10.006	1

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
69	1	174.102	2	75	1	259.342	10
69	2	201.453	3	75	2	282.100	31
69	3	209.368	5	75	3	265.376	34
69	4	253.491	6	75	4	254.058	27
69	5	265.070	2	75	5	335.424	33
69	6	269.752	5	75	6	244.496	23
69	7	192.365	8	75	7	214.138	20
70	1	38.714	0	76	1	646.899	31
70	2	40.550	0	76	2	706.321	27
70	3	48.034	0	76	3	699.304	25
70	4	47.987	0	76	4	705.517	34
70	5	58.351	0	76	5	867.373	46
70	6	54.275	0	76	6	638.322	38
70	7	54.812	0	76	7	572.799	56
71	1	83.008	3	77	1	107.353	5
71	2	82.796	3	77	2	104.486	8
71	3	99.997	0	77	3	124.194	12
71	4	106.843	5	77	4	175.424	7
71	5	145.506	4	77	5	206.059	12
71	6	110.815	5	77	6	177.489	7
71	7	103.664	5	77	7	167.093	9
72	1	121.196	10	78	1	77.171	3
72	2	148.555	6	78	2	76.506	6
72	3	186.487	6	78	3	98.673	6
72	4	309.997	21	78	4	103.028	13
72	5	265.607	14	78	5	122.334	16
72	6	228.599	10	78	6	57.534	4
72	7	107.859	7	78	7	80.913	12
73	1	66.966	2	79	1	263.738	28
73	2	65.204	5	79	2	308.347	27
73	3	79.769	2	79	3	296.709	18
73	4	73.765	0	79	4	303.772	23
73	5	108.141	6	79	5	377.930	39
73	6	84.860	3	79	6	185.310	14
73	7	90.598	4	79	7	172.616	26
74	1	820.970	64	80	1	1013.867	39
74	2	1071.589	57	80	2	956.509	35
74	3	851.567	65	80	3	1041.898	39
74	4	772.685	41	80	4	1122.146	34
74	5	1126.973	65	80	5	1400.163	51
74	6	416.385	36	80	6	1034.801	41
74	7	308.005	16	80	7	891.256	56

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
81	1	111.090	9	87	1	28.988	3
81	2	106.213	10	87	2	21.153	8
81	3	102.541	7	87	3	19.404	4
81	4	113.139	12	87	4	13.989	1
81	5	168.177	13	87	5	5.164	1
81	6	149.237	10	87	6	10.733	0
81	7	89.148	13	87	7	3.488	0
82	1	2913.910	82	88	1	7.247	0
82	2	2941.158	106	88	2	8.407	0
82	3	3413.532	81	88	3	10.825	0
82	4	3402.478	104	88	4	6.140	0
82	5	4313.542	132	88	5	18.044	1
82	6	3024.050	96	88	6	6.229	1
82	7	2844.038	89	88	7	3.670	0
83	1	3175.937	224	89	1	106.135	30
83	2	3058.315	148	89	2	93.503	36
83	3	3226.647	160	89	3	96.455	26
83	4	3575.413	199	89	4	118.534	73
83	5	4517.677	228	89	5	112.757	54
83	6	3478.879	178	89	6	93.584	48
83	7	2593.355	178	89	7	79.629	40
84	1	79.582	4	90	1	76.405	6
84	2	58.306	7	90	2	80.802	1
84	3	100.149	11	90	3	82.884	9
84	4	78.744	10	90	4	101.123	11
84	5	231.495	24	90	5	164.261	6
84	6	276.840	11	90	6	95.666	7
84	7	459.901	34	90	7	89.050	4
85	1	84.886	9	91	1	1328.932	31
85	2	94.043	3	91	2	1334.186	33
85	3	98.463	14	91	3	1334.642	32
85	4	132.101	13	91	4	1439.621	55
85	5	211.462	17	91	5	1900.358	57
85	6	172.669	28	91	6	1575.137	33
85	7	194.281	19	91	7	1495.906	39
86	1	0.000	0	92	1	1283.025	54
86	2	21.319	0	92	2	1337.012	61
86	3	20.923	0	92	3	1355.122	68
86	4	18.530	0	92	4	1519.127	91
86	5	27.521	1	92	5	1963.594	53
86	6	10.468	0	92	6	1524.377	80
86	7	11.961	0	92	7	1419.202	76

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
93	1	306.705	3	99	1	1055.156	25
93	2	314.853	1	99	2	1065.292	30
93	3	357.296	0	99	3	1141.624	35
93	4	439.514	4	99	4	1193.582	48
93	5	602.841	4	99	5	1615.875	61
93	6	554.907	3	99	6	1337.935	49
93	7	571.591	4	99	7	1269.005	38
94	1	209.037	1	100	1	309.501	10
94	2	249.768	3	100	2	347.849	16
94	3	242.952	3	100	3	339.384	16
94	4	223.889	3	100	4	323.840	11
94	5	286.412	12	100	5	410.613	15
94	6	247.946	6	100	6	325.568	8
94	7	246.528	4	100	7	301.404	9
95	1	598.297	12	101	1	1768.157	12
95	2	633.966	15	101	2	1809.730	18
95	3	650.776	12	101	3	1096.204	20
95	4	761.772	12	101	4	2053.998	20
95	5	863.569	27	101	5	2942.043	25
95	6	784.155	15	101	6	2383.743	30
95	7	748.876	18	101	7	2327.415	27
96	1	511.401	41	102	1	317.952	6
96	2	609.635	27	102	2	318.712	18
96	3	518.000	11	102	3	305.967	16
96	4	561.834	9	102	4	342.672	7
96	5	617.042	10	102	5	463.343	19
96	6	448.895	6	102	6	340.908	13
96	7	501.484	8	102	7	329.476	10
97	1	591.968	26	103	1	183.162	12
97	2	609.840	23	103	2	204.070	11
97	3	641.186	32	103	3	215.898	15
97	4	673.982	41	103	4	254.076	22
97	5	801.838	40	103	5	309.034	16
97	6	592.050	44	103	6	270.101	21
97	7	516.338	24	103	7	244.806	24
98	1	3307.708	46	104	1	49.076	6
98	2	3156.211	42	104	2	46.452	3
98	3	3223.638	65	104	3	53.448	3
98	4	3269.966	60	104	4	45.917	0
98	5	4895.145	103	104	5	66.054	0
98	6	3694.214	75	104	6	52.828	3
98	7	3564.236	55	104	7	43.959	1



Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
105	1	2126.661	63	111	1	63.785	6
105	2	2273.041	63	111	2	67.671	3
105	3	2325.099	77	111	3	77.918	2
105	4	2452.336	61	111	4	82.328	6
105	5	3209.569	93	111	5	105.884	4
105	6	2439.080	68	111	6	75.422	5
105	7	2236.104	62	111	7	70.851	10
106	1	39.867	1	112	1	12075.618	29
106	2	39.843	2	112	2	12618.147	24
106	3	42.824	1	112	3	13622.255	21
106	4	37.455	1	112	4	14833.854	26
106	5	54.205	3	112	5	21163.600	45
106	6	40.643	0	112	6	19070.066	31
106	7	37.574	2	112	7	18809.666	45
107	1	231.292	0	113	1	2582.738	18
107	2	250.281	1	113	2	3288.781	25
107	3	241.722	1	113	3	3107.033	25
107	4	245.193	0	113	4	3201.166	17
107	5	448.444	0	113	5	4361.026	46
107	6	341.276	0	113	6	3310.561	33
107	7	295.566	0	113	7	2020.386	12
108	1	679.884	14	114	1	3178.428	3
108	2	906.121	17	114	2	2294.945	11
108	3	950.964	7	114	3	2563.539	8
108	4	977.763	9	114	4	2828.968	6
108	5	1340.554	20	114	5	4422.089	9
108	6	1026.951	24	114	6	3809.180	14
108	7	969.722	31	114	7	4112.043	9
109	1	53.708	3	115	1	142.476	2
109	2	67.571	2	115	2	153.847	0
109	3	63.940	5	115	3	172.002	4
109	4	71.650	1	115	4	186.035	5
109	5	98.161	4	115	5	202.441	1
109	6	79.249	7	115	6	185.968	2
109	7	59.117	3	115	7	191.504	4
110	1	44.035	1	116	1	818.162	6
110	2	48.523	2	116	2	831.213	1
110	3	57.823	3	116	3	911.948	18
110	4	45.613	3	116	4	1031.709	13
110	5	72.047	1	116	5	1439.935	21
110	6	30.096	1	116	6	1184.156	8
110	7	24.968	2	116	7	1254.184	9

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
117	1	471.076	2	123	1	104.253	2
117	2	261.442	6	123	2	138.179	2
117	3	439.570	10	123	3	139.056	2
117	4	421.738	2	123	4	172.297	5
117	5	842.236	6	123	5	187.190	5
117	6	96.233	4	123	6	132.517	5
117	7	72.651	0	123	7	142.657	2
118	1	90.679	2	124	1	3.275	0
118	2	89.372	3	124	2	5.693	0
118	3	75.521	3	124	3	4.508	0
118	4	98.495	7	124	4	4.805	0
118	5	119.188	3	124	5	9.067	0
118	6	94.799	2	124	6	5.967	0
118	7	70.064	3	124	7	5.588	0
119	1	5100.537	23	125	1	13.182	3
119	2	5307.799	26	125	2	20.734	2
119	3	2885.003	31	125	3	15.334	3
119	4	6305.052	22	125	4	17.762	1
119	5	8304.123	41	125	5	17.228	0
119	6	7028.993	46	125	6	1.666	11
119	7	6541.694	37	125	7	1.740	1
120	1	1310.079	24	126	1	76.205	1
120	2	1596.148	38	126	2	70.900	0
120	3	1577.690	34	126	3	87.235	2
120	4	1671.204	38	126	4	100.693	0
120	5	2328.100	73	126	5	143.081	0
120	6	2066.956	63	126	6	120.950	0
120	7	1728.151	50	126	7	123.444	2
121	1	66.772	0	127	1	180.970	4
121	2	70.669	0	127	2	249.116	5
121	3	70.737	0	127	3	221.405	7
121	4	73.274	0	127	4	161.425	7
121	5	87.124	2	127	5	199.852	6
121	6	83.261	0	127	6	172.033	6
121	7	89.242	0	127	7	140.378	7
122	1	2113.111	17	128	1	0.000	0
122	2	2294.597	38	128	2	0.000	0
122	3	2585.560	38	128	3	0.000	0
122	4	2524.492	53	128	4	0.000	0
122	5	3616.607	78	128	5	0.000	0
122	6	2887.929	81	128	6	0.000	0
122	7	2870.043	67	128	7	0.000	0

Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$	Clase	Año	$P_{ij}$	$Y_{ij}$
129	1	795.167	19	132	1	2.317	0
129	2	1147.475	26	132	2	3.972	0
129	3	950.837	27	132	3	33.190	0
129	4	849.241	15	132	4	47.261	2
129	5	976.607	22	132	5	35.413	2
129	6	673.329	16	132	6	16.984	1
129	7	535.045	15	132	7	18.797	0
130	1	82.610	0	133	1	66.213	2
130	2	87.124	2	133	2	65.696	0
130	3	111.903	0	133	3	69.913	0
130	4	123.734	1	133	4	46.289	0
130	5	120.606	3	133	5	91.119	0
130	6	148.423	1	133	6	78.456	1
130	7	70.599	0	133	7	84.362	2
131	1	61.802	0				
131	2	116.093	2				
131	3	64.425	2				
131	4	56.817	0				
131	5	92.627	1				
131	6	119.006	6				
131	7	120.145	8				

# Apéndice D

## Muestra para el escenario 2. Modelo jerárquico.

Clase	$x_i$	Clase	$x_i$	Clase	$x_i$	Clase	$x_i$	Clase	$x_i$
1	0.07424	31	0.05733	61	0.57736	91	0.03125	121	0.00382
2	0.02263	32	0.07551	62	0.02531	92	0.04621	122	0.01831
3	0.02478	33	0.01528	63	0.03338	93	0.00568	123	0.02358
4	0.00000	34	0.03124	64	0.01102	94	0.01810	124	0.00000
5	0.06515	35	0.00000	65	0.02005	95	0.02138	125	1.19640
6	0.11604	36	0.04371	66	0.00370	96	0.03188	126	0.00600
7	—	37	0.02931	67	0.04622	97	0.05276	127	0.03034
8	0.11972	38	0.05789	68	0.02130	98	0.01784	128	—
9	0.23419	39	0.09898	69	0.01666	99	0.03285	129	0.02315
10	0.02033	40	0.04265	70	0.00000	100	0.03675	130	0.01044
11	0.04400	41	0.04266	71	0.03196	101	0.00951	131	0.01824
12	0.03261	42	0.01561	72	0.05321	102	0.03786	132	0.02627
13	0.02285	43	0.04232	73	0.03707	103	0.06750	133	0.00715
14	0.06692	44	0.03678	74	0.06744	104	0.04996		
15	0.04937	45	0.03307	75	0.09588	105	0.02869		
16	0.05911	46	0.06028	76	0.04710	106	0.03011		
17	0.04091	47	0.00853	77	0.05955	107	0.00135		
18	—	48	0.05524	78	0.08410	108	0.01570		
19	0.01096	49	0.02171	79	0.08480	109	0.05111		
20	0.03112	50	0.01067	80	0.03647	110	0.03811		
21	0.03975	51	0.01079	81	0.08230	111	0.05683		
22	0.03144	52	0.03383	82	0.03013	112	0.00189		
23	0.01292	53	0.01316	83	0.05430	113	0.00807		
24	0.01262	54	0.00000	84	0.09176	114	0.00278		
25	0.01906	55	0.06815	85	0.10351	115	0.01331		
26	0.06520	56	0.00707	86	0.00726	116	0.01037		
27	0.02005	57	0.05689	87	0.15882	117	0.01723		
28	0.01584	58	0.00750	88	0.03599	118	0.03544		
29	0.06098	59	0.01242	89	0.42415	119	0.00500		
30	0.01988	60	0.01715	90	0.06966	120	0.02470		



# Bibliografía

- [1] ALEGRE,A. y SARRASÍ,F.(1995). *Modalidades alternativas de reaseguro basadas en la ordenación de riesgos*. III Congreso de Matemática de las Operaciones Financieras. Las Palmas de Gran Canaria.
- [2] AMBAGASPITIYA,R. y BALAKRISHNAN,N.(1994). *On the compoud generalized Poisson distributions*. Astin Bulletin,Vol.24.No.2,pp.255-263.
- [3] BERGER,J.(1985).*Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis* Ed. Springer-Verlag.Second Edition.
- [4] BERGER,J.(1994). *An overview of robust bayesian analysis* Test.Vol 3,No.1,pp.5-124.
- [5] BERGER,J. y BERLINER,L.(1986). *Robust bayes and empirical bayes analysis with  $\epsilon$ -contaminated priors*. The Annal of Statistics. Vol 14.No.2,pp.461-486.
- [6] BERGER,J. y O'HAGAN,A.(1986). *Robust bayesian analysis with specified prior quantiles*. Technical Report#86-59.Purdue University.
- [7] BERLINER,M. y GOEL,P.(1990). *Incorporating partial prior information: ranges of posterior probabilities*. Bayesian and Likelihood Methods in Statistics and Econometrics.
- [8] BERNARDO,J. y SMITH,A.(1994). *Bayesian theory*. John Wiley&Sons Ltd.
- [9] BOX,G. y TIAO,G.(1992). *Bayesian inference in statistical analysis*. John Wiley&Sons Ltd.

- [10] BÜHLMANN,H. (1967). *Experience rating and credibility*. Astin Bulletin, Vol IV, Part III. pp.199-207.
- [11] BÜHLMANN,H.(1969). *Experience rating and credibility*. Astin Bulletin, Vol V, Part III. pp.157-165.
- [12] CANO,J.(1993). *Robustness of the posterior mean in normal hierarchical models*. Commun.Statist.-Theory Meth,22(7),pp.1999-2014.
- [13] CANO,J.; HERNÁNDEZ,A. y MORENO,E.(1986). *Posterior measure under partial prior information*. Statistica, anno XL,No.4,pp.219-229.
- [14] CANO,J.; HERNÁNDEZ,A. y MORENO,E.(1989). *On L-sufficiency concept of partial sufficiency*. Statistica, anno XLIX, No.4,pp.519-528.
- [15] COHEN,J.; NAGIN,D.; WALLSTROM,G. y WASSERMAN,L. *Hierarchical bayesian analysis of arrest rates*.
- [16] DANNENBURG,D.(1994). *Some results on the estimation of the credibility factor in the classical Buhlmann model*. Insurance:Mathematics & Economics 14,pp.39-50.
- [17] DATTA,G.(1995). *Robust hierarchical bayes estimation of small area characteristics in the presence of covariates and outliers*. Journal of multivariate analysis 54,pp.310-328.
- [18] DELAMPADY,M. y BERGER,J.(1990). *Lower bounds on bayes factors for multinomial distributions, with application to chi-squared tests of fit*. The Annal of Statistics.Vol.18,No.3,pp.1295-1316.
- [19] DE VYLDER,F y GOODVAERTS,M.(1994). *A note on the solution of practical ruin problems*. Insurance:Mathematics & Economics 15,pp.181-186.
- [20] EICHENAUER,J;LEHN,J. y RETTIG,S.(1988):. *A gamma-minimax result in credibility theory* . Insurance:Mathematics & Economics 7,pp.49-57.
- [21] FELLER,W.(1989). *Introducción a la teoría de probabilidades y sus aplicaciones*. Editorial Limusa. Segunda Edición.

- [22] FLORENS,J;MOUCHART,M. y ROLIN,J.(1992). *Bayesian analysis of mixtures; some results on exact estimability and identification*. Bayesian Statistics 4,pp.127-145.
- [23] FREIFELDER,L. (1974). *Statistical Decision Theory and Credibility Theory and Procedures*. Credibility Theory and Applications. Edited by P.M.Kahn. Academic Press, pp.71-88.
- [24] GELFAND,A. y DEY,D.(1991). *On bayesian robustness of contaminated classes of priors*. Statistics&Decisions 9,pp.63-80.
- [25] GEORGE,E.; MAKOV,U. y SMITH,A.(1994). *Fully bayesian hierarchical analysis for exponential families via Monte Carlo computation*. John Wiley & Sons.pp.181-199.
- [26] GERBER,H. (1979). *An introduction to mathematical risk theory*. Huebner Foundation.
- [27] GERBER,H. y JONES,D. (1974). *Credibility formulas of the updating type*. *Credibility Theory. Surveys of Actuarial Studies* No.4,pp.89-109. Publication of Nationale-Netherlanden.
- [28] GOODVAERTS,M. y HOOGSTAD,W.(1987). *Credibility Theory. Surveys of Actuarial Studies* No.4,19-52. Publication of Nationale-Netherlanden.
- [29] GÓMEZ,E.(1994). *Un estudio de la robustez del principio exponencial de cálculo de prima*. VIII Reunión ASEPELT.Palma de Mallorca.
- [30] GÓMEZ,E.(1995). *Robustez bayesiana en credibilidad. Una aplicación al modelo exponencial-gamma de la Teoría del Riesgo Colectivo*. Documentos de trabajo.Departamento de Economía Aplicada.Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- [31] GÓMEZ,E.; VÁZQUEZ,F. y GUERRA,N.(1995). *Un modelo de clases de contaminaciones en Teoría de la Credibilidad*. IX Reunión ASEPELT.Santiago de Compostela.
- [32] HEILMANN,W.(1989). *Decision theoretic foundations of credibility theory*. Insurance: Mathematics & Economics 8,pp.77-95.



- [33] HEILMANN,W.(1989). *Risk management and insurance*. Paper presented to the International Conference on " Structure Failure, Product Liability and Theoretical Insurance ( SPT-3) in Vienna,pp.10-12.
- [34] HEILMANN,W. y SCHRÖTER,K.(1987). *On the robustness of premium principles*. Insurance:Mathematics & Economics 6,pp.145-149.
- [35] HERNÁNDEZ,J. (1994). *Más seguros que nunca*. Colección ESADE.
- [36] HICKMAN,J.(1974). *Introduction and Historical Overview of Credibility*. Credibility Theory and Applications.Edited by P.M.Kahn. Academic Press,pp.181-193.
- [37] HÜRLIMANN,W.(1994). *A note on experience rating, reinsurance and premium principles*. Insurance:Mathematics & Economics 14,pp.197-204.
- [38] HÜRLIMANN,W.(1995). *Predictive stop-loss premiums and Student's t-distribution*. Insurance:Mathematics & Economics 16,pp.151-159.
- [39] IVERSEN,G.(1984). *Bayesian statistical inference*. Sage Publications.Series/Number 07-043.
- [40] JEWELL,W.(1988). *A heterocedastic hierarchical model*. Bayesian Statistics 3,pp.657-663.
- [41] KAAS,R.(1993). *How to (and how not to) compute stop-loss premiums in practice*. Insurance:Mathematics & Economics 13,pp.241-254.
- [42] KAAS,R. y GERBER,H.(1994). *Some alternatives for the individual model*. Insurance:Mathematics & Economics 15,pp.127-132.
- [43] KLUGMAN,S.(1992). *Bayesian Statistics in Actuarial Science*. Kluwer Academic Publisher.
- [44] KREMER,E.(1994). *Robust credibility via robust Kalman filtering*. Astin Bulletin,Vol.24,No.2,pp.221-233.
- [45] LARRY,A.(1989). *A robust bayesian interpretation of likelihood regions*. The Annals of Statistics.Vol 17.No.3.pp.1387-1393.

- 
- [46] LEE,P.(1989). *Bayesian statistics:an introduction*. Oxford University Press.
- [47] LEMAIRE,J. y ZI,H.(1994). *High deductibles instead of bonus-malus:can it work?* Astin Bulletin.Vol.24,No.1,pp.75-88.
- [48] LORRAINE,R. y HARTIGAN,J.(1981). *Bayesian inference using intervals of measures*. The Annals of Statistics,Vol.9.No.2,pp.235-244.
- [49] MADANSKY,A.(1990). *Bayesian analysis with incomplety specified prior distributios*. Bayesian and Likelihood Methods in Statistics and Econometrics,pp.423-436.
- [50] MAKOV,U.(1995). *Loss robustness via Fisher-weighted squared error loss function*. Insurance:Mathematics & Economics 16,pp.1-6.
- [51] MARGOLIN,M.(1974). *Are the classical and bayesian approaches to credibility empirical valid?*. Credibility Theory and Applications.Edited by P.M.Kahn. Academic Press,pp.281-288.
- [52] MAYERSON,A.(1964). *A bayesian view of credibility*. Casualty Actuarial Society.Vol IV,Part I,pp.85-104.
- [53] MILLER,R.(1980). *Actuarial applications of bayesian statistics*. Bayesian Analysis in Econometrics and Statistics. North Holland Publishing Company,pp.197-212.
- [54] MILLER,R. y HICKMAN,J.(1974). *Insurance credibility theory and bayesian estimation*. Credibility Theory and Applications.Edited by P.M.Kahn. Academic Press,pp.249-279.
- [55] MORENO,E. y CANO,J.(1989). *Testing a point null hypothesis: Asymptotic robust bayesian analysis with respect to the priors given on a subsigma field*. International Statistical Review, 57, 3. pp.221-232.
- [56] NIETO,U. y VEGAS,J.(1993). *Matemática Actuarial* Fundación Mapfre Estudios. Instituto de Ciencias del Seguro. Colección Universitaria.
- [57] Reglamento de la Ley de Seguros Real Decreto 1348/1985 de 1 de Agosto.

- [58] O'HAGAN,A. y BERGER,J.(1988). *Ranges of posterior probabilities for quasiunimodal priors with specified quantiles*. Journal of the American Statistical Association.Vol.83,No.402.pp.503-508.
- [59] PAULSEN,J.(1995). *Optimal per claim deductibility in insurance with the possibility of risky investments*. Insurance:Mathematics & Economics 17,pp.133-147.
- [60] PERICCHI,L. y WALLEY,P.(1991). *Robust bayesian credible intervals and prior ignorance*. International Statistical Review,58,1,pp.1-23.
- [61] POLASEK,W. y POTZELBERGER,K.(1988). *Robust bayesian analysis in hierarchical models*. Bayesian Statistics 3,pp.377-394.
- [62] PONS,A.(1991). *La Teoría de la Credibilidad y su aplicación a los seguros colectivos*. Tesis Doctoral. Universidad de Barcelona.
- [63] PRESS,J.(1989). *Bayesian statistics. Principles, models and applications*. John Wiley & Sons.
- [64] RAMSAY,C.(1993). *Annuity distributions (a new class of compound Poisson distributions)*. Insurance:Mathematics & Economics 13,pp.15-22.
- [65] RIOS,S.; MARTIN,J.; RIOS,D. y RUGGERI,F. (1996). *Bayesian forecasting for accident proneness evaluation*. Technical Report. Department of Artificial Intelligence, Madrid Technical University.
- [66] SCHRÖTER,K.(1990). *On a family of counting distributions and recursions for related compound distributions*. Scandinavian Actuarial Journal,pp.161-175.
- [67] SCOLLNIC,P.(1993). *A bayesian analysis of a simultaneous equations model for insurance rate-making*. Insurance:Mathematics & Economics 12, pp.265-286.
- [68] SIVAGANESAN,S.(1988). *Range of posterior measures for priors with arbitrary contaminations*. Commun.Statist.-Theory Meth,17(5).pp.1591-1612.

- 
- [69] SIVAGANESAN,S.(1989). *Sensitivity of posterior mean to unimodality preserving contaminations*. Statistics & Decisions,7,pp.77-93.
- [70] SIVAGANESAN,S.(1991). *Sensitivity of some posterior summaries when the prior is unimodal with specified quantiles*. The Canadian Journal of Statistics.Vol,19.No.1,pp.57-65.
- [71] SIVAGANESAN,S. y BERGER,J. (1987). *Ranges of posterior measures for priors with unimodal contaminations*. Technical Report # pp.86-41. Department of Statistics. Purdue University.
- [72] SIVAGANESAN, S. y BERGER, J. (1989). *Ranges of posterior measures for priors with unimodal contaminations*. The Annals of Statistics.Vol.17.No2,pp.868-889.
- [73] SPIEGELHALTER,D.; HARRIS,N. y FRANKLIN,C.(1994). *Empirical evaluation of prior beliefs about frequencies: methodology and a case study in congenital heart disease*. Journal of the American Statistical Association.Vol.89,No.426,pp.435-443.
- [74] STRAUB,E. (1992). *Non life-insurance mathematics*. Springer-Verlag. Association of Swiss Actuaries. Academic Publisher.
- [75] TAYLOR,G.(1974). *In search of a general parameter-free credibility formula*. Credibility Theory and Applications. Edited by P.M.Kahn. Academic Press,pp.401-408.
- [76] VÁZQUEZ,F.(1992). *Técnicas estadísticas bayesianas en auditoría. Un análisis de robustez* Tesis Doctoral. Universidad de Las Palmas de Gran Canaria.
- [77] VÁZQUEZ,F. y HERNÁNDEZ,A. (1995). *On the behavior of the posterior error rate with partial prior information in auditing*. Journal of Applied Statistics, 22, 4, pp. 469-476.
- [78] WASSERMAN,L. y KADANE,J. (1990). *Bayes'theorem for Choquet capacities*. The Annals of Statistics, Vol.18, No.3, pp. 1328-1339.

- 
- [79] WEST,M.; MULLER,P. y ESCOBAR,M.(1994). *Hierarchical priors and mixture models, with application in regression and density estimation.* John Wiley & Sons.pp,363-386.