

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS  
DE GRAN CANARIA

TESIS DOCTORAL

REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE CONDICIÓN Y  
DEFICIENCIA DE RANGO EN LOS SISTEMAS DE ECUACIONES  
ASOCIADOS A LAS OBSERVACIONES DE SATÉLITES

PILAR ABAD REAL

LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

ABRIL 2005

44/2004-05

UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA  
SUBDIRECCIÓN DE TERCER CICLO Y POSTGRADO

Reunido el día de la fecha, el Tribunal nombrado por el Excmo. Sr. Magfco. de esta Universidad, y finalizada la defensa y discusión de esta tesis doctoral, los señores miembros del Tribunal, emiten la siguiente calificación global:

SOBRESALIENTE "CUM LAUDE"

Votos favorables:

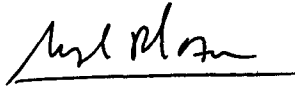
CINCO (5)

Las Palmas de Gran Canaria, a 20 de mayo de 2005

El Presidente: Dr. D. Javier Sánchez-Reyes Fernández



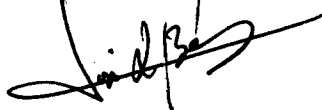
El Secretario: Dr. D. Ángel Plaza de la Hoz



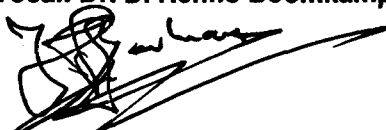
El Vocal: Dr. D. Marco Paluszny Kluczynsky



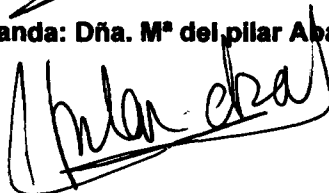
El Vocal: Dr. D. José Luis Berné Valero



El Vocal: Dr. D. Henno Boomkamp



La Doctoranda: Dña. M<sup>a</sup> del pilar Abad Real



**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA**

**Departamento de Matemáticas**



**UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS  
DE GRAN CANARIA**

**TESIS DOCTORAL**

**REDUCCIÓN DEL NÚMERO DE CONDICIÓN Y  
DEFICIENCIA DE RANGO EN LOS SISTEMAS  
DE ECUACIONES ASOCIADOS A LAS  
OBSERVACIONES DE SATÉLITES**

**PILAR ABAD REAL**

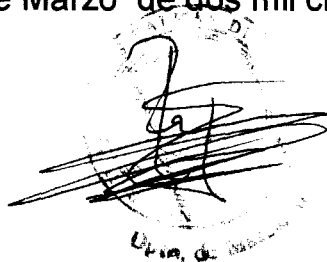
**ABRIL DE 2005**

**D. JUAN ROCHA MARTÍN SECRETARIO DEL DEPARTAMENTO  
DE MATEMÁTICAS DE LA UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE  
GRAN CANARIA,**

**CERTIFICA,**

Que el Consejo de Doctores del Departamento en su sesión de fecha 24/4/2001 tomó el acuerdo de dar el consentimiento para su tramitación, a la tesis doctoral titulada "*Reducción del número de condición y deficiencia de rango en los sistemas de ecuaciones asociados a las observaciones de satélites*" presentada por la doctoranda D<sup>a</sup> M<sup>a</sup> del Pilar Abad Real, dirigida por la Doctora D<sup>a</sup> Alejandra Sanjuán Hernán-Pérez y codirigida por el Doctor D. José Pablo Suárez Rivero .

Y para que así conste, y a efectos de lo previsto en el Artº 73.2 del Reglamento de Estudios de Doctorado de esta Universidad, firmo la presente en Las Palmas de Gran Canaria, a veintinueve de Marzo de dos mil cinco.



## Anexo II

### UNIVERSIDAD DE LAS PALMAS DE GRAN CANARIA

Departamento: Matemáticas

Programa de Doctorado: Matemática pura y aplicada

#### Título de la Tesis

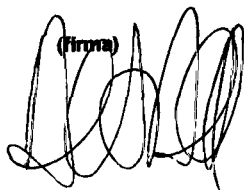
**Reducción del número de condición y deficiencia de rango en los sistemas de ecuaciones asociados a las observaciones de satélites.**

Tesis Doctoral presentada por D<sup>a</sup> M<sup>a</sup> del Pilar Abad Real

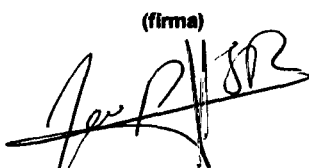
Dirigida por la Dra. D<sup>a</sup>. Alejandra Sanjuán Hernán-Pérez

Codirigida por el Dr. D. José Pablo Suárez Rivero

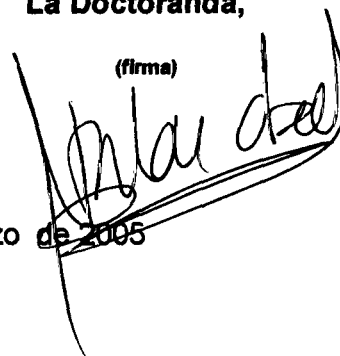
**La Directora,**

(firma)  


**El Codirector**

(firma)  


**La Doctoranda,**

(firma)  


Las Palmas de Gran Canaria, a 29 de Marzo de 2005

*En lo tocante a ciencia, la autoridad de un millar no es superior al humilde  
razonamiento de un hombre.*  
**Galileo Galilei**

## Resumen

La gran mayoría de los problemas que se plantean en Geodesia hacen uso de observaciones redundantes, esto implica que se tienen siempre más observaciones de las estrictamente necesarias para, mediante un sistema de ecuaciones, determinar el conjunto de parámetros incógnitas del problema. En este sentido los métodos de estimación Mínimos Cuadrados son una herramienta fundamental. Encontrar la solución exacta a un sistema de ecuaciones depende de si éste está bien o mal condicionado, es decir, si es o no sensible a las perturbaciones. Cuando el sistema está mal condicionado, el estimador Mínimos Cuadrados puede producir grandes errores, por lo que se necesita utilizar diferentes técnicas de estimación. Los estimadores sesgados ofrecen una alternativa al mal condicionamiento. Por otra parte, muy frecuentemente, cada incógnita del sistema tiene un significado físico diferente, por lo que el conocimiento de la sensibilidad a las perturbaciones en cada componente de la solución es importante. Este conocimiento nos da una idea de la exactitud esperada en cada componente de la solución, dado que la sensibilidad a las perturbaciones puede no ser la misma para todas ellas.

El motivo de estudiar los sistemas mal condicionados es debido a que surgen con frecuencia en múltiples campos relacionados con las Ciencias de la Tierra. El objetivo concreto es estudiar los sistemas de ecuaciones como medio de obtener las coordenadas de un punto sobre la superficie terrestre con suficiente garantía en la precisión del resultado obtenido. En este sentido, se persigue como meta obtener la mejor solución sobrellevando el potencial mal condicionamiento de los sistemas de ecuaciones asociados a las observaciones de satélites GPS.

Este trabajo de investigación se apoya en diversas herramientas matemáticas y tiene una base eminentemente experimental.

## Abstract

A great number of problems arising in Geodesy make use of redundant observations. This produces a high number of observations compared to those strictly necessary to determine the set of unknowns of the problem. In this sense, Least Square estimation methods constitute a major tool. The process to find the exact solution to a equation system depends on whether it is either ill or well conditioned, this is, it depends on whether the system is sensitive to perturbations. When systems are ill conditioned then Least Square methods may produce high errors. In such cases it is needed estimation techniques to overcome those errors. Usually, different unknowns in a system pose different physic meaning and it may occur that sensitivity to perturbations are also different among them. So it is required a complete information on the correctness of the solution.

The purpose to study ill conditioned systems is that they usually occurs in a variety of fields within Earth Sciences. The main goal here is to study the equation systems as a way to obtain the coordinates of a point over the earth surface with high guarantee in the precision of the result. In this sense, it is desired to obtain the solution overcoming the potential ill-conditioning of systems associated to GPS satellites observations.

The research work is supported by several mathematical tools and has an important basis of experimental work.



# Índice general

<b>1. Introducción y objetivos</b>	<b>1</b>
1.1. Aportaciones y objetivos de esta tesis . . . . .	3
1.2. Geodesia Espacial . . . . .	4
1.3. Técnicas de observación de la Geodesia Espacial . . . . .	6
1.3.1. Técnicas Tierra-Satélite. . . . .	6
1.3.2. Técnicas Satélite-Tierra . . . . .	7
1.3.3. Técnicas Satélite-Satélite . . . . .	8
1.4. Observación de satélites y estimación de parámetros . . . . .	9
1.5. Sistema de Posicionamiento Global (GPS) . . . . .	12
1.5.1. Estructura de la señal . . . . .	14
1.5.2. Ondas Portadoras . . . . .	15
1.5.3. Descripción general del sistema GPS . . . . .	16
1.5.4. Error en las efemérides de los satélites . . . . .	22
1.5.5. Error del reloj de los satélites respecto de la escala de tiempo GPS . . . . .	28
1.5.6. Troposfera e Ionosfera . . . . .	31
1.5.7. Reflexiones de la señal. Multicamino . . . . .	33
1.5.8. Dilución de la Precisión . . . . .	34
<b>2. Posicionamiento absoluto en GPS</b>	<b>39</b>
2.1. Modelo de ecuaciones . . . . .	41
2.2. Solución de sistemas de ecuaciones no lineales . . . . .	45
2.2.1. Mínimos Cuadrados no lineales. Enfoque clásico . . . . .	46
2.2.2. Mínimos Cuadrados no lineales. Enfoque de optimización	51
2.3. Solución de sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	53
2.3.1. Mínimos Cuadrados lineales. Métodos iterativos . . . . .	54
2.3.2. Mínimos Cuadrados lineales. Métodos directos . . . . .	55

2.4.	Sistemas de ecuaciones lineales con matrices dispersas . . . . .	70
2.5.	Análisis descriptivo y cuantitativo del modelo de ecuaciones . . . . .	72
2.5.1.	Matriz del modelo . . . . .	72
2.5.2.	Matriz de ecuaciones normales . . . . .	75
2.5.3.	Reordenaciones de las matrices del modelo y de las ecuaciones normales . . . . .	78
2.5.4.	Valores singulares . . . . .	88
2.5.5.	Matriz de segundas derivadas . . . . .	89
2.6.	Correcciones en el proceso de resolución . . . . .	91
<b>3.</b>	<b>Sensibilidad frente a las perturbaciones</b>	<b>93</b>
3.1.	Norma matricial . . . . .	94
3.2.	Definición de problema mal condicionado . . . . .	97
3.3.	Consideraciones sobre Rango y Número de Condición . . . . .	98
3.4.	Límites rigurosos para el error relativo . . . . .	103
3.5.	Estudio del número de condición por componentes . . . . .	105
3.5.1.	Números de Condición para sistemas lineales . . . . .	105
3.5.2.	Números de Condición para Mínimos Cuadrados . . . . .	109
3.5.3.	Estimación de los números de condición por componentes	115
3.6.	Estudio del Mapa Espectral . . . . .	119
<b>4.</b>	<b>Multicolinealidad y deficiencia de rango</b>	<b>131</b>
4.1.	Reducción del número de condición mediante regresión . . . . .	134
4.1.1.	Estimadores y multicolinealidad . . . . .	134
4.1.2.	Transformación de correlación . . . . .	137
4.1.3.	Estimadores de Máxima Regresión y Tipo-máximo . . . . .	141
4.1.4.	Descripción experimental y resultados . . . . .	147
4.2.	Análisis bifactorial para selección de observaciones . . . . .	162
4.2.1.	Análisis de las perturbaciones en la solución . . . . .	163
4.2.2.	Modelo lineal para el análisis de dos factores . . . . .	165
4.2.3.	El modelo empírico: Diseño del experimento . . . . .	166
4.3.	Transformaciones ortogonales para manejar la deficiencia de rango	173
<b>5.</b>	<b>Conclusiones y Trabajo Futuro</b>	<b>177</b>
5.1.	Conclusiones . . . . .	177
5.2.	Trabajo futuro . . . . .	179

<i>ÍNDICE GENERAL</i>	v
<b>A. Software desarrollado</b>	<b>181</b>
<b>B. Publicaciones</b>	<b>185</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>197</b>

# Índice de figuras

1.1. Exactitud de las efemérides transmitidas (URA) . . . . .	18
1.2. Distribución Global de las estaciones de seguimiento del IGS. Imagen tomada del sitio web de IGS [33]. . . . .	24
1.3. Sistema ligado al satélite . . . . .	24
1.4. Diferencias a medianoche en soluciones precisas (JPL) . . . . .	26
1.5. Comparación de las efemérides transmitidas en el mensaje de navegación con las soluciones precisas de ESOC correspondientes al 6 de Septiembre de 2002 . . . . .	29
1.6. Correcciones al reloj precisas y por polinomio interpolador . . .	30
1.7. Correcciones por efecto troposférico . . . . .	33
1.8. Antenas para mitigar el efecto multicamino . . . . .	34
1.9. Representación esquemática del retraso por multicamino . . . .	35
1.10. Retraso por multicamino frente a elevación para diversos ángu- los de elevación . . . . .	35
1.11. Factores DOP . . . . .	38
2.1. Representación esquemática del posicionamiento absoluto . . . .	40
2.2. Transformación lineal de la esfera unidad en dos dimensiones . .	57
2.3. Transformación de Householder de vector $w$ aplicada a $a$ . . . .	60
2.4. Transformación de Givens . . . . .	60
2.5. Interpretación geométrica problema de mínimos cuadrados en $\mathcal{R}^{3 \times 2}$ . . . . .	65
2.6. Estructura de la matriz de diseño, observaciones de pseudodis- tancia y fase. . . . .	74
2.7. Estructura de la matriz de ecuaciones normales. Observaciones de pseudodistancia. . . . .	77
2.8. Estructura de la matriz de ecuaciones normales. Observaciones de fase. . . . .	77

2.9. Estructura de la matriz de observaciones de fase y pseudodistancia. Reordenación de Dulmage-Mendelsohn . . . . .	78
2.10. Estructura de la matriz de observaciones de fase. Reordenación de Grado Mínimo y Aproximada de Grado Mínimo . . . . .	79
2.11. Factor R/G de la matriz observaciones de pseudodistancia para cualquier reordenación . . . . .	80
2.12. Factor R/G de la matriz observaciones de fase reordenada por Grado Mínimo Simétrico . . . . .	81
2.13. Factor Q de la matriz observaciones de pseudodistancia reordenada por Grado Mínimo . . . . .	81
2.14. Factor Q de la matriz observaciones de fase reordenada por Grado Mínimo . . . . .	82
2.15. Factor R/G de la matriz observaciones de pseudodistancia, 100 épocas, para cualquier reordenación . . . . .	83
2.16. Factor R/G de la matriz observaciones de fase reordenada 100 épocas (GMSA) . . . . .	83
2.17. Factor R/G de la matriz observaciones de fase reordenada 100 épocas (GMS) . . . . .	84
2.18. Factor R/G de la matriz observaciones de fase reordenada 100 épocas (GMA) . . . . .	84
2.19. Factores L U de la matriz observaciones de pseudodistancia . . .	85
2.20. Factor L U de la matriz observaciones de fase . . . . .	86
2.21. Factores L U de la matriz observaciones de pseudodistancia para cualquier reordenación . . . . .	86
2.22. Factores L U de la matriz observaciones de fase reordenada (GM)	87
2.23. Factores L U de la matriz observaciones de fase reordenada (GMA)	87
2.24. Valores singulares de la matriz observaciones de pseudodistancia para 10 épocas . . . . .	88
2.25. Valores singulares de la matriz observaciones de fase para 10 épocas . . . . .	89
2.26. Matriz de segundas derivadas observaciones de pseudodistancia para 10 épocas . . . . .	90
3.1. Comparación de normas (pseudodistancia). $\ A^+\  = 1,67$ , $\ r_{min}\  = 0,19$ , $\ r_{max}\  = 0,60$ . . . . .	116

3.2. Comparación de normas (fase).  $\|A^+\| = 2,82e + 015$ ,  $\|r_{min}\| = 0,21$ ,  $\|r_{max}\| = 9,74e + 014$  . . . . . 116

3.3. Números de condición por componentes y n° de condición (pseudodistancia), factores:  $\frac{\|\bar{x}\|}{|x_i|}$ ,  $\|A\|\|r_i\|$  y  $\frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\|\|A\|^2$  . . 118

3.4. Números de condición por componentes y n° de condición (fase), factores:  $\frac{\|\bar{x}\|}{|x_i|}$ ,  $\|A\|\|r_i\|$  y  $\frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\|\|A\|^2$  . . . . . 118

3.5. Valores propios  $A^t A$  pseudodistancia para  $\varepsilon = 0$  . . . . . 125

3.6. Espectro  $A^t A$  pseudodistancia. Se resaltan los contornos  $\varepsilon = 10^{-2}$  en blanco y  $\varepsilon = 10^{-3}$  en negro . . . . . 125

3.7. Valores propios  $A^t A$  fase para  $\varepsilon = 0$  . . . . . 126

3.8. Espectro  $A^t A$  fase. Se resaltan los contornos  $\varepsilon = 10^{-2}$  en blanco y  $\varepsilon = 10^{-3}$  en negro . . . . . 126

3.9. Valores propios  $(A^t A)^{-1}$  pseudodistancia para  $\varepsilon = 0$  . . . . . 127

3.10. Espectro  $(A^t A)^{-1}$  pseudodistancia. Se resaltan los contornos  $\varepsilon = 10^{-2}$  en blanco y  $\varepsilon = 10^{-3}$  en negro . . . . . 127

3.11. Espectro  $(A^t A)^{-1}$  fase para  $\varepsilon = 0$  . . . . . 128

3.12. Valores propios  $(A^t A)^{-1}$  fase. Se resaltan los contornos  $\varepsilon = 10^{-3}$  en blanco y  $\varepsilon = 10^{-4}$  en negro . . . . . 128

3.13. Espectro  $A^t A$  pseudodistancia, 100 épocas . . . . . 129

3.14. Espectro  $A^t A$  fase, 100 épocas . . . . . 129

4.1. Un estimador sesgado con pequeña varianza puede ser preferible a uno insesgado con varianza grande . . . . . 134

4.2. Familia de estimadores para los parámetros de posición  $dx, dy, dz$  para ecuaciones de pseudodistancia y fase. . . . . 142

4.3. Familia de estimadores para el estado del reloj del receptor  $dt$  para ecuaciones de pseudodistancia y fase. . . . . 143

4.4. Número de condición bloque D1 . . . . . 150

4.5. Número de condición bloque D10 . . . . . 151

4.6. Soluciones comparadas dx LS y RT (D1) . . . . . 151

4.7. Soluciones comparadas dy LS y RT (D1) . . . . . 152

4.8. Soluciones comparadas dz LS y RT (D1) . . . . . 152

4.9. Soluciones comparadas dt LS y RT (D1) . . . . . 153

4.10. Soluciones comparadas dt LS y RT (D10) . . . . . 154

4.11. Soluciones comparadas dz LS y RT (D10) . . . . . 154

4.12. Error relativo D1 . . . . .	155
4.13. Error absoluto D1 . . . . .	155
4.14. Error relativo D10 . . . . .	156
4.15. Error absoluto D10 . . . . .	156
4.16. Exactitud y Precisión en las soluciones de posición D1 . . . . .	157
4.17. Exactitud y Precisión en las soluciones de posición D10 . . . . .	157
4.18. Número de condición bloque D10. Fase . . . . .	158
4.19. Soluciones comparadas dt LS y RT (D10). Fase . . . . .	159
4.20. Soluciones comparadas dx LS y RT (D10). Fase . . . . .	159
4.21. Soluciones comparadas dy LS y RT (D10). Fase . . . . .	160
4.22. Soluciones comparadas dz LS y RT (D10). Fase . . . . .	160
4.23. Error relativo D10. Fase . . . . .	161
4.24. Error absoluto D10. Fase . . . . .	161
4.25. Exactitud y Precisión en las soluciones de posición D10. Fase . . . . .	162
4.26. Media marginal estimada para la variable $X$ . . . . .	170
4.27. Media marginal estimada para la variable $Y$ . . . . .	170
4.28. Media marginal estimada para la variable $Z$ . . . . .	171
4.29. Transformaciones ortogonales y ordenación en la matriz de fases	175
4.30. Submodelos para ecuaciones de fase . . . . .	176
A.1. Diagrama del software desarrollado . . . . .	183

# Índice de tablas

1.1. Características de las portadoras . . . . .	16
1.2. Precisiones en posición para PPS (Servicio de Posicionamiento Preciso) y SPS (Servicio de Posicionamiento Estándar) . . . . .	21
1.3. Efemérides precisas y transmitidas . . . . .	29
1.4. Correcciones al reloj precisas y transmitidas en ns . . . . .	31
2.1. Precisión y sesgo de las medidas . . . . .	45
2.2. Matriz de diseño para modelo de medida de fase (F) y pseudodistancia (P) . . . . .	74
2.3. Matriz de ecuaciones normales para modelo de medida de fase (F) y pseudodistancia (P) . . . . .	76
3.1. Cota para el error relativo para modelo de medida de fase (F) y pseudodistancia (P) . . . . .	105
3.2. Comparación de normas . . . . .	117
3.3. Perturbación de coeficientes de $A$ (pseudodistancia y fase) para perturbaciones de 0,3 m en las efemérides de los satélites, $i = 1, \dots, 80$ , $n = 13$ (fase), $n = 21$ (pseudodisancia) . . . . .	122
3.4. Perturbación de coeficientes de $A^t A$ (pseudodistancia) para perturbaciones de 0,3 m en las efemérides de los satélites. Dimensión $13 \times 13$ . . . . .	123
3.5. Perturbación de coeficientes de $A^t A$ (fase) para perturbaciones de 0,3 m en las efemérides de los satélites. Dimensión $21 \times 21$ . . . . .	123
3.6. $\epsilon$ -espectros . . . . .	124
4.1. Descripción de las condiciones experimentales . . . . .	148
4.2. Sesgos para pseudodistancia . . . . .	149
4.3. Sesgos para fase . . . . .	149



4.4. Descripción experimental . . . . .	167
4.5. Test de Lilliefors para el estudio de Normalidad de la variable $Z$	168
4.6. Análisis estadístico de la variable $X$ . . . . .	168
4.7. Análisis estadístico de la variable $Y$ . . . . .	169
4.8. Análisis estadístico de la variable $Z$ . . . . .	169
4.9. Test <i>HSD</i> de comparaciones múltiples . . . . .	171

# Capítulo 1

## Introducción y objetivos

Dentro del campo de la Matemática Aplicada, surgen muy frecuentemente grandes sistemas de ecuaciones con matriz asociada dispersa y mal condicionada, tal es el caso de las observaciones a satélites. Las observaciones de los satélites constituyen hoy día una fuente inagotable de información, y cada vez se derivan más aplicaciones. Dentro de estas aplicaciones esta tesis se centra en la aplicación al campo de la Geodesia, en concreto la determinación de marcos de referencia a través de la determinación de las coordenadas de las estaciones que lo forman. Los sistemas de ecuaciones generados en este problema resultan siempre grandes sistemas dispersos y en general mal condicionados. Además de todos los problemas dinámicos que plantea el uso de observaciones de satélite, las matrices que definen los sistemas al invertirse pueden tener problemas numéricos, dos de ellos relevantes en los objetivos de esta tesis son:

- **ERRORES EN LOS DATOS. CONDICIONAMIENTO.**

Las pequeñas variaciones en los datos pueden producir grandes variaciones en las soluciones obtenidas. El número de condición de la matriz, el número de condición asociado a cada incógnita (número de condición por componente) y el estudio del espectro de la matriz son parámetros que nos informan de esto.

- **ERRORES DE REDONDEO. ESTABILIDAD.**

En el proceso matemático necesario para la inversión de matrices dispersas (factorización, descomposición en valores singulares, etc.), se puede producir un efecto denominado *fill-in*, de relleno de ceros donde antes no los había, esto hace que la matriz pierda su estructura dispersa. Además

de introducir errores de redondeo que pueden ser importantes, conviene encontrar una forma de inversión que preserve en lo posible la estructura. El reordenamiento de ecuaciones puede ser un tratamiento previo que lo evite. El uso de transformaciones ortogonales al realizar la inversión (reflexiones de Householder, rotaciones de Givens) también pueden facilitar el proceso.

El trabajo está estructurado como sigue: En el capítulo primero se comienza señalando los objetivos propuestos en esta tesis; a continuación se hace una introducción a la Geodesia espacial de donde surgirá la necesidad de la estimación de los parámetros incógnita mediante observaciones a satélites, incluyendo una descripción del Sistema de Posicionamiento Global (GPS), y los errores asociados a este tipo de observaciones.

El capítulo segundo se dedica al estudio tanto descriptivo como cuantitativo del modelo de ecuaciones de observación en posicionamiento absoluto. Se hace una revisión de los métodos de resolución tanto de sistemas lineales como no lineales aplicados al modelo. Asimismo se revisan los distintos tipos de reordenaciones de ecuaciones que facilitan explotar la estructura dispersa. Por último se comparan diferentes reordenaciones y su influencia en las ecuaciones del modelo.

En el capítulo tercero se analiza la sensibilidad del sistema frente a las perturbaciones a través de los números de condición por componente y del estudio del espectro de los valores propios. Se propone para la reducción del número de condición el uso del número de condición por componente.

El capítulo cuarto introduce los métodos de estimación mediante regresión como una alternativa para reducir el número de condición y describe el uso de transformaciones ortogonales para evitar la deficiencia de rango en aquellos casos que sea necesario. También dedica una sección al estudio estadístico de la influencia que la selección de observaciones tiene en la solución. Se estudian dos posibles factores de influencia.

El capítulo cinco se destina a presentar las conclusiones resultantes de esta tesis y se proponen diversas líneas de trabajo futuro.

Finalmente, se presenta el anexo A que recoge un esquema del software desarrollado en entorno MATLAB usado en el cálculo y generación de figuras y resultados y el anexo B con una publicación resultado de las investigaciones llevadas a cabo en la tesis.

## 1.1. Aportaciones y objetivos de esta tesis

Esta tesis hace un estudio de los sistemas de ecuaciones implicados en las observaciones de satélite para resolver la posición y el reloj del observador para distintos supuestos (número de satélites, intervalos entre épocas, número de ecuaciones), con los objetivos siguientes:

- Reducir el número de condición para las incógnitas que nos interesen y menos sensible a perturbaciones.
- Eliminar la deficiencia de rango en los sistemas que presenten este problema.
- Estudiar la influencia de la selección de observaciones sobre la solución.

Las aportaciones fundamentales son el uso de estimadores sesgados en la resolución de los sistemas, el uso del número de condición por componente para acotar el condicionamiento y el uso de transformaciones de Householder para eliminar la deficiencia de rango.

Para la realización de cálculos y gráficos se ha utilizado software existente y software desarrollado específicamente para esta tesis, todo ello en entorno MATLAB.

## 1.2. Geodesia Espacial

La definición clásica de Geodesia debida F. R. Helmert 1880 como la ciencia para la determinación de la forma y dimensiones de la Tierra incluye implícitamente la determinación del Campo de Gravedad Terrestre así como la superficie de los mares.

La Geodesia Espacial es la ciencia que se ocupa de la recepción y observación de las señales procedentes de elementos que no están ligados directamente a la superficie terrestre [69]. Utiliza la posición de los satélites artificiales en su órbita y la recepción y análisis de la información enviada por el satélite para resolver los mismos problemas que la geodesia clásica. Hoy, el objetivo de la geodesia espacial se hace extensible a los tres problemas básicos siguientes:

1. Determinación de la posición tridimensional en un sistema global de puntos en la superficie Terrestre y registro de sus variaciones temporales que permitan establecer un marco geodésico de control.
2. Estudio de los Parámetros de Orientación de la Tierra respecto a un sistema inercial espacial y en general, todos aquellos fenómenos geodinámicos que afectan al establecimiento de sistemas de referencia.
3. Determinación de la estructura del Campo de Gravedad Terrestre que permita un conocimiento preciso del geoide.

Esta extensión ha sido posible gracias a que la precisión en las observaciones que hoy día se alcanzan (valores subcentimétricos), permiten detectar procesos geodinámicos, determinar la topografía del océano, y establecer las cada vez más precisas escalas de tiempo para medir variaciones temporales. El uso de satélites artificiales requiere de una serie de conocimientos: movimiento del satélite bajo la influencia de todas las fuerzas que sobre él actúan, posición del satélite en cada instante, marcos de referencia y estaciones de seguimiento. En este sentido podemos decir que la geodesia espacial entra dentro del dominio de las ciencias básicas, pero si utilizamos las observaciones de satélite para resolver diversos problemas, entramos en el dominio de las ciencias aplicadas.

La creciente precisión de las observaciones ha hecho que los métodos geodésicos sean aplicables a otras disciplinas tales como la Geofísica, Oceanografía y la Navegación.

Desde el primer satélite artificial, SPUTNIK-1, lanzado al espacio el 4 de Octubre de 1957, tanto en la enseñanza como en la investigación, la geodesia espacial ha ido interaccionando con otros campos muy próximos históricamente. Entre las relaciones más importantes cabe citar:

- **Astromomía Geodésica**, que utiliza la observación de cuerpos celestes, en particular estrellas, para determinar Marcos de Referencia Celeste y su relación con los Marcos de Referencia Terrestre.
- **Geodesia Clásica**, que utiliza medidas sobre la Tierra de ángulos horizontales, distancias y ángulos cenitales para determinar la localización de un lugar sobre la superficie en un sistema de coordenadas elipsoidal o tridimensional.
- **Geodesia Física**, que utiliza medidas de gravedad para determinar la figura y el campo de gravedad de la Tierra.

Todas estas interacciones e influencias mutuas hacen que la separación en distintos campos sea cada vez más difícil. No obstante, puede matizarse dentro de la geodesia espacial, la denominada geodesia por satélite, entendiéndose ésta como la que utiliza únicamente satélites artificiales: la observaciones, el cálculo y el análisis con fines geodésicos son su objetivo.

Las ventajas de la geodesia espacial frente a la clásica pueden resumirse en:

- La necesidad de estaciones intervisibles no es necesaria con los satélites ya que son visibles desde lugares muy alejados y salvan las limitaciones orográficas.
- Permiten establecer redes entre continentes.
- Los satélites pueden considerarse como puntos de control dentro de una red global tridimensional.

- Las estaciones de seguimiento de los satélites sirven como marco de referencia mundial.
- Los satélites son sensores del Campo de Gravedad Terrestre, y la variación en su órbita permite establecer conclusiones sobre las fuerzas que actúan sobre él.

Para cumplir sus objetivos la geodesia espacial dispone de dos tipos de métodos que generalmente se combinan en la mayoría de las técnicas de observación.

- Métodos geométricos o directos, en que la posición del satélite entra directamente como parámetro en el problema a resolver.
- Métodos dinámicos o indirectos, en que los parámetros deben ser deducidos del comportamiento orbital del satélite.

### 1.3. Técnicas de observación de la Geodesia Espacial

Las técnicas de observación se pueden clasificar atendiendo a diferentes aspectos, uno de ellos es la localización del observador. En este caso las técnicas se agrupan como sigue:

#### 1.3.1. Técnicas Tierra-Satélite.

Existen distintos procedimientos, todos ellos tienen en común que las observaciones se realizan desde la superficie Terrestre, a continuación se exponen brevemente.

1. Determinación de direcciones por métodos fotográficos. En este método el plano de la fotografía permite establecer unas coordenadas para los satélites en relación con las estrellas de fondo en un marco de referencia estelar. Estas coordenadas pueden ser transformadas en direcciones topocéntricas entre el lugar de observación y el satélite. Dos direcciones

así medidas en el mismo instante desde distintas estaciones definen un plano en el espacio. La intersección de dos o más planos definidos por diferentes posiciones del satélite observado permiten determinar el vector que une ambas estaciones, lo que nos lleva a establecer redes geométricas globales continentales o locales entre estaciones.

2. Determinación de distancias mediante observación de satélites pasivos o activos. En estos métodos se mide el tiempo de propagación de una señal electromagnética entre la estación y el satélite. Cuando se trata de satélites pasivos la estación de observación emite un impulso que es reflejado por el satélite y devuelto a la estación. El tiempo de propagación de la señal se mide en el reloj del observador. En el caso de usar satélites activos (GPS, GLONASS) el satélite es el que emite la señal. Se considera que el reloj del satélite y el del observador están sincronizados y se mide el tiempo transcurrido entre la emisión por el satélite y la recepción por la estación. En ambos la distancia se determina teniendo en cuenta la velocidad de propagación de la luz. Las coordenadas de una estación desconocida pueden determinarse a partir de la posición de tres satélites de posición conocida en el caso de observación de satélites pasivos o cuatro satélites en el caso de observaciones a satélites activos.
3. Determinación de diferencia de distancias por el método Doppler. Basado en el efecto Doppler, este método utiliza las diferencias de distancias a un satélite de posición conocida en tres instantes distintos medidas a través del desplazamiento de la frecuencia debido al movimiento relativo entre el satélite y la estación. Estas diferencias definen una superficie hiperbólica en el espacio. Con varias superficies de éstas y su intersección con la superficie de la Tierra se pueden determinar las coordenadas de la estación.

### 1.3.2. Técnicas Satélite-Tierra

Los procedimientos que se describen a continuación son los que aún están menos explotados debido a que el registro de observaciones se lleva a cabo en el satélite y tiene mayor dificultad técnica que cuando se realiza en tierra. Dentro de estos procedimientos podemos citar:



1. Determinación de distancia vertical entre el satélite y la superficie de la Tierra, en particular la superficie del mar, también denominado altimetría por satélite. La señal de tipo radar es enviada por el satélite y se refleja en la superficie del mar. El tiempo de propagación permite determinar la altitud del satélite sobre el nivel del mar. Conocida la posición del satélite es posible determinar la ondulación del geoide y así el conocimiento del geoide. Aplicado a la superficie topográfica estos métodos no son muy apropiados por la gran dispersión que sufre la señal al reflejarse.
2. Determinación de distancias por laser con el sistema de medida instalado en plataformas orbitales y los reflectores en Tierra. Basado en la misma técnica ya expuesta, ahora el impulso es reflejado por la estación en Tierra. Tiene la ventaja de ser mucho menos costoso, ya que pueden instalarse multitud de reflectores en zonas de interés.
3. Medida de los cambios en la aceleración de gravedad que experimenta el satélite. Es decir se trata de medir la derivada segunda del potencial gravitatorio mediante un gradiómetro instalado en el satélite. Estas medidas permiten describir la estructura local del Campo de la Gravedad Terrestre por medio de la curvatura de este campo.

### 1.3.3. Técnicas Satélite-Satélite

Se puede hablar de dos tipos de procedimientos distintos en los que la observación se produce entre satélites, según que la órbita de uno de los satélites sea de gran altura o de baja altura. Sin embargo responden a la misma técnica que es la que se detalla a continuación:

Se mide la variación de la velocidad relativa entre dos satélites. Los propios satélites son los sensores. La variación de esa velocidad contiene información gravitacional, las primeras derivadas del potencial gravitatorio, que permiten determinar las componentes del Campo de Gravedad Terrestre, sobre todo los términos de altas frecuencias. Uno de los satélites o ambos deben estar situados en una órbita baja, satélite que actuará de sensor del campo gravitatorio.

## 1.4. Observación de satélites y estimación de parámetros

La relación básica en la observación de satélites puede formularse a través de la siguiente ecuación [41]:

$$r_i(t) = r_j(t) + \Delta r_{ij}(t)$$

Para resolver la ecuación anterior hay que establecer la relación entre la observación, caracterizada por el vector  $\Delta r_{ij}(t)$  y los parámetros que describen la posición tanto del satélite  $r_j(t)$ , como de la estación de observación  $r_i(t)$ . En el proceso de estimación todos los parámetros pueden ser tratados como incógnitas, o algunos de ellos pueden considerarse conocidos a fin de simplificar la resolución.

En general se plantea un modelo no lineal de ecuaciones de observación donde se introducen los parámetros y las observaciones de la forma:

$$L = \Phi(X) + \varepsilon$$

en donde:

$L$  vector de observaciones,

$X$  vector de parámetros desconocidos o incógnitas,

$\Phi$  función vectorial no lineal,

$\varepsilon$  vector de residuos, que contiene las componentes que no han podido modelizarse en el proceso de estimación.

Las ecuaciones de observación anteriores pueden linealizarse utilizando valores aproximados  $X_0$  para las incógnitas y así:

$$L_0 = \Phi(X_0)$$

obteniéndose un vector de residuos en las observaciones;

$$b = L - L_0$$

y en las incógnitas;

$$x = X - X_0$$

de forma que el sistema linealizado se expresa:

$$Ax + \varepsilon = b \quad (1.1)$$

La matriz  $A$ , llamada *de diseño*, contiene las derivadas parciales de la función  $\Phi$  respecto de los parámetros desconocidos o incógnitas, alrededor del valor aproximado  $X_0$ .

El sistema puede ser resuelto por la estimación mínimos cuadrados basada en la minimización de la función

$$\varepsilon^t P \varepsilon = \text{mín}$$

y obteniendo una estimación de los parámetros incógnita

$$\bar{x} = (A^t P A)^{-1} A^t P b \quad (1.2)$$

siendo  $P$  la *matriz de pesos* de las observaciones. En general  $P$  se tomará como la matriz inversa de la covarianza de errores, pues se asume que éstos tienen una distribución Gaussiana con media cero y covarianza  $R$ . El operador esperanza expresa estas propiedades como:

$$\begin{aligned} E[\varepsilon] &= 0, & E[\varepsilon \varepsilon^t] &= R \\ & & P &= R^{-1} \end{aligned} \quad (1.3)$$

Sustituyendo  $b$  de acuerdo con (1.1) en (1.2) se tiene:

$$\bar{x} = (A^t P A)^{-1} A^t P (Ax + \varepsilon) = x + (A^t P A)^{-1} A^t P \varepsilon \quad (1.4)$$

Los parámetros incógnita pueden ser divididos en tres diferentes grupos:

1. *Incógnitas que describen el movimiento del observador  $r_i(t)$ .* Éstas son, por una parte, las coordenadas geocéntricas de la estación en el mismo sistema en que están las coordenadas del satélite, y por otra, las incógnitas geodinámicas que describen la relación entre un sistema terrestre de referencia y un sistema inercial de referencia llamadas Parámetros de Orientación de la Tierra (EOP). También se incluyen en este grupo incógnitas para modelización de mareas terrestres, deformaciones de la corteza y, si se desea, parámetros de transformación entre el sistema de coordenadas geocéntrico y cualquier otro en el que se deseen obtener las coordenadas de la estación.
2. *Incógnitas que describen el movimiento del satélite  $r_j(t)$ .* Éstas son los errores en las coordenadas del satélite en un sistema geocéntrico, los coeficientes de los armónicos del Campo de Gravedad Terrestre, otras perturbaciones, gravitacionales o no, que afectan al satélite, como el viento solar o la presión de radiación solar.
3. *Incógnitas que tienen que ver con el dato observado  $\Delta r_{ij}(t)$ .* Éstas son los parámetros atmosféricos tanto ionosféricos como troposféricos, los estados de los relojes del receptor y del satélite, y los que tienen que ver con la propagación y recepción de la señal.

Una solución donde se determinen simultáneamente todos estos parámetros incógnita es muy compleja; normalmente sólo algún grupo de ellos son los que interesan, considerando el resto como valores conocidos. En general la órbita del satélite se considera conocida cuando se quieren estimar las coordenadas de la estación. Cuando las incógnitas son los Parámetros de Orientación de la Tierra las coordenadas de la estación y el Campo de Gravedad Terrestre se consideran conocidos.

Cuando las observaciones se restringen a una sola estación, el proceso de estimación se restringe a la determinación de las coordenadas de dicha estación.

Con observaciones simultáneas desde varias estaciones y en distintos instantes es posible aumentar el número de parámetros a estimar.

En resumen, el proceso de estimación puede representarse como sigue [55]:

1. Transformación de los datos que envían los satélites en ecuaciones de observación.
2. Correcciones ionosféricas, troposféricas y temporales, previas al proceso de resolución.
3. Cálculo de las órbitas a partir de las efemérides transmitidas en el mensaje de navegación o a partir de las efemérides precisas disponibles, previo al proceso de resolución.
4. Resolución del sistema generado y estimación de los parámetros que se deseen de los ya mencionados: Coordenadas de la estación, Campo de Gravedad Terrestre, Parámetros de Orientación de la Tierra, parámetros geodinámicos, sesgos en la propagación y recepción de la señal.
5. Análisis estadístico de la precisión y la fiabilidad de la estimación.

## 1.5. Sistema de Posicionamiento Global (GPS)

Uno de los objetivos fundamentales de la geodesia espacial es la asignación de coordenadas a estaciones a partir de observaciones de satélites artificiales. Las coordenadas de las estaciones pueden estar referidas a un sistema de referencia geocéntrico, respecto a otra estación o respecto a un conjunto de varias estaciones.

La posición de una estación con respecto a un sistema geocéntrico terrestre se denomina *posicionamiento puntual o absoluto*, las coordenadas así obtenidas se denominan absolutas, mientras que si la posición está referida a otro punto se denomina *posicionamiento relativo* y también las coordenadas se denominan de esta manera.

Para la determinación de las coordenadas absolutas geodésicas de estaciones, los métodos de Geodesia Espacial utilizan medidas de distancia, diferencia de distancia, direcciones o combinaciones de estas medidas. En el posicionamiento absoluto se necesita conocer las coordenadas precisas del satélite

observado, para poder resolver el modelo de ecuaciones en que intervienen el origen del sistema terrestre considerado, la estación y el satélite. La incógnita de este modelo es el vector geocéntrico de la estación de observación.

Las estaciones determinadas con posicionamiento absoluto son los puntos de control que materializan un sistema de referencia al cual referir coordenadas relativas.

El sistema GPS (*Global Positioning System*), fue creado por el Departamento de Defensa (DoD) de los Estados Unidos en 1973, para establecer un sistema de navegación pasiva utilizando medidas de distancia, está materializado por la constelación de satélites NAVSTAR (*Navigation Satellite by timing and ranging*), emisores de radiofrecuencias que proporcionan un marco de referencia espacio-temporal con cobertura global, independientemente de las condiciones atmosféricas, de forma continua en cualquier lugar de la Tierra. Aunque en un principio se concibe con fines militares, en 1983 el Departamento de Defensa decide la desclasificación parcial del sistema, manteniendo una degradación en la señal denominada Disponibilidad Selectiva (SA) pero posibilitando su utilización para otros fines, principalmente geodésicos y geofísicos. El 1 de Mayo de 2000 se desclasifica totalmente el sistema quedando su utilización para usos civiles comerciales y científicos sin ningún tipo de restricción [70].

El conjunto de satélites GLONASS (*Global Navigation Satellite System*), fue desarrollado por la Unión Soviética desde 1970, pero hasta 1988 no fue ofrecido su uso a la comunidad internacional. Al igual que el sistema GPS, de la constelación NAVSTAR, está formado por tres sectores: (i) el espacial constituido por una constelación de satélites situados también de forma que proporcionen una cobertura global y en todo momento, y cuyos relojes también proporcionan una escala temporal, (ii) el sector de control con estaciones situadas en el área de Moscú y en los alrededores de Rusia, (iii) el sector usuario formado por receptores que usan la señal de la misma forma que el sistema anterior para obtener posición del satélite en el sistema de referencia PZ-90 (*Parametry Zemli-1990*), velocidad y tiempo en su propia escala.

Hoy día existen receptores que pueden recibir señales de ambas constelaciones, y aunque ambos sistemas son autónomos y tienen cada uno su propio

sistema de referencia y su propia escala de tiempo, es posible utilizarlos de forma combinada, lo que amplía la cantidad de satélites disponibles en cada momento, y que puede ser importante en lugares de visibilidad reducida tipo desfiladeros, barrancos y áreas boscosas. El aumento del número de satélites también permite seleccionar aquellos que presentan una mejor geometría. En la actualidad la constelación de satélites GALILEO, de propiedad europea, viene a aumentar el número de satélites y prestaciones de los sistemas anteriores, ya que la intención es la compatibilidad en el uso de observaciones provenientes de cualquier sistema. Su completa operatividad está prevista para el 2005.

De ahora en adelante nos centraremos en el sistema GPS ya que son datos de este sistema los que se han usado para desarrollar esta tesis.

En resumen, el método de posicionamiento con GPS consiste en determinar la posición de estaciones terrestres, marítimas o aéreas. Este procedimiento proporciona unas coordenadas cuya precisión depende del receptor, de su capacidad o su autorización para recibir la señal del satélite y del modelo de ecuaciones utilizado.

### 1.5.1. Estructura de la señal

Los satélites de la constelación NAVSTAR transmiten en dos frecuencias de la banda  $L$ :  $L1 = 1575,42$  MHz y  $L2 = 1227,6$  MHz y en tres códigos pseudoaleatorios <sup>1</sup>. El código de adquisición  $C/A$ , con una velocidad de código de 1023 MHz, un periodo de un milisegundo y es usado principalmente para adquirir el código de precisión  $P$ . El código  $P$  tiene una velocidad de código de 10230 MHz, un periodo de siete días y es el principal código de medición. El código  $Y$  se usa en lugar del código  $P$  cuando se restringe el uso civil, esta restricción se denomina anti-perturbación (AS). El código  $C/A$  está disponible en la frecuencia  $L1$  mientras el código  $P$  lo está en las dos,  $L1$  y  $L2$ . Todos los satélites transmiten en la misma frecuencia pero se identifican por una asignación de código pseudoaleatorio individual denominada *Pseudorandom noise* (PRN). Debido a las características de la señal, el sistema tiene un gran margen de resistencia a las interferencias. Cada satélite transmite un mensaje de

---

<sup>1</sup>Secuencia ordenada y fija de transmisiones entre dos estados (1, -1). Presentan una distribución espectral de energía correspondiente a un ruido blanco

navegación con los elementos de su órbita, comportamiento de su reloj y mensajes de estado. Además posee un almanaque que da los datos aproximados del resto de satélites activos, con lo que una vez adquirido el primero se facilita la adquisición del resto.

La estructura de la señal GPS es una señal compleja, modulada y centrada en la frecuencia de la portadora pero con un cierto ancho de banda, es decir, que la energía transmitida se distribuye en un espectro continuo de frecuencias alrededor de la portadora. Además debe satisfacer multitud de requerimientos:

- Permitir distintos niveles de precisión.
- Identificar al satélite que envía la señal.
- Transmitir información sobre posición, reloj, etc, del satélite en cuestión.
- Anular, en lo posible, los efectos de propagación de la señal, a través de la atmósfera, sobre la medición.
- Permitir la medición tanto de la distancia como de la velocidad relativa satélite/receptor.

De entrada, es esencial la sincronización de todas las señales generadas en el satélite, y a su vez de éstas con la escala de tiempo GPS. Para ello, varios *relojes atómicos* son transportados en el satélite, los cuales mantienen una hora muy estable con relación al tiempo GPS. Estos relojes están conectados de forma que producen una frecuencia patrón de  $f_0 = 10,23$  MHz; de ella se van a derivar todas las demás frecuencias y señales generadas en el satélite.

### 1.5.2. Ondas Portadoras

Existen dos ondas portadoras, ambas en la banda L de microondas, en la zona del espectro reservada a este sistema de navegación según la tabla 1.1. Ambas se obtienen de multiplicar por 154 y 1204, respectivamente, la frecuencia  $f_0$ .

Se escogen estas dos frecuencias porque, estando en la zona del espectro menos afectada por alteraciones en la propagación a través de la ionosfera,



están lo suficientemente separadas como para permitir, en receptores bifrecuencia, el cálculo del retraso ionosférico.

Todos los satélites transmiten con las mismas dos frecuencias de onda portadora, por lo que es necesario sintonizar a cada uno de los satélites.

Portadora	Frecuencia	Longitud de onda en cm
L1	$154 * f_0 = 1575,42 \text{ MHz}$	19,04
L2	$120 * f_0 = 1227,60 \text{ MHz}$	24,44

Tabla 1.1: Características de las portadoras

### 1.5.3. Descripción general del sistema GPS

Este sistema está provisto de dos niveles de precisión, el Servicio de Posicionamiento Estándar (SPS) y el Servicio de Posicionamiento Preciso (PPS).

El SPS está disponible a todos los usuarios de forma continua sin coste alguno, consta de la señal L1 con un código de adquisición (C/A), también llamado código civil y un mensaje de navegación (D). Este servicio proporciona una predicción de posicionamiento absoluto con una precisión de 100 m. horizontalmente y 156 m verticalmente, así como una precisión en la transferencia de tiempo a Tiempo Universal Coordinado (UTC) dentro de los 340 ns. Hoy día con la desclasificación del sistema la precisión es mayor; 10 m horizontal y 56 m en vertical.

El PPS es de alta precisión y de uso militar, disponible de forma continua para todos los usuarios autorizados por los Estados Unidos a través de las frecuencias L1 y L2 mediante un código preciso (P) que se adquiere a través de las dos frecuencias. La precisión a través de este código debido a los errores considerados como retardo se considera menor que 6 m

El sistema consta de tres partes principales:

1. *Segmento Espacial*, formado por una constelación de satélites que transmiten señales moduladas a partir de relojes atómicos altamente estables instalados a bordo.

2. *Segmento de Control*, consistente en estaciones terrestres distribuidas por toda la Tierra, para el seguimiento de los satélites y controlar sus órbitas.
3. *Segmento de Usuarios* formado por receptores pasivos que utilizan la señal de los satélites para obtener de ella la posición del satélite en el sistema de referencia WGS-84 (*World Geodetic System-1984*), su velocidad y tiempo en su propia escala.

El Segmento Espacial, cuando está totalmente operativo, está formado por una constelación de 27 satélites orbitando alrededor de la Tierra en seis planos. Los satélites operan en órbitas circulares de 20,200 kilómetros de altitud inclinadas 55 grados con un periodo de 12 horas sidéreas. El espaciamiento entre los satélites es tal que siempre se vean cuatro satélites como mínimo desde cualquier lugar de la Tierra y en cualquier momento. Cada satélite está diseñado para emitir un par de señales de radiofrecuencia en la banda L, y en los tres códigos mencionados. Sobrepuestos a estos códigos están los siguientes datos:

1. Los datos de observación que constituyen los observables básicos, pseudodistancia y fase.
2. Los datos de navegación constituidos por parámetros de efemérides y reloj de los satélites, parámetros de Tiempo Universal Coordinado (UTC) y parámetros ionosféricos.
3. Datos de estado operativo del satélite.

El estimador estadístico indicador de la exactitud en los datos de navegación referentes al reloj y efemérides de un satélite particular denominado URA (*User range accuracy*), representa la desviación típica de los errores transmitidos por el satélite en los datos de navegación mencionados y que afectan a la distancia entre el receptor y el satélite que dependen del segmento espacial y de control. El estimador no incluye los errores relativos al segmento usuario ni a los debidos a la propagación de la señal. Este estimador es enviado en el mensaje de navegación a través de un índice cuyos valores se encuentran entre 0 y 15, y cuya correspondencia en metros se puede ver en la figura 1.1. En ella se han representado únicamente los valores de 0 a 8, ya que para datos

cuyo índice es superior a 8 el error es tan grande que hace inútiles las observaciones.

El error que combina los tres segmentos implicados en GPS se denomina URE (*User Range Error*).

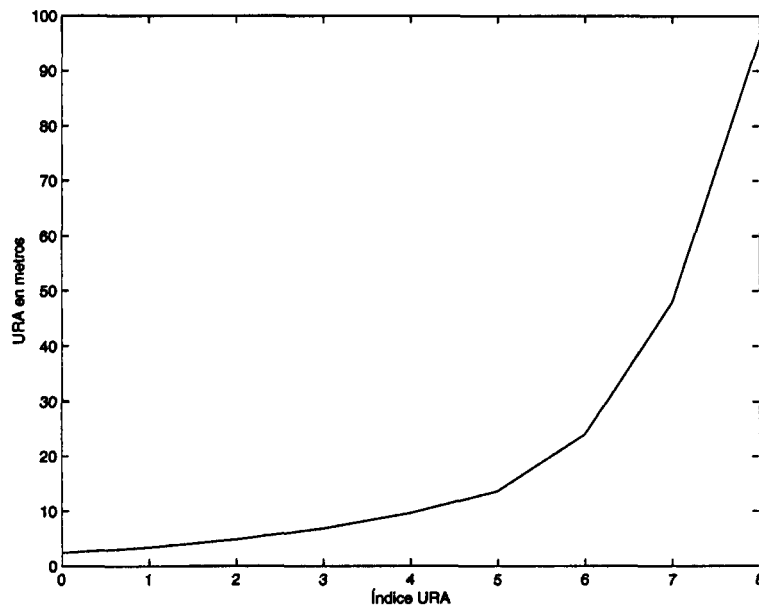


Figura 1.1: Exactitud de las efemérides transmitidas (URA)

El Segmento de Control incluye una estación maestra de control (MCS, localizada en la base aérea de Falcon, Colorado), 5 estaciones de seguimiento (Hawaii, Kwajalein, Ascension Island, Diego Garcia, Colorado Springs) y antenas de tierra localizadas alrededor de la Tierra. Las estaciones de seguimiento utilizan un receptor de GPS especial para seguir pasivamente todos los satélites a la vista. La información de las estaciones de seguimiento es procesada en la estación maestra de control para determinar los valores de efemérides y reloj de los satélites y actualizar los mensajes de navegación de cada satélite. Esta información de actualización es enviada a los satélites vía las antenas de tierra.

En todo el sistema, la sincronización horaria es esencial, por ello, todas las estaciones de control disponen de relojes atómicos extremadamente estables. A su vez, la estación de Colorado Springs está conectada a una batería de relojes

atómicos del observatorio Naval de Washington donde se mantiene el Patrón oficial de hora en los EEUU.

El tiempo oficial del sistema es entonces mantenido por el conjunto de relojes de las estaciones de control, y se conoce como escala de tiempo GPS. Esta escala está referida a la escala de Tiempo Universal Coordinado (UTC), mantenida por el Observatorio Naval de Estados Unidos (USNO). El instante cero se define como la medianoche del 5 de enero de 1980, su unidad es la semana GPS definida como 604,800 segundos de tiempo GPS. El tiempo GPS y el tiempo UTC difieren puesto que el tiempo GPS es una escala continua y el UTC se corrige periódicamente un número entero de segundos para acercarla a la escala de Tiempo Universal (UT). Además existe una inherente pero controlada deriva entre UTC y GPS que el segmento de control mantiene dentro de un orden del microsegundo.

Los satélites, a su vez, disponen de varios relojes atómicos a bordo. Son extremadamente estables, en especial en un ambiente tan poco perturbado como el que disfrutan. Sin embargo adolecen de ciertas derivas, que las estaciones de control han de calcular, al tiempo que sus posiciones. Esto les permite determinar los coeficientes de un polinomio de segundo grado que modela el desvío del reloj del satélite con relación a la escala de tiempo GPS. Estos datos son también inyectados a los satélites para su difusión en el mensaje de navegación. Todo ello va a permitir que el equipo receptor del usuario pueda corregir de forma automática sus mediciones, como si el reloj del satélite estuviera sincronizado con el tiempo GPS.

El Segmento de Usuario consiste en una variedad de receptores que, operando pasivamente con las señales de radiofrecuencia recibidas de los satélites, pueden proporcionar datos de posición, velocidad y tiempo con una precisión muy variada dependiendo del modelo de receptor.

Hay que partir de la idea de que el sistema GPS fue concebido como sistema de navegación en tiempo real. Esto, por tanto, definió los requisitos mínimos que debían cumplir las señales que los satélites debían transmitir para asegurarse ciertos niveles de exactitud en la determinación de la posición en tiempo real, según el tipo de usuario al que fuera dirigido. A partir de su implantación

se ha investigado y desarrollado multitud de aplicaciones y técnicas de medición que permiten incrementar las exactitudes inicialmente previstas en varios ordenes de magnitud.

Al hablar anteriormente de la precisión esperada del sistema se debe tener en cuenta que el comportamiento está afectado por dos fenómenos: por una parte la influencia que ejerce la geometría de los satélites, conocida como *dilución de la precisión* (DOP) y por otra la magnitud en los errores que dependen directamente de la medida, en general se denominan *retardos* y se agrupan bajo el nombre genérico ya definido URE. Bajo la suposición de que estos errores se distribuyen normalmente con media cero, y que están incorrelados, la precisión se puede expresar a través de la desviación típica del error (RMS) como sigue [57]:

$$RMS_{error} = RMS_{URE} * RMS_{DOP} \quad (1.5)$$

La dilución de la precisión se puede calcular para cualquier configuración de satélites en cualquier instante, tal como se ve desde una localización particular.

Algunos de estos errores tienden a estar correlados para un mismo satélite. Por ejemplo, el error de sincronización del reloj del satélite y el error en las efemérides del satélite suelen tener correlación negativa, lo que se manifiesta en que a veces se cancela uno con otro; otra correlación se da también en los errores debidos a la propagación en la Troposfera e Ionosfera, que en este caso es positiva. De las observaciones realizadas entre el 15 de Enero y el 3 de Marzo de 1991, alrededor de 11,000 [57], desde las estaciones que componen el segmento de control, se elaboró la tabla 1.2. En ella sólo se ha reflejado el error en los parámetros de posición de las estaciones, usando la relación (1.5), que puede transformarse en:

$$SEP = RMS_{URE} * RMS_{PDOP} \quad (1.6)$$

Donde el error total en los parámetros de posición se ha sustituido por el Error Esférico Probable (SEP), y el DOP por su correspondiente dilución de la precisión en posición (PDOP). Puesto que el SEP es más pequeño que el RMS, la estimación puede ser un poco optimista

Criterio	PPS	SPS sin S/A
SEP tri-dimensional en posición en m	8,3	22
CEP bi-dimensional en posición en m	4,5	12
$RMS_{PDOP}$	3,6	3,6
$SEP/RMS_{PDOP} = RMS_{SURE}$	2,3	6
CEP error probable circular a nivel confianza 50		
SEP error esférico a nivel de confianza 50		
PDOP dilución de la precisión en posición		

Tabla 1.2: Precisiones en posición para PPS (Servicio de Posicionamiento Preciso) y SPS (Servicio de Posicionamiento Estándar)

Hay que destacar que estos valores son mejores de lo que serán para cualquier receptor medio, ya que los receptores de las estaciones de control son de gran calidad y están situados en zonas estables.

Los errores agrupados bajo el nombre de retardos son principalmente los siguientes :

1. Error en las efemérides de los satélites.
2. Error del reloj de los satélites respecto a la escala de tiempo GPS.
3. Retardo en la recepción de la señal debido a la propagación de ésta en la Ionosfera.
4. Retardo en la recepción de la señal debido a la propagación de ésta en la Troposfera.
5. Reflexión y desviación de la señal alrededor del receptor, se denomina *multicamino* (Multipath).
6. Error en el receptor al efectuar la medida.

A continuación se comentarán brevemente y posteriormente se profundizará en el concepto de dilución geométrica y su importancia en la selección de ecuaciones.

Se debe mencionar no obstante que existen otros errores de menor cuantía que también se consideran retardos, como son los efectos relativistas de la

velocidad de la luz, y los retardos que sufre la señal en el propio instrumento emisor y receptor.

#### 1.5.4. Error en las efemérides de los satélites

Este error es el resultado de que en el mensaje de navegación del satélite no se transmiten las efemérides correctas para la localización del satélite. Un propósito del segmento de control es predecir las efemérides de los satélites e incluir estos datos en el mensaje de navegación de los satélites. Los datos necesarios para tal predicción son los que se recogen en las estaciones de control, que se encuentran distribuidas uniformemente en longitud, lo que permiten un seguimiento continuo de todos los satélites de la constelación. Estas estaciones poseen relojes altamente estables, y utilizan toda la información disponible tanto de pseudodistancia como de fase en ambas frecuencias, para predecir las posiciones de los satélites. En cada estación también se toman datos meteorológicos para realizar estimaciones del retardo que sufre la señal al atravesar la Troposfera. Se utilizan datos de 4 semanas para estimar las trayectorias de los satélites, y posteriormente realizar la propagación de las órbitas hacia el futuro. Estas predicciones son enviadas a los satélites una vez al día para que las transmitan en su mensaje de navegación. Estas efemérides transmitidas son por tanto predicciones de posiciones futuras de los satélites a partir de observaciones pasadas. Frente a estas efemérides también existen las efemérides verdaderas de los satélites que se calculan *a posteriori* con los datos observados y que están disponibles con posterioridad, estas efemérides se denominan precisas, y existen diversos organismos que las calculan a través de procesos de ajuste.

El Servicio Internacional GPS para Geodinámica (IGS) a través de un sistema global de estaciones de seguimiento de los satélites de la constelación GPS, de centros de datos y de centros de análisis, produce una serie de datos de alta calidad geodésica para uso de un amplio rango de aplicaciones científicas y técnicas [33]. Los datos GPS en formato RINEX (*Receiver INdependent EXchange format*) de aproximadamente 150 estaciones del IGS que operan permanentemente son usados para generar los siguientes productos:

1. Efemérides de alta precisión.
2. Coordenadas y velocidades de las estaciones de seguimiento del IGS.

3. Información sobre los relojes de los satélites y los relojes de las estaciones de seguimiento.
4. Parámetros de Orientación de la Tierra.
5. Información ionosférica.
6. Información troposférica.

El IGS consigue estos productos a través de los distintos Centros que componen el servicio y que son:

1. Red de estaciones de seguimiento.
2. Centros de datos.
3. Centros de análisis.
4. Coordinador de análisis.
5. Centros asociados de análisis a nivel regional y global.
6. Oficina Central.
7. Centro de Gobierno.

Los datos de la red del IGS que observan continuamente, figura 1.2, son recogidos en los Centros de Datos. Normalmente siete Centros de Análisis, independientemente y con diferentes métodos, analizan los datos y producen los productos IGS, estos centros son:

- Centro de Determinación de Órbitas en Europa, Universidad de Berna, Suiza, (COD).
- Recursos Nacionales para estudios Geodésicos, Ottawa, Canadá (EMR).
- Centro Europeo de Operaciones Espaciales de la Agencia Espacial Europea. Darmstadt, Alemania (ESOC/ESA).
- Centro de Investigaciones Geodinámicas, Potsdam, Alemania (GFZ).
- Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, USA (JPL).
- Estudios Nacionales Geológicos, Silver Spring, USA (NGS).





- Instituto de Oceanografía, California, USA (SIO).

Los datos de órbitas de cada Centro de análisis se comparan y combinan por el coordinador de análisis, produciendo las órbitas mejoradas y unificadas oficiales del IGS. Los Centros asociados de análisis a nivel global combinan las soluciones obtenidas para las coordenadas de las estaciones que componen la redes regionales para obtener una única red global de coordenadas. La Oficina Central localizada en el JPL (*Jet Propulsion Laboratory*) se encarga de la coordinación para que todo funcione, y el Centro de Gobierno formado por quince miembros de los diferentes países es el encargado de tomar las decisiones políticas.

Las efemérides precisas calculadas por los diferentes centros son más o menos del mismo nivel de precisión, y esta se mantiene en torno a 3-5 cm de desviación típica. Esta estimación se hace comparando las soluciones calculadas con datos de dos días adyacentes para un mismo intervalo de tiempo. Esta precisión suele darse a través de tres componentes en un sistema de coordenadas ligado al satélite. En este sistema, el eje  $Z$ , está dirigido en la dirección radial del satélite, el eje  $Y$  en la dirección tangencial a la trayectoria de la órbita del satélite y el eje  $X$  en la dirección normal al plano orbital formando un triedro directo. La figura 1.3 muestra el sistema en relación a un sistema convencional Celeste, y la ecuación (1.7) muestra la transformación entre uno y otro [3].

$$\begin{bmatrix} X' \\ Y' \\ Z' \end{bmatrix} = R_3(\omega + v) \cdot R_1(i) \cdot R_3(\theta_m^G + \Omega) \begin{bmatrix} -Z \\ -Y \\ -X \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

Donde:

$\omega$  argumento del perigeo del satélite,

$v$  anomalía verdadera,

$i$  inclinación de la órbita,

$\theta_m^G$  tiempo sidéreo medio de Greenwich,

$\Omega$  Ascensión recta del nodo ascendente y

$R_1$ , y  $R_3$  son rotaciones en el espacio respecto de los ejes  $X$ ,  $Z$  respectivamente.

En la figura 1.4 se muestran las variaciones para las soluciones calculadas con datos de los días 6 y 7 de Octubre de 1993 en un periodo de 6 horas entorno a medianoche (datos tomados del Jet Propulsion Laboratory). Este centro obtiene diferencias con una desviación típica del orden de 0,12, 0,22 y 0,25 metros en las componentes radial, normal y tangencial respectivamente. Estos datos son similares para otros centros que calculan efemérides precisas [57]. En los últimos años la calidad de las soluciones calculadas han mejorado notablemente hasta alcanzar una precisión del orden de 3-5 cm [36].

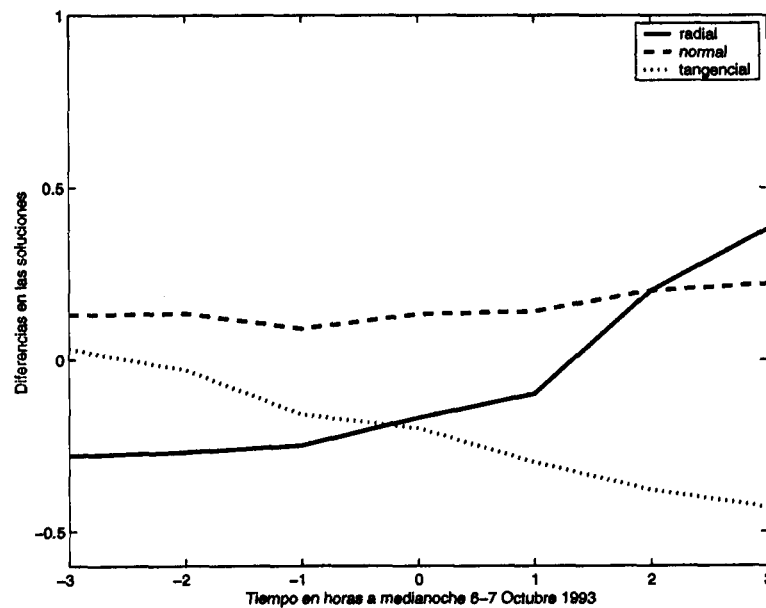


Figura 1.4: Diferencias a medianoche en soluciones precisas (JPL)

Para la obtención de estas precisiones los receptores implicados utilizan medidas de fase y pseudodistancia en las dos bandas de frecuencias L1 y L2. Durante el procesamiento se elimina:

- El efecto ionosérico mediante la combinación lineal de observaciones denominada ionosfera libre.

- El efecto troposférico mediante estimación estocástica de la componente húmeda en cada estación.
- La desviación del centro de fase respecto del centro de masas del satélite, y la desviación del centro de fase respecto del punto de estación del receptor, mediante la correcta calibración de ambos.
- Los Parámetros de Orientación de la Tierra mediante estimación explícita conjunta con el resto de parámetros estimados.
- Los fenómenos de marea Terrestre y efectos relativistas mediante modelos adecuados.

En la figura 1.5 se observa la diferencia entre las efemérides transmitidas en el mensaje de navegación y las efemérides precisas calculadas por el centro ESOE en un periodo de 24 horas para el satélite PRN25. En estas diferencias, los valores de la desviación típica durante el día fueron de 1,44 m para la componente radial, 1,49 m para la componente normal, 2,41 m para la componente tangencial. Se puede resumir que para todos los satélites esta diferencia se estima en una desviación típica cuya media a lo largo de un periodo de 4 meses es de 1,3 m en la componente radial, 3,6 m en la componente normal y 4,7 m en la componente tangencial [57]. La componente radial, que llega a ser menor que las otras dos en un orden de 3 a 4, es la que produce mayor influencia en el error en la distancia entre receptor y satélite.

En relación con estas diferencias, podría pensarse que parte de ellas son debidas a que el marco de referencia usado para las efemérides precisas, ITRF00 (Marco Internacional de Referencia Terrestre 2000), difiere del usado para dar las efemérides transmitidas, en este caso el WGS-84 (Sistema Geodésico Mundial 1984). Realizando una transformación de 7 parámetros para pasar de un sistema a otro y poder comparar en el mismo sistema de referencia se puede comprobar que los valores medios de las diferencias entre las efemérides precisas y las transmitidas se mantienen en 1,2 m, 3,2 m y 4,5 m respectivamente, valores muy similares a los dados anteriormente.

En la tabla 1.3 se resumen los resultados vistos en esta sección, de la que se deduce que la diferencia entre las efemérides precisas y las transmitidas es significativamente mayor que las precisiones en el cálculo de las efemérides

precisas. Las unidades están en metros.

### 1.5.5. Error del reloj de los satélites respecto de la escala de tiempo GPS

Este error es resultado de que en el mensaje de navegación del satélite éste no transmite correctamente el instante de emisión de la señal. Lo comentado anteriormente para la predicción de las efemérides a través del segmento de control se realiza también para predecir el comportamiento de los relojes de los satélites, esta predicción se incluye en el mensaje de navegación como coeficientes de un polinomio interpolador de segundo grado que permita hacer la corrección necesaria al tiempo de emisión de la señal. Frente a estos coeficientes determinados por predicción, el IGS también estima este error para cada instante de observación, como parámetro en el proceso de cálculo llevado a cabo por los centros de análisis del IGS. El efecto que los fenómenos relativistas tienen sobre los relojes de los satélites se debe a que éstos se mueven a grandes velocidades. Por otra parte la diferencia de potencial entre los satélites y los receptores no es despreciable; y por último, la rotación de la Tierra que afecta a los receptores tampoco debe despreciarse. Las consecuencias que todo ello ocasionan pueden resumirse en las tres siguientes:

1. Existe una desviación constante de la frecuencia del reloj del satélite cuando se observa desde tierra. Este efecto se puede corregir modificando en tierra, antes del lanzamiento del satélite, la frecuencia del reloj en esa cantidad constante.
2. La excentricidad de la órbita del satélite causa una desviación periódica en el reloj que varía con la posición del satélite en el plano de su órbita; es de tipo sinusoidal.
3. La rotación de la Tierra produce un retraso durante el tiempo de vuelo de la señal desde el satélite al receptor.

Todos estos efectos deben corregirse como ya se ha apuntado en la sección anterior ya que de otro modo se manifestarán en grandes errores en la estimación de los parámetros de los relojes de los receptores; mucho más que en

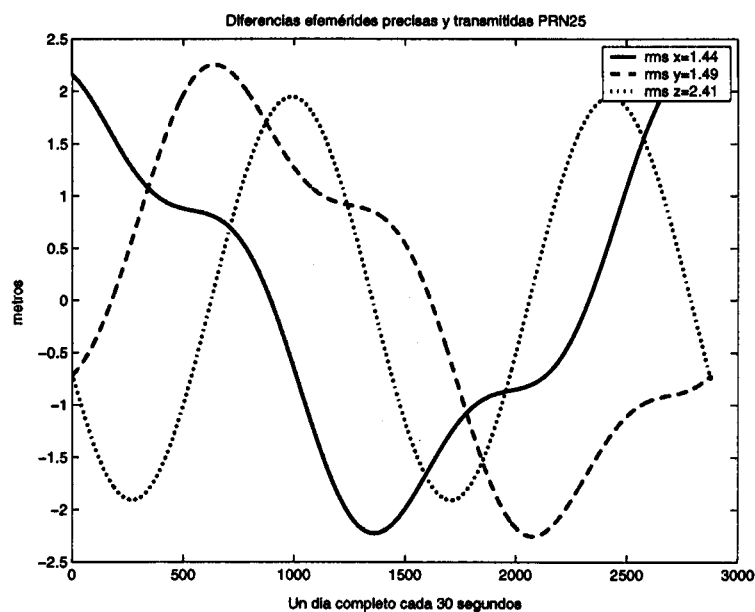


Figura 1.5: Comparación de las efemérides transmitidas en el mensaje de navegación con las soluciones precisas de ESOC correspondientes al 6 de Septiembre de 2002

Componente	24 h. ESOC	24 h. JPL	4 meses *	Precisas
radial	1.44	0,56	1,3 (1,2)	0,12
normal	1.49	1,67	3,6 (3,2)	0,22
tangencial	2.41	2,67	4,7 (4,5)	0,25

\* entre paréntesis los valores transformados al WGS-84

Tabla 1.3: Efemérides precisas y transmitidas

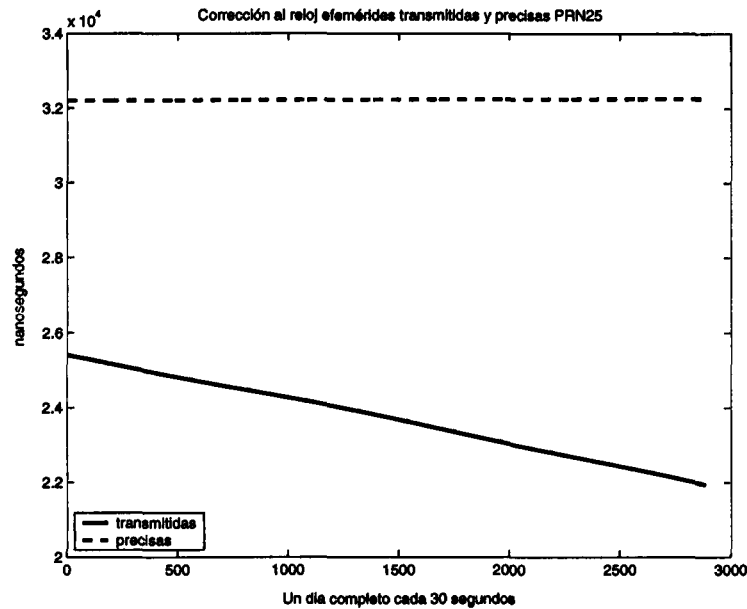


Figura 1.6: Correcciones al reloj precisas y por polinomio interpolador

las posiciones de los receptores. Teniendo todo ello en cuenta, las correcciones a los relojes de los satélites obtenidas por los centros del IGS tienen una alta precisión del orden de 0.22 ns de desviación típica, que equivale a unos 0.06 m en distancia. El reloj de referencia que se utiliza para las determinaciones precisas de los parámetros de los relojes de los satélites es un reloj de alta precisión de hidrógeno situado en la estación Algonquin Park (Canadá). En la figura 1.6 se observa la diferencia entre las correcciones al reloj realizadas usando la información sobre el reloj del satélite del IGS y usando datos transmitidos.

Los satélites GPS se pueden agrupar en dos clases dependiendo de la variación a lo largo de un día en la diferencia entre las correcciones precisas y las correcciones transmitidas en el mensaje de navegación. Los satélites del primer grupo se caracterizan por estar afectados de una dispersión no sistemática que no afecta a los del segundo grupo, esto se traduce en que las diferencias con las correcciones precisas son mayores en el caso del grupo de satélites afectados por esta dispersión. El valor estimado de estas diferencias es de 79,9 ns y 4,5 ns respectivamente.

En ambos grupos de satélites existe una componente sistemática de error que se manifiesta en una tendencia lineal, y que es similar para los dos grupos; su estimación es el orden de 10,3 ns. La diferencia total entre los valores precisos y los transmitidos para la corrección de los relojes de los satélites se puede estimar por tanto como la componente cuadrática de ambos valores. En la tabla 1.4, se resumen estas diferencias, de ella se deduce que la diferencia entre las correcciones precisas y las transmitidas es significativamente mayor que las precisiones en el cálculo de las correcciones precisas.

Gupo	no sistemática	sistemática	total
Grupo 1	4,5	10,3	$\sqrt{(4,5)^2 + (10,3)^2} = 11,2$
Grupo 2	79,9	10,3	$\sqrt{(79,9)^2 + (10,3)^2} = 80,6$

Tabla 1.4: Correcciones al reloj precisas y transmitidas en ns

### 1.5.6. Troposfera e Ionosfera

En todas las observaciones de satélite, la influencia de la atmósfera es muy importante. Ésta se define como una envoltura que circunda la Tierra hasta aproximadamente una altitud de 30.000 Km. Su división se puede hacer atendiendo a criterios de temperatura o según la composición química. Sin entrar en detalle en ellas, diremos que la Troposfera atiende a la primera división y la Ionosfera a la segunda. Estas son importantes en las observaciones GPS:

- Troposfera, definida por la más baja región de la atmósfera, limitada por la superficie de la Tierra y una altura en que la temperatura desciende hasta  $-63^{\circ}$  C, aproximadamente hasta 15 Km. En ella es muy importante la influencia climática y estacional del lugar, la disminución de temperatura con la altura se debe a la influencia de la radiación terrestre.
- Ionosfera, es la región de la alta atmósfera en la cual la ionización es tal que se producen reflexiones en las emisiones electromagnéticas. En ésta, la diferente ionización está producida por interacciones atmosféricas debidas a la radiación solar principalmente, es por tanto importante la influencia diurna y estacional.

La modelización de la Troposfera e Ionosfera es necesaria para poder calcular las correcciones que deben sufrir las observaciones. La variabilidad de la



Ionosfera es mucho mayor que la de Troposfera y más difícil de modelizar. La variación ionosférica puede variar según la elevación del satélite entre 5 – 50 metros en el cénit. En periodos de alta actividad solar puede llegar a los 100 m, mientras que la Troposfera varía solamente entre 2-3 metros en el cénit. Además, la Ionosfera cambia rápidamente en valor absoluto pudiendo variar como mínimo en un orden de magnitud durante un mismo día. La Troposfera no cambia más de un 10 %, incluso durante largos períodos de tiempo.

Al cuantificar los efectos en la propagación de las señales al atravesar la Ionosfera el parámetro que más afecta es el contenido total de electrones (TEC). El TEC se define como el número de electrones en una columna vertical de sección  $1m^2$ , cubriendo el espacio desde el satélite al receptor. Un TEC es igual a  $10^{16}$  electrones por  $m^2$ , siendo el máximo valor alcanzado, en periodos de alta actividad solar, de  $10^{19}$  electrones por  $m^2$ . Los modelos para determinar el TEC, pueden ser de dos tipos:

- Empíricos, derivados de la observación de datos.
- Físicos, derivados de principios físicos que describen el comportamiento de la Ionosfera, aunque generalmente también necesitan datos empíricos.

Ningún modelo ni físico ni empírico puede predecir la gran variabilidad de la Ionosfera, por eso el uso de la doble frecuencia de los receptores es preferible para corregir el efecto que usar modelos.

Dado que la Ionosfera es un medio dispersivo la velocidad de propagación depende de la frecuencia. Al estar la señal GPS compuesta por una continuidad de frecuencias, cada intervalo infinitesimal del espectro se propaga a una velocidad determinada denominada *velocidad de fase*, que es de hecho la velocidad de la frecuencia concreta de la portadora. Pero la energía transmitida, y por tanto la información, resulta de una combinación de todos los elementos infinitesimales, y por tanto se propaga a una velocidad que es la combinación de todas ellas, conocida como *velocidad de grupo*. Esta velocidad depende de la portadora, que es donde se encuentra el valor máximo de la señal. Si la señal no estuviera modulada, toda la energía estaría concentrada en la frecuencia de la portadora; en ese caso velocidad de grupo y de fase coinciden. Al utilizar dos frecuencias es posible determinar el efecto que produce la Ionosfera en las

medidas directamente.

La Troposfera no es un medio dispersivo y todos los elementos de frecuencia se propagan a igual velocidad y por tanto velocidad de grupo y fase coinciden. La corrección troposférica tiene que ser evaluada mediante modelos ya que no puede corregirse en base a las dos frecuencias. La señal recibida es refractada por la atmósfera, y esto causa un retraso en la llegada de la señal, al recorrer un camino más largo, y que dependerá del camino. El retraso depende sólo del perfil vertical de la atmósfera y del ángulo de elevación, en el lugar de observación. El perfil de la atmósfera depende a su vez de la temperatura, la presión y el vapor de agua. Los diversos modelos tienen en cuenta estos parámetros. La estimación de la corrección en función de la elevación se puede ver en la figura 1.7.

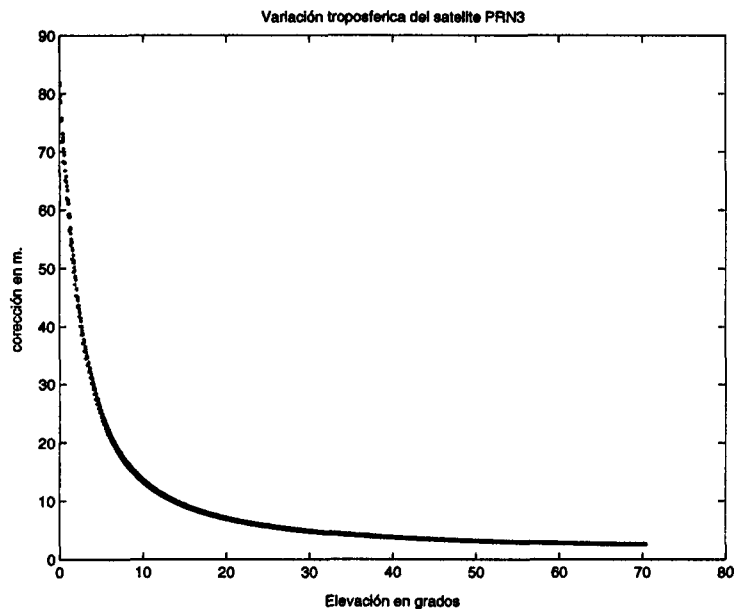


Figura 1.7: Correcciones por efecto troposférico

### 1.5.7. Reflexiones de la señal. Multicamino

Este fenómeno causa distintos efectos para receptores en un entorno donde existen multitud de superficies donde la señal pueda reflejarse, como es el caso de cascos urbanos. El efecto se reduce en lugares despejados, y también en el diseño de las antenas receptoras, en base a anillos concéntricos que evitan que

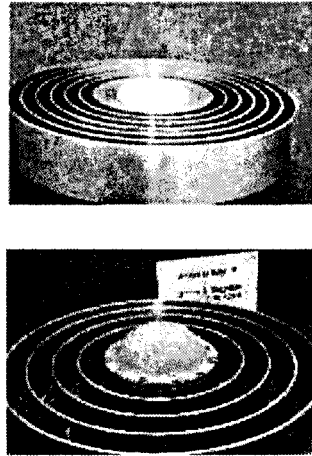


Figura 1.8: Antenas para mitigar el efecto multicamino

el rayo reflejado llegue al receptor, la figura 1.8 es un ejemplo.

El fenómeno se caracteriza por una dispersión especular y difusa. Todas las señales reflejadas en tierra son de naturaleza difusa, y las que lo hacen en superficies reflectantes (agua, metal, etc.) son de naturaleza especular. La señal puede llegar al receptor por dos o más caminos, las señales reflejadas recorren mayor trayectoria, y por tanto tardan más y falsean la medida. La reflexión especular es más importante. Dependiendo de la elevación del satélite y la altura del receptor sobre la superficie reflectante se puede determinar el efecto. La figura 1.9 muestra el efecto de este retraso donde se aprecia la variación en la distancia al satélite  $d\rho_m$  en función de la altura del receptor  $h_r$  y la elevación del satélite  $E_l$ . La figura 1.10 muestra la corrección de este retraso en función de la altura del receptor. Se ha considerado un receptor situado sobre el terreno y otro situado en lo alto de un edificio, dónde podría producirse un mayor efecto de esta corrección.

### 1.5.8. Dilución de la Precisión

La influencia en la solución debido a la posición exacta que tiene el receptor respecto de los satélites se describe a través de la *Dilución de la Precisión (DOP)*. El DOP representa la influencia que la geometría de los satélites tiene sobre las incógnitas del sistema.

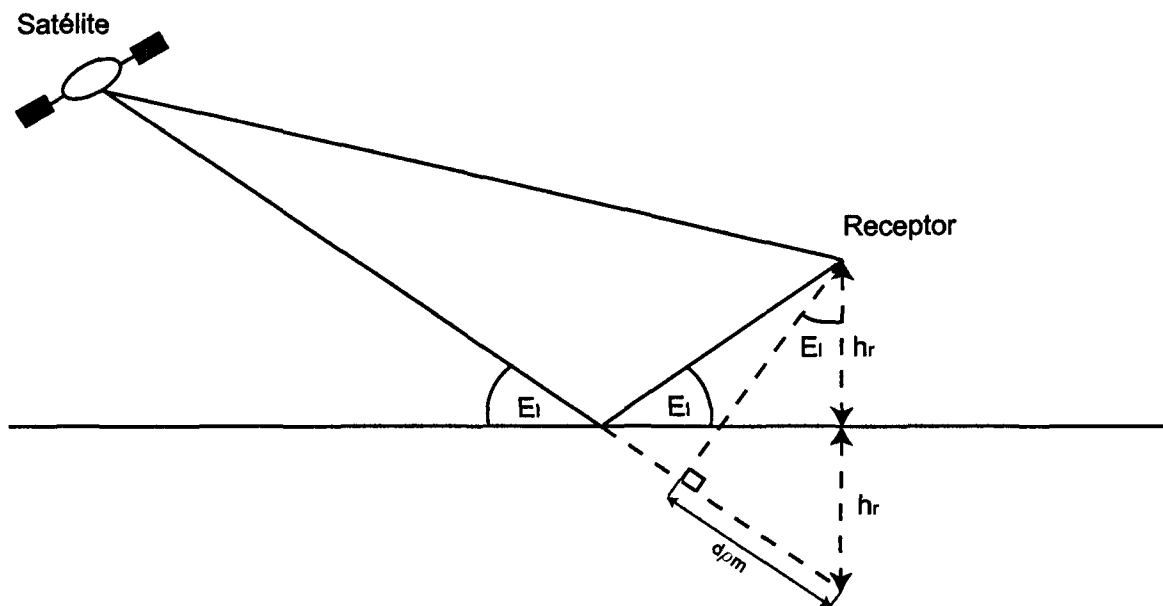


Figura 1.9: Representación esquemática del retraso por multicamino

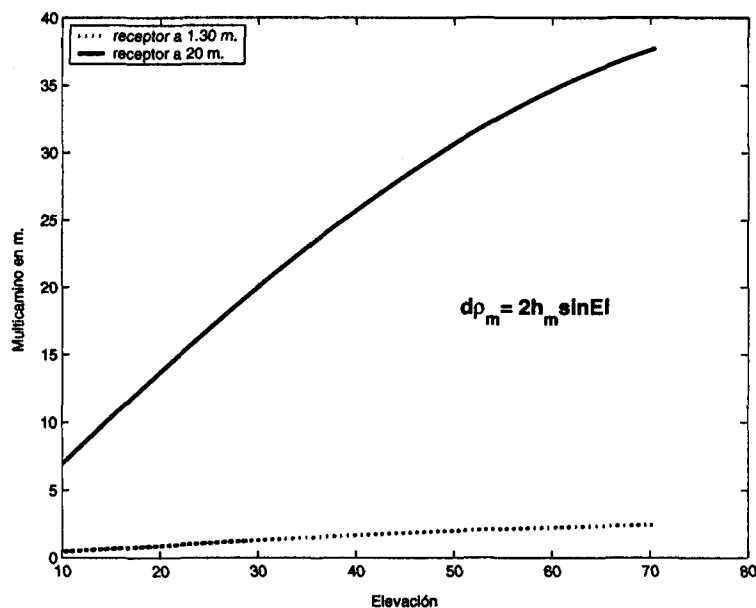


Figura 1.10: Retraso por multicamino frente a elevación para diversos ángulos de elevación

Dado el sistema de ecuaciones lineales, la solución mínimos cuadrados  $\bar{x}$  (ver sección (1.4)) tiene asociada una varianza, también denominada error medio cuadrático (MSE) definido a través del operador esperanza de la forma:

$$MSE(\bar{x}) = E[(\bar{x} - x)(\bar{x} - x)^t] \quad (1.8)$$

Teniendo en cuenta que  $\bar{x}$  se expresa:

$$\bar{x} = (A^t P A)^{-1} A^t P (A x - \varepsilon) = x - (A^t P A)^{-1} A^t \varepsilon$$

sustituyendo en la ecuación (1.8)

$$\begin{aligned} MSE(\bar{x}) &= E[(A^t P A)^{-1} A^t P \varepsilon \varepsilon^t P A (A^t P A)^{-1}] \\ &= (A^t P A)^{-1} A^t P E[\varepsilon \varepsilon^t] P A (A^t P A)^{-1} \end{aligned} \quad (1.9)$$

Para simplificar se pueden suponer los errores en las distancias medidas incorrelados y con la misma varianza  $\sigma^2$  entonces se tiene:

$$E[\varepsilon \varepsilon^t] = \sigma^2 I$$

Siendo  $I$  la identidad, entonces la varianza en la solución es:

$$MSE(\bar{x}) = \sigma^2 (A^t P A)^{-1} \quad (1.10)$$

La matriz  $(A^t P A)^{-1}$  multiplica a la varianza en la medida de distancia para obtener la varianza total en la solución. Esta matriz depende únicamente de la geometría de los satélites, es diagonal suponiendo incorreladas las observaciones y su dimensión es  $n \times n$ , con  $n$  el número de parámetros a estimar en un instante. Esta matriz se denomina *matriz de dilución de la precisión* o *matriz DOP*.

$$(A^t P A)^{-1} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 \dots & 0 \\ \dots & \sigma_{22}^2 \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

El escalar que mide la influencia de la geometría se denomina también *factor DOP* y se define como la raíz cuadrada de la traza de la matriz DOP:

$$DOP = \sqrt{\text{tr}(A^t P A)^{-1}}$$

La traza ( $tr$ ) es la suma de los elementos de la diagonal principal.

Hay diversos factores DOP, según se quiera analizar la influencia de la posición de los satélites en algún subconjunto de los parámetros incógnita o en todos, estos factores se listan a continuación:

- GDOP o dilución geométrica en todas las incógnitas; posición y tiempo del receptor:

$$GDOP = \sqrt{(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 + \sigma_{tt}^2)}$$

- PDOP o dilución de la precisión en posición tridimensional:

$$PDOP = \sqrt{(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2)}$$

- HDOP o dilución de la precisión en posición bidimensional, también llamada horizontal:

$$HDOP = \sqrt{(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2)}$$

- VDOP o dilución de la precisión en posición unidimensional, también llamada vertical:

$$PDOP = \sigma_{zz}$$

- TDOP o dilución de la precisión en tiempo :

$$PDOP = \sigma_{tt}$$

El valor del PDOP suele variar entre 1.5 y 8, y forma parte del DOP que es más genérico, ya que incluye la influencia de la geometría sobre todas las incógnitas del sistema, que ya sabemos no son sólo las de posición. Este valor, que representa el volumen del poliedro formado por los satélites y el observador, nos permiten predecir cuando una configuración de satélites es mejor que otra en base al criterio según el cual la mínima traza ofrece la mejor configuración. El significado geométrico de mínima traza es equivalente a conseguir el máximo volumen del poliedro. Un valor que se considera aceptable para esta traza es

menor que seis [57].

En la figura 1.11 se ha calculado el valor de los factores DOP, para los datos de observación relativos al 6-9-2002 de la estación ALGONQUIN (Canadá), se han utilizado 105 épocas diferentes y un número de 8 satélites cada época.

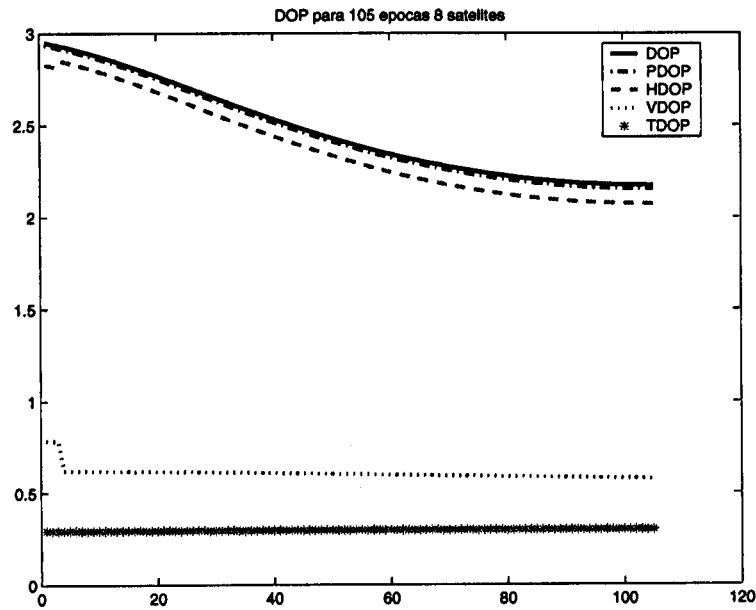


Figura 1.11: Factores DOP

En general para observaciones no incorreladas la varianza en la solución dada en la expresión (1.10) toma la forma:

$$MSE(\bar{x}) = \sigma^2 \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \cdots & \sigma_{22}^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \sigma_{nn}^2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

## Capítulo 2

# Posicionamiento absoluto en GPS

El análisis y tratamiento de datos de satélite implica el estudio, conocimiento y eliminación o determinación del efecto que los errores tienen tanto en los datos como en el modelo matemático adoptado. La existencia de errores aleatorios en las medidas supone considerar las observaciones como sistemas perturbados del modelo ideal matemático que representa la realidad definida por el hecho experimental. Se establecen así unas relaciones funcionales entre las observaciones y las incógnitas. A partir de las medidas realizadas en el proceso observacional se inferirá el valor de las incógnitas objeto de estudio. Este valor tendrá un cierto grado de calidad que dependerá de las medidas y del tratamiento efectuado sobre ellas. Un hecho fundamental en los procesos de observación espaciales es que se realizan más observaciones de las estrictamente necesarias para adoptar un valor para las incógnitas. Como consecuencia de esta redundancia los errores implícitos en cualquier observación pueden controlarse mejor.

En el posicionamiento absoluto se necesita conocer las coordenadas precisas del satélite observado, para poder resolver el modelo de ecuaciones en que intervienen el origen del sistema terrestre considerado, la estación y el satélite. Teóricamente la incógnita de este modelo es el vector geocéntrico de la estación de observación, aunque en la práctica el modelo de ecuaciones introduce otras incógnitas. La figura 2.1 muestra un esquema de la situación de observación en posicionamiento absoluto.



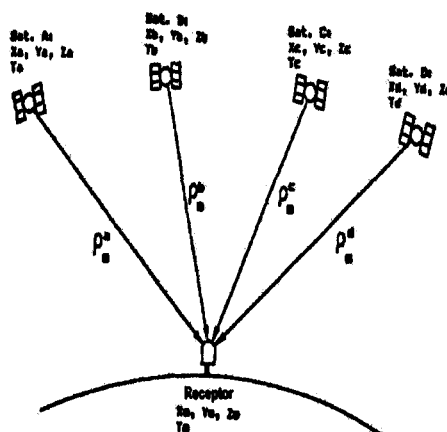


Figura 2.1: Representación esquemática del posicionamiento absoluto

El capítulo está organizado como sigue:

En la primera sección se describe el modelo de ecuaciones basado en un modelo matemático de distancia mas una serie de correcciones que surgen de la experimentalidad de las medidas. Una vez presentado el modelo y puesto que es no lineal en la segunda sección se abordan los métodos de resolución para sistemas no lineales utilizando el enfoque clásico del desarrollo en serie de Taylor truncado en los términos de primer orden, y un enfoque utilizando el desarrollo hasta orden dos. Una vez linealizados los sistemas en la sección tercera se hace una revisión de los principales métodos de resolución directa de sistemas de ecuaciones lineales, ya que los métodos iterativos no se consideran apropiados. En la sección cuarta se considera la importancia que tienen las reordenaciones en las matrices de estructura dispersa con el fin de que los procesos de resolución preserven lo más posible la dispersidad. En la sección quinta se analiza, para un caso concreto de datos de observación proporcionados por el Centro Europeo de Operaciones Espaciales (ESOC), qué estructura de dispersidad presentan los modelos de ecuaciones, las dimensiones y el número de parámetros a estimar y la influencia en la factorización de procesos de reordenación de la matriz, las reordenaciones que se utilizan son las de Dulmage-Mendelsohn y las de Grado Mínimo. Una vez descritos y analizados los sistemas correspondientes a la parte experimental de esta tesis, antes de abordar su resolución en posteriores capítulos, se requiere una serie de correcciones que se describen en la última sección de este capítulo.

## 2.1. Modelo de ecuaciones

El equipo receptor GPS realiza tres tipos de observaciones; Pseudodistancia, tiempo y fase que, aunque ya mencionadas, conviene definir correctamente:

- La pseudodistancia es la medida de distancia entre el satélite y el receptor.
- La fase de la portadora resulta de la comparación de la fase de la señal portadora recibida en el receptor y la generada por el oscilador de dicho receptor.
- El tiempo es el que se mide en la escala del receptor en el momento en que se recibe la señal. Es idéntico para fase y para pseudodistancia y para todos los satélites observados en un instante.

Cada medida a un satélite  $s$  desde una estación receptora  $r$  en un instante  $t$  genera de 1 a 4 ecuaciones, según el tipo de receptor. Los receptores pueden recibir datos de pseudodistancia y/o de fase de la portadora en una y/o dos frecuencias [53]. Las ecuaciones, por tanto, en un instante, pueden ser desde una (sólo una frecuencia y sólo el dato pseudodistancia), a cuatro (si el receptor utilizado recibe en dos longitudes de onda y los datos pseudodistancia y fase de la portadora). La nomenclatura utilizada será:  $P$ , para la pseudodistancia, y  $\phi$ , para la medida de fase. Las ecuaciones se pueden expresar mediante un modelo de distancia más los retardos que se describieron en el capítulo 1.

Aunque la medida suele denominarse pseudodistancia, en realidad, el receptor mide el tiempo de vuelo de la señal que se convierte en distancia multiplicando por la velocidad de la luz. Con estas condiciones la distancia real viene dada por:

$$\rho_r^s = c\Delta t - \text{retardos}$$

$$\Delta t = t_r - t_s$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $\rho_r^s$  es distancia real,  $t_r$  es tiempo de recepción,  $t_s$  es tiempo de emisión.

Así:

$$\rho_r^s = c(t_r - dt_r) - c(t_s - dt_s) - d_I - d_T - d_r - d_i - d_m$$

$$\rho_r^s = c(t_r - t_s) + c(dt_r - dt_s) - d_I - d_T - d_r - d_i - d_m$$

siendo  $t_r - dt_r$  el tiempo medido en el receptor mas el error del reloj del receptor respecto de la escala de tiempo GPS, en el instante de recepción de la señal y  $t_s - dt_s$  es tiempo medido en el satélite mas el error del reloj del satélite respecto de la escala de tiempo GPS en el instante de emisión de la señal.

y los retardos siguientes en unidades de distancia:

$d_I$  propagación de la señal atravesar la Ionosfera,  
 $d_T$  propagación de la señal al atravesar la Troposfera,  
 $d_i$  propagación de la señal en el satélite y en el receptor,  
 $d_r$  propagación de la señal debido a fenómenos relativistas,  
 $d_m$  reflexiones de la señal hasta que es recibida en el receptor.

Si llamamos  $P_r^s$  a la medida efectuada por el receptor, es decir la pseudodistancia:

$$P_r^s = c(t_r - t_s)$$

sustituyendo, despejando y agrupando los retardos de forma genérica tenemos:

$$P_r^s = \rho_r^s - cdt_r + cdt_s + d_I + d_{retardos} \quad (2.1)$$

Para la medida de fase es similar pero en este caso, la fase medida tiene una diferencia entre el número de ciclos de fase hasta que se adquiere la portadora y la fase inicial. A este número entero de ciclos se le denomina *ambigüedad de fase* y constituye una incógnita del sistema, diferente para cada satélite y cambiante si la señal del satélite se pierde y se recupera posteriormente. Por otra parte, esta medida se basa en la velocidad de fase, mayor que la de grupo, y por eso el retardo Ionosférico derivado de la medida de fase produce una distancia más corta que la verdadera distancia, realmente sería un adelanto en la llegada de la señal.

La ecuación correspondiente a esta medida de fase es:

$$\phi_r^s = \rho_r^s - cdt_r + cdt_s + N_r^s \lambda - d_I + d_{retardos} \quad (2.2)$$

donde  $N_r^s$  es la ambigüedad y  $\lambda$  es la longitud de onda de la frecuencia de la portadora.

En el modelo matemático dado por las ecuaciones (2.1) y (2.2), los *observables* vienen dados por  $P$  y/o  $\phi$ , mientras que los parámetros incógnita son la posición del satélite, la del receptor, las correcciones a los relojes de ambos, y todos los retardos considerados. Las coordenadas del receptor y del satélite están implícitas en la distancia real  $\rho_r^s$  que se expresa como sigue:

$$\rho_r^s = \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2} \quad (2.3)$$

En este modelo hacemos las siguientes consideraciones:

- Como coordenadas de los satélites se utilizarán las efemérides precisas. De este modo, no se considerarán parámetros del modelo, y aunque dependientes del tiempo, pasan a ser consideradas como constantes del modelo en cada observación realizada.
- Mediante las correcciones a los relojes de los satélites proporcionadas por los organismos del IGS, se minimiza el error  $dt_s$ .
- El efecto Ionosférico puede eliminarse mediante la utilización de observaciones en la frecuencia  $L_1$  y  $L_2$ , o bien modelizarse. El troposférico únicamente puede modelizarse.
- Los retardos producidos por reflexiones de la señal o por el recorrido instrumental, también pueden modelizarse.

Con estas consideraciones los parámetros incógnita se reducen a:

- Posición del receptor  $x_r, y_r, z_r$
- Errores del reloj del receptor  $dt_r$
- Ambigüedad de fase  $N_r^s$

Y las ecuaciones se simplifican de la forma:

$$\begin{aligned} P_r^s &= \rho_r^s - cdt_r + \varepsilon \\ \phi_r^s &= \rho_r^s - cdt_r + N_r^s \lambda + \varepsilon \end{aligned} \quad (2.4)$$

En  $\varepsilon$ , término de carácter aleatorio, quedan incluidos todos los residuos resultantes de las modelizaciones, de la corrección del tiempo del satélite, y de las coordenadas del satélite, así como el error inherente al proceso de observación y distribuido como  $N(0, \sigma^2)$ . Así pues sustituyendo (2.3) en (2.4) tenemos para un instante determinado:

$$\begin{aligned} P_r^s &= \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2} - cdt_r + \varepsilon \\ \phi_r^s &= \sqrt{(x^s - x_r)^2 + (y^s - y_r)^2 + (z^s - z_r)^2} - cdt_r + N_r^s \lambda + \varepsilon \end{aligned} \quad (2.5)$$

Observando simultáneamente cuatro satélites en un instante mediante la ecuación de pseudodistancia puede resolverse el sistema y determinar los parámetros incógnita. Debe notarse que las observaciones de cuatro satélites simultáneamente no resuelven el modelo según la ecuación para la medida de fase, por lo que se tendrán que realizar observaciones en épocas sucesivas, lo que conlleva introducir una incógnita para cada instante, ya que  $dt_r(t)$ , como se deduce del modelo depende del tiempo.

Los dos tipos de medidas que nos encontramos, dan lugar a diferentes precisiones en los parámetros incógnita calculados, según se usen unas u otras medidas, ya que la precisión estimada teniendo en cuenta la forma física de realizarlas es diferente. Así, la medida de fase tiene mayor precisión que la pseudodistancia aunque el sesgo puede ser mucho mayor. Teniendo en cuenta la precisión de los relojes de los receptores, del orden de  $10^{-7}$  sg, la precisión en pseudodistancia se calcula en 3 m, el sesgo es variable a lo largo del tiempo, pero también es del mismo orden. En cuanto a la medida de fase el sesgo vendrá dado por la ambigüedad,  $N\lambda$  m y la precisión, por la calidad en la medida de la fase y que se estima en una centésima de la longitud de onda; 0,2 cm. La tabla 2.1 refleja aproximadamente estas diferencias.

medida	Sesgo	Precisión
$P_r^s$	$6m$	$3m$
$\phi_r^s$	$N\lambda$	$0,002m$

Tabla 2.1: Precisión y sesgo de las medidas

## 2.2. Solución de sistemas de ecuaciones no lineales

La ciencia de hoy muestra que la naturaleza es inexorablemente no lineal. Por tanto la naturaleza no maneja fórmulas explícitas, y no halla fascinación en las fórmulas pensadas para lápiz y papel. Pero no debe sorprendernos que la naturaleza no sea lineal: si dibujamos una curva al azar, no se obtendrá una línea recta.

El comportamiento de las ecuaciones lineales está muy alejado de lo que es típico. Del mismo modo que en el siglo XVIII se creía en un mundo que funcionaba como un reloj, a mediados del siglo XX se creía en uno lineal.

El modelo matemático descrito en (2.5) es no lineal en la parte correspondiente a la distancia  $\rho_r^s$ . En general las ecuaciones que surgen en la naturaleza derivadas de observaciones sistemáticas suelen ser no lineales. El procedimiento clásico consiste en linealizar lo que no es lineal, eliminando así los términos no lineales de la ecuación. Esto se consigue sustituyendo la parte no lineal por alguna función que se comporte de forma similar a la que queremos eliminar y que sea lineal. Como nunca conseguiremos la igualdad entre la parte no lineal y la función que la sustituye, siempre habrá un error al tomar la una por la otra. Lo que se debe garantizar en la linealización es que el error que se comete es de una magnitud insignificante, en relación a la incógnita que interviene en dicha parte no lineal. En el caso de linealizar la distancia entre dos puntos, se considera insignificante todo lo que esté por debajo del milímetro, en cuyo caso se considerará cero la distancia ya que en los aparatos de medida dos puntos separados menos de un milímetro son indistinguibles. Se debe garantizar que la diferencia entre la función original (no lineal), y la que la sustituye (lineal) sea menor de 1 mm. Tácitamente, se piensa que ya que los términos despreciados en las ecuaciones son muy pequeños, lo cual es cierto, la diferencia entre la

solución de la ecuación linealizada y la de la verdadera ecuación, también debe de ser pequeña, y esto último no siempre es cierto.

El problema que se plantea cuando se tiene un sistema de ecuaciones no lineales como el dado en (2.5) es dada una función no lineal:

$$f(x) : \mathcal{R}^m \longrightarrow \mathcal{R}^n$$

hallar  $x$  tal que  $f(x) = 0$ .

La forma de resolver el sistema no lineal dependerá del tipo de sistema resultante, en nuestro caso siempre tendremos sistemas incompatibles, sobre-determinados en los que la técnica de estimación de parámetros por el método de mínimos cuadrados es la más idónea. Ya que estos sistemas no tienen solución única se toma aquella que minimiza los residuos,  $f(x) = r$  con  $r$  residuos mínimos en el sentido de la norma. Según la norma elegida se tendrán diferentes soluciones, en la 2-norma la situación se expresa:

$$\|f(x)\|_2 = \text{mín}$$

La elección de la 2-norma obedece a las dos siguientes propiedades:

1. La función  $\frac{1}{2}\|f(x)\|_2^2$  tiene los mismos mínimos que  $\|f(x)\|_2$  y es diferenciable.
2. La 2-norma es invariante por transformaciones ortogonales.

El teorema de Gauss-Markov, garantiza que la estimación mínimos cuadrados es la mejor solución insesgada de mínima varianza [26], [56].

La función que por tanto debe minimizarse es continua y diferenciable en algún conjunto abierto de  $\mathcal{R}^m$ , con derivadas parciales continuas en ese abierto.

### 2.2.1. Mínimos Cuadrados no lineales. Enfoque clásico

El método que vamos a tratar está basado en procedimientos iterativos, de forma que en cada una de sus etapas se resolverá un sistema de ecuaciones lineales resultantes de aproximar el modelo no lineal original en el entorno del

punto que define el comienzo de una nueva etapa.

Según este método el problema consiste en encontrar el mínimo global de la suma de los cuadrados de  $m$  funciones no lineales, es decir encontrar  $x \in \mathfrak{R}^n$  tal que:

$$f(x) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i^2(x) = \frac{1}{2} \|r(x)\|_2^2 = \text{mín} \quad (2.6)$$

donde  $r(x) : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^m = [r_1(x), \dots, r_m(x)]^t \in \mathfrak{R}^m$  es el vector de residuos y cada  $r_i(x)$   $i = 1 \dots m$   $m \geq n$  es una función no lineal de  $\mathfrak{R}^n$  en  $\mathfrak{R}$ .

Este problema surge de la imposibilidad de encontrar la solución al sistema de ecuaciones no lineales  $r(x) = 0$  y en consecuencia, tratar de encontrar la pseudosolución que mejor se aproxime a la solución de acuerdo con la norma euclídea. Un ejemplo de utilización de estas técnicas es la estimación del valor de un vector de variables, basándose en unas medidas efectuadas conforme a criterios diversos. Estas medidas no se realizan con precisión absoluta, debido a la imperfección de los aparatos encargados de registrarlas, pero suelen ser altamente redundantes, por lo que el proceso de estimación se basa, usualmente, en minimizar la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los valores medidos y los estimados.

Si todas las medidas fuesen correctas con precisión total, las relaciones matemáticas que conforman el modelo permitirían determinar la solución única. Los errores aleatorios que incorporan los aparatos de medida, introducen una incompatibilidad matemática, por lo que el cálculo de la solución no es posible, teniendo que sustituirse por una estimación.

El número de medidas efectuadas suele ser muy superior al estrictamente necesario para determinar las variables, a fin de aumentar la bondad de la estimación así como identificar mediciones erróneas. En términos matemáticos se tiene una muestra  $b_1, \dots, b_m$  determinada por las mediciones, el sistema de ecuaciones que relaciona estas mediciones con las variables a determinar se expresa como:

$$f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_1$$

$$f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_2$$



$$f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = b_m$$

con  $m \gg n$ .

El sistema de ecuaciones debido a las imprecisiones de los aparatos de medida es matemáticamente incompatible. Al no poder calcular la solución exacta por no existir, es necesario definir un estimador en  $\mathfrak{R}^n$  que permita encontrar una pseudosolución lo más próxima posible a la verdadera.

El estimador mínimos cuadrados es el más usado y el criterio para elegir la pseudosolución es:

$$f(x) = \frac{1}{2} \|r(x)\|_2^2 = \frac{1}{2} [(r(x)^t r(x))^{\frac{1}{2}}]^2 = \frac{1}{2} r(x)^t r(x) = \text{mín} \quad (2.7)$$

Este estimador es el mejor en caso de que los errores que afectan a las mediciones tengan distribución de probabilidad  $N(0, \sigma^2)$  como es el caso que nos ocupa de las ecuaciones (2.4).

Los métodos para resolver el problema requieren la información que proporcionan las derivadas de la función que se minimiza que en este caso existen y se calculan fácilmente de la siguiente forma:

Derivando en la expresión (2.7)

$$\nabla f(x) = \frac{1}{2} \frac{\partial r(x)^t}{\partial x} r(x) + \frac{1}{2} r(x)^t \frac{\partial r(x)}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial r(x)^t}{\partial x} r(x) + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial r(x)^t}{\partial x} r(x) \right]^t$$

y por tanto:

$$\nabla f(x) = J^t(x) r(x) \quad (2.8)$$

y la segunda derivada

$$\nabla^2 f(x) = \frac{\partial^2 r(x)^t}{\partial x} r(x) + \frac{\partial r(x)^t}{\partial x} \frac{\partial r(x)}{\partial x}$$

y por tanto

$$\partial^2 f(x) = G_i^t(x) r(x) + J^t(x) J(x) \quad (2.9)$$

donde  $J(x)$  es la matriz Jacobiana de primeras derivadas y su dimensión es  $m \times n$ .  $G_i(x)$  es la matriz Hessiana de segundas derivadas de cada componente  $i = 1 \dots m$ , respecto de las variables incógnitas de dimensión  $n \times n$ .

La forma de abordar la resolución numérica del problema no lineal de mínimos cuadrados responde a contemplar el problema como un sistema de ecuaciones de  $m$  ecuaciones y  $n$  incógnitas con  $m > n$ , planteado en los siguientes términos ya particularizado a nuestra ecuación de medida de fase o de pseudodistancia según la ecuación (2.4) y simplificando su notación:

$$\begin{aligned} f_P &= \rho - cdt + \varepsilon_1 - P = 0 \\ f_\phi &= \rho - cdt + N\lambda + \varepsilon_2 - \phi = 0 \end{aligned} \quad (2.10)$$

donde  $\rho$  es la distancia real que se expresa por la ecuación de la distancia dada en (2.3).

El sistema es incompatible, si aproximamos las ecuaciones por el modelo lineal que define el desarrollo en serie de Taylor, alrededor de unos valores para los parámetros incógnita aproximados  $X_0 = (x_0, y_0, z_0, dt_0, N_0)$  y lo truncamos a partir de los elementos de segundo orden tenemos en general:

$$\begin{aligned} f_P &\cong f_P \Big|_0 + \frac{\partial f_P}{\partial X} \Big|_0 (X - X_0) \\ f_\phi &\cong f_\phi \Big|_0 + \frac{\partial f_\phi}{\partial X} \Big|_0 (X - X_0) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Particularizando nuestras ecuaciones y considerando las correcciones a los parámetros incógnita;  $Dx = x - x_0$ ;  $Dy = y - y_0$ ;  $Dz = z - z_0$ ;  $Ddt = dt - dt_0$ ;  $DN = N - N_0$ . Para la pseudodistancia tenemos:

$$\rho_0 + \left( \frac{\partial f_P}{\partial x} \right)_0 Dx + \left( \frac{\partial f_P}{\partial y} \right)_0 Dy + \left( \frac{\partial f_P}{\partial z} \right)_0 Dz - cdt_0 + \left( \frac{\partial f_P}{\partial dt} \right)_0 Ddt - P + \varepsilon_1 = 0 \quad (2.12)$$

y para la fase:

$$\begin{aligned} \rho_0 + \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial x}\right)_0 Dx + \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial y}\right)_0 Dy + \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)_0 Dz - cdt_0 + \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial dt}\right)_0 Ddt + \\ + N_0\lambda + \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial N}\right)_0 DN - \phi + \varepsilon_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.13)$$

y de forma matricial se puede escribir tanto para ecuaciones de fase como de pseudodistancia:

$$AX + W - V = 0 \quad (2.14)$$

donde  $A$  es la *matriz de diseño* formada por las primeras derivadas parciales,  $X$  es el vector de correcciones a los parámetros incógnitas,  $W$  es el valor obtenido a partir de la diferencia entre la función evaluada en el punto de aproximación y el valor observado, y  $V$  es el vector de residuos. Según se trate de ecuaciones de fase o pseudodistancia las matrices anteriores tomarán diferentes valores.

La resolución de la ecuación (2.14) nos lleva a una sucesión de aproximaciones lineales y a su resolución mediante técnicas de mínimos cuadrados lineales que veremos con posterioridad.

Las derivadas parciales de las ecuaciones de observación con respecto a las incógnitas  $X$ , para los cuatro tipos de parámetros, coordenadas del receptor  $(x, y, z)$ , error del reloj del receptor  $dt$ , y ambigüedades para la medida de fase  $N$  forman la matriz de diseño  $A$ :

$$A_P = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_P}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_P}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_P}{\partial z}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_P}{\partial dt}\right)_0 & 0 \\ \dots & & & & \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$A_\phi = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial dt}\right)_0 & \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial N}\right)_0 \\ \dots & & & & \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$A_P$  corresponde a cada observación de medida de pseudodistancia y  $A_\phi$  a medidas de fase; los valores que toman estas derivadas parciales derivando en

la ecuación (2.5) son:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial f_P}{\partial x}\right)_0 &= \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial x}\right)_0 = \frac{x_0 - x_s}{\rho_0} \\
 \left(\frac{\partial f_P}{\partial y}\right)_0 &= \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial y}\right)_0 = \frac{y_0 - y_s}{\rho_0} \\
 \left(\frac{\partial f_P}{\partial z}\right)_0 &= \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial z}\right)_0 = \frac{z_0 - z_s}{\rho_0} \\
 \left(\frac{\partial f_P}{\partial dt}\right)_0 &= \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial dt}\right)_0 = -c \\
 \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial N}\right)_0 &= \lambda
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$X_P = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \\ dt - dt_0 \end{bmatrix} \quad W_P = \left[ \rho_0 + cdt_0 - P \right] \quad V_P = \left[ \varepsilon_1 \right]$$

$$X_\phi = \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \\ dt - dt_0 \\ N - N_0 \end{bmatrix} \quad W_\phi = \left[ \rho_0 + cdt_0 - \phi + N_0\lambda \right] \quad V_\phi = \left[ \varepsilon_2 \right]$$

### 2.2.2. Mínimos Cuadrados no lineales. Enfoque de optimización

Otro posible enfoque para abordar la resolución del problema que consiste en contemplarlo como un problema de optimización en  $\mathfrak{R}^n$ . Para ello se aproxima la función por el modelo cuadrático que resulta del desarrollo en serie de Taylor pero truncando en los términos de terceras derivadas y se minimiza dicha función. En general la función se expresará tanto para las ecuaciones de fase como de pseudodistancia:

$$f_{P,\phi} \cong f_{P,\phi}\Big|_0 + \frac{\partial f_{P,\phi}}{\partial X}\Big|_0 (X - X_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_{P,\phi}}{\partial X^2}\Big|_0 (X - X_0)^2 = F_{P,\phi}(X) \tag{2.16}$$

y teniendo en cuenta (2.8) y (2.9):

$$\begin{aligned}
 f_{P,\phi} &\cong f_{P,\phi}\Big|_0 + J^t(x)r(x)\Big|_0 (X - X_0) + \\
 &+ \frac{1}{2} (X - X_0)^t [G_i^t(x)r(x) + J^t(x)J(x)]\Big|_0 (X - X_0)
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

donde las segundas derivadas para nuestras ecuaciones dadas en la ecuación (2.5) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial x^2}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 f_\phi}{\partial x^2}\right)_0 = \frac{\rho_0^2 - (x_0 - x_s)^2}{\rho_0^3} \\
 \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial y^2}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 f_\phi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{\rho_0^2 - (y_0 - y_s)^2}{\rho_0^3} \\
 \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial z^2}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 f_\phi}{\partial z^2}\right)_0 = \frac{\rho_0^2 - (z_0 - z_s)^2}{\rho_0^3} \\
 \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial x \partial y}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 f_\phi}{\partial x \partial y}\right)_0 = \frac{-(x_0 - x_s)(y_0 - y_s)}{\rho_0^3} \\
 \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial x \partial z}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 f_\phi}{\partial x \partial z}\right)_0 = \frac{-(x_0 - x_s)(z_0 - z_s)}{\rho_0^3} \\
 \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial y \partial z}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 f_\phi}{\partial y \partial z}\right)_0 = \frac{-(y_0 - y_s)(z_0 - z_s)}{\rho_0^3} \\
 \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial dt^2}\right)_0 &= \left(\frac{\partial^2 f_\phi}{\partial dt^2}\right)_0 = \left(\frac{\partial f_P}{\partial x \partial dt}\right)_0 = \dots = \left(\frac{\partial f_\phi}{\partial N^2}\right)_0 = 0
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Particularizando nuestras ecuaciones y resumiendo y de forma matricial se puede escribir:

$$AX + \frac{1}{2}X^t BX + W - V = 0$$

donde  $A$  es la matriz jacobiana de primeras derivadas similar a la anterior matriz de diseño,  $B$  es la matriz formada por las segundas derivadas,  $X$  es el vector de correcciones a los parámetros incógnitas,  $W$  es el valor obtenido a partir de la diferencia entre la función evaluada en el punto de aproximación y el valor observado, y  $V$  es el vector de residuos.

Las matrices implicadas son las mismas que las ya vistas en el enfoque de resolución por mínimos cuadrados clásicos, pero en este caso aparece una nueva matriz  $B$  que se expresa de la siguiente forma para pseudodistancia.

$$B = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial x^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial x \partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial x \partial z}\right)_0 & 0 \\ \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial y \partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial y^2}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial y \partial z}\right)_0 & 0 \\ \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial z \partial x}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial z \partial y}\right)_0 & \left(\frac{\partial^2 f_P}{\partial z^2}\right)_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz  $B$  debe tener una fila y columna cero por cada variable  $dt$  que aparezca en el sistema. Para medida de fase la matriz es similar pues las segundas derivadas respecto de las variables ambigüedad también son cero y por tanto habrá una fila y columna cero por cada variable ambigüedad que aparezca en el sistema.

La resolución de esta ecuación se alcanza en el mínimo de la función, para hallarlo derivamos en (2.17):

$$\nabla_{P,\phi} = J^t(x_0)r(x_0) + [G_i^t(x_0)r(x_0) + J^t(x_0)J(x_0)](X - X_0) = 0 \quad (2.19)$$

despejando  $X$  obtenemos la solución:

$$X = X_0 - J^t(x_0)r(x_0)[G_i^t(x_0)r(x_0) + J^t(x_0)J(x_0)]^{-1} \quad (2.20)$$

La solución se alcanza en un proceso iterativo en que cada solución anterior se utiliza como punto de partida del proceso siguiente. La dificultad de calcular la matriz de derivadas segundas en cada iteración puede simplificarse sustituyéndola por una aproximación cuasi Newton.

En definitiva la solución de sistemas de ecuaciones no lineales por uno u otro camino se reduce a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales en cada paso del procedimiento iterativo.

## 2.3. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Según la sección anterior el problema no lineal se reduce a uno lineal. En forma matricial el sistema puede expresarse genéricamente como:

$$Ax = b$$

donde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

En nuestro caso concreto  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $b \in \mathbb{R}^m$  con  $m \gg n$ , siempre trataremos con sistemas incompatibles sobredeterminados, de rango completo o incompleto.

La interpretación geométrica del problema de resolver un sistema de ecuaciones lineales cualquiera en  $\mathbb{R}^{m \times n}$  es la búsqueda de las coordenadas de los puntos de intersección de los hiperplanos asociados a cada una de las ecuaciones.

También es posible interpretar el problema en términos de vectores en el subespacio Imagen de  $A$ , lo que significa descomponer linealmente el vector  $b$  según los vectores columna de la matriz de coeficientes.

En  $\mathbb{R}^{3 \times 2}$  la solución se interpreta en el primer caso como las coordenadas del punto de intersección de dos rectas, o, en el segundo caso, como los coeficientes de una combinación lineal de las columnas de  $A$  que nos de como resultado el vector  $b$ .

### 2.3.1. Mínimos Cuadrados lineales. Métodos iterativos

Los métodos iterativos resuelven la búsqueda de una solución por aproximaciones sucesivas para obtener la solución con mayor grado de precisión. Dentro de ellos existen los métodos *estacionarios*, conocidos desde muy antiguo, de fácil comprensión y fácil programación, pero no muy efectivos, y los *no estacionarios* de desarrollo relativamente reciente, más complejos pero con una mayor efectividad. Puesto que la aproximación a la solución en los métodos iterativos es un proceso limitado, la convergencia es un problema importante en este método. Esta convergencia, en el caso en que se pueda asegurar, depende mucho de la matriz de coeficientes, y de los valores singulares asociados a ella. Usualmente los métodos iterativos implican a una segunda matriz que transforma los coeficientes de la dada, para que tenga unos valores singulares mejores en el sentido de que formen un conjunto más homogéneo. La matriz de transformación se denomina *Precondicionador*. Un buen preconditionador mejora la convergencia del método iterativo suficientemente, tanto, que vale la pena el gasto extra que supone su construcción y aplicación. Sin un preconditionador el método iterativo puede no converger de ninguna manera.

En general el trabajo de cálculo en los procesos iterativos es más largo que en los directos. Los métodos directos van bien en sistemas no demasiado grandes pero cuando nos enfrentamos a problemas con miles o decenas de miles de ecuaciones puede haber problemas, salvo que la estructura dispersa de la matriz asociada al sistema permita su reducción. El problema del posicionamiento absoluto genera matrices grandes pero no demasiado, y su estructura dispersa no aconseja la resolución por medio de métodos iterativos, por lo que no se profundizará en ello.

### 2.3.2. Mínimos Cuadrados lineales. Métodos directos

Nuestra elección en esta tesis es utilizar el método de mínimos cuadrados lineales directo previa linealización de las ecuaciones. El método directo es aquel que puede encontrar una solución teóricamente aproximada a la solución real, después de un número finito de pasos denominados pasos de reducción, sólo sujetos a los errores de redondeo del sistema de numeración en coma flotante del ordenador con que se realicen las operaciones. No obstante los resultados son aún así aproximados. Generalmente cuando la longitud de palabra del ordenador es de 12-14 dígitos, es fácil asegurar que los 3-4 primeros dígitos no están afectados por errores de redondeo. El método directo conlleva comparativamente menos trabajo de cálculo, pero requiere generalmente que los coeficientes de la matriz de ecuaciones no sean demasiado grandes. También los errores cometidos en alguna parte del proceso de cálculo van a afectar al proceso completo, por tanto demanda un gran rigor en lo concerniente a la verificación de los datos incluidos en el proceso de cálculo. La estructura de la matriz de coeficientes de las ecuaciones tiene un decisivo papel en los métodos directos. Veremos a continuación los métodos directos que podemos emplear para resolver los sistemas de ecuaciones incompatibles sobredeterminados.

Los sistemas de ecuaciones  $Ax = b$  con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $m > n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $\text{Rango}(A | b) \neq \text{Rango}(A) \leq n$ , no tienen solución, pero se les puede encontrar una pseudosolución siguiendo el criterio de encontrar  $x$  que minimice la norma  $\|Ax - b\|_2$ , o escoger de entre las soluciones existentes aquella cuya norma sea mínima.



El criterio de minimizar la norma euclídea de una manera u otra es lo que da nombre a todos los procedimientos para resolver estos problemas: mínimos cuadrados. Estas técnicas surgen al tratar de estimar parámetros de funciones cuando el número de datos disponibles es muy superior al de incógnitas a estimar.

### Descomposición en valores singulares.

Cuando la matriz no es cuadrada los valores propios se denominan valores singulares, aunque usaremos la misma notación para unos y otros ( $\lambda$ ). En el estudio de los problemas de mínimos cuadrados es muy importante la descomposición en valores singulares de la matriz  $A$  del sistema. Los siguientes resultados son de utilidad [20]:

**Teorema 2.3.1** Si  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $\text{Rango}(A) = r \leq \min(m, n)$ ,  $\exists U \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $V \in \mathbb{R}^{n \times n}$  ortogonales tales que  $A = U\Lambda V^t$  con  $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times n} = \begin{bmatrix} \Lambda_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$  y  $\Lambda_r = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$   $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \lambda_r > 0$ . Además estos  $\lambda_i$  son únicos.

□

Las columnas de  $U$  y  $V$  se denominan vectores singulares izquierdos y derechos correspondientes a los valores singulares.

De la descomposición de  $A$  asegurada por el teorema anterior podemos deducir:

$$A^t A = (U\Lambda V^t)^t (U\Lambda V^t) = V\Lambda^t U^t U \Lambda V^t$$

como  $\Lambda$  es diagonal entonces  $\Lambda = \Lambda^t$

y como  $U$  es ortogonal  $U^t U = I$  entonces

$$A^t A = V\Lambda^t \Lambda V^t = V\Lambda^2 V^t$$

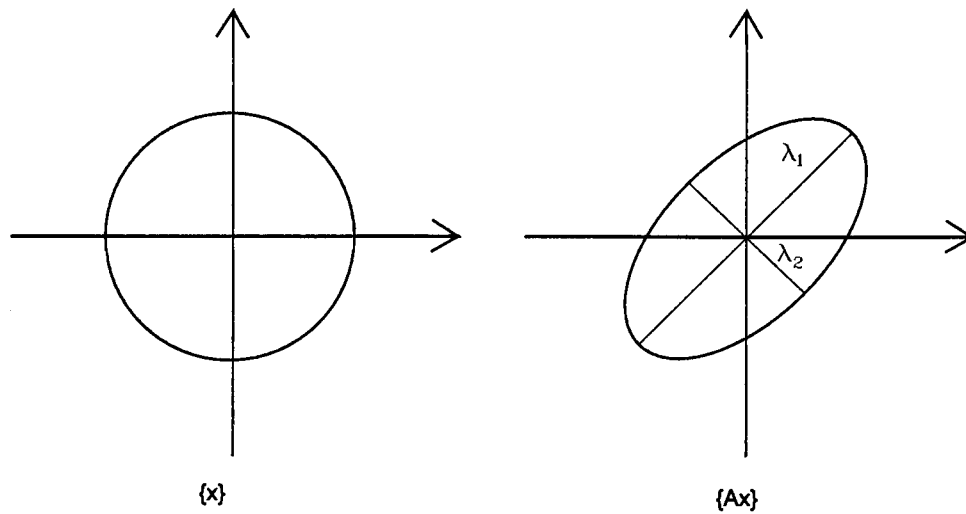


Figura 2.2: Transformación lineal de la esfera unidad en dos dimensiones

y de forma similar

$$AA^t = U\Lambda\Lambda^tU^t = U\Lambda^2U^t$$

El resultado anterior nos da una descomposición de las matrices simétricas semidefinidas positivas  $A^tA$  y  $AA^t$ , y en virtud del teorema anterior podemos afirmar que  $\lambda_i^2$  son sus valores propios,  $v_i$  son los vectores propios de  $A^tA$  y  $u_i$  los de  $AA^t$ .

La interpretación geométrica de los valores propios es que son las longitudes de los semiejes del hiperelipsoide  $E$  definido por:

$$E = y : y = Ax, \|x\|_2 = 1 \quad (2.21)$$

Es decir, las longitudes de los semiejes del hiperelipsoide imagen de la esfera unidad resultante de la aplicación que caracteriza la matriz  $A$ . En dimensión dos puede representarse como se ve en la figura 2.2.

**Teorema 2.3.2** El vector  $x = V \begin{bmatrix} \Lambda_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^t b$  es solución del problema mínimos cuadrados  $\|Ax - b\|_2$  y el valor que toma es

$$x = \sum_{i=1}^r \frac{u_i^t b}{\lambda_i} v_i$$

**Prueba**

Para cualquier  $x \in \mathfrak{R}^n$  tenemos:

$$\begin{aligned}\|Ax - b\|_2^2 &= \|(U^tAV)(V^tx) - U^tb\|_2^2 = \|\Lambda(V^tx) - U^tb\|_2^2 \\ &= \sum_{i=1}^r (\lambda_i v_i^t x_i - u_i^t b)^2 + \sum_{i=r+1}^m (u_i^t b)^2\end{aligned}$$

Claramente si  $x$  resuelve el problema el primer sumando debe ser cero y así:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^r (\lambda_i v_i^t x_i - u_i^t b)^2 = 0 &\implies v_i^t x_i = \frac{u_i^t b}{\lambda_i} \quad i = 1 : r \implies \\ x &= \sum_{i=1}^r \frac{u_i^t b}{\lambda_i} v_i\end{aligned}$$

Además el residuo es

$$r^2 = \sum_{i=r+1}^m (u_i^t b)^2$$

□

La matriz  $V \begin{bmatrix} \Lambda_r^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} U^t = A^+ \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  se denomina pseudoinversa de  $A$ .

Según sea el  $Rango(A)$  la matriz pseudoinversa  $A^+$  tendrá una forma u otra, pero no depende de los  $U$ ,  $V$  que se escojan en la descomposición de valores singulares de  $A$ . El método para la evaluación numérica de los valores singulares será, por ejemplo, el de Golub-Reinsch [20]. Esta técnica encuentra  $U$  y  $V$  simultáneamente aplicando implícitamente la descomposición  $QR$  a la matriz  $A^t A$ .

Antes de entrar en la exposición del método, recordemos que las transformaciones lineales ortogonales tienen la propiedad de que conservan la norma euclídea, por tanto si  $Q^{n \times n}$  es una matriz ortogonal y  $x$  es un vector  $n$ -dimensional entonces

$$\|QX\|_2^2 = \|X\|_2^2$$

De igual forma, si aplicamos una transformación ortogonal al problema de mínimos cuadrados  $Ax = b$  el resultado del problema no se verá afectado. El

objetivo de las transformaciones ortogonales es reducir el problema a uno más sencillo de resolver desde el punto de vista numérico. Las dos transformaciones lineales ortogonales que nos permiten esa descomposición son las Reflexiones, conocidas como *transformaciones de Householder* y las Rotaciones, conocidas como *transformaciones de Givens*.

**Definición 2.3.1** Se denomina *transformación de Householder*, a una transformación lineal  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , caracterizada por una matriz  $H^{n \times n}$  de la forma:

$$H = I - 2ww^t$$

Donde  $w$  es un vector de norma 1.

Aplicar una transformación de Householder a un vector cualquiera  $a$  equivale a reflejarlo en el subespacio ortogonal del subespacio Imagen;  $(Im(w))^\perp$  así:

$$Ha = a - 2(w^t a)w$$

donde  $(w^t a)w$  es la proyección de  $a$  sobre  $w$ . Geométricamente se puede expresar como se describe en la figura 2.3.

Eligiendo adecuadamente  $w$  se puede construir  $H$  que anule todas las componentes que se deseen de un vector dejando las demás como estaban.

**Definición 2.3.2** Se denomina *transformación de Givens*, a una transformación lineal  $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , caracterizada por una matriz  $G_{i,j}^{n \times n}$  con diagonal 1 y cuyos elementos  $G(i, i), G(i, j), G(j, i), G(j, j)$  para  $i < j$  representan una rotación de la forma:

$$G(i, j) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Aplicar una rotación de Givens a un vector cualquiera  $a$  equivale a rotarlo un ángulo  $\theta$  en el subespacio que generan los vectores  $e_i$  y  $e_j$  de  $\mathbb{R}^n$ . Geométricamente se puede expresar la transformación de Givens como en la figura 2.4.



distintos de cero. La diferencia está en la velocidad de anular componentes. La transformación de Householder es más rápida pero afecta a más elementos, la de Givens es más lenta pero en cada transformación sólo se ve afectado un elemento de la matriz. Esto es importante tenerlo en cuenta si la matriz  $A$  tiene una estructura dispersa.

Una vez expuesto lo anterior, el método para realizar la descomposición en valores singulares procede de la siguiente forma:

**Paso 1: BIDIAGONALIZACIÓN DE  $A$**  (Transformaciones de Householder).

La descomposición se realiza mediante transformaciones de Householder de forma que:

$$Q^t A \Pi = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix}$$

con  $B \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  donde

$$B = \begin{bmatrix} d_1 & f_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & f_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & f_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$Q = Q_1 Q_2 \dots Q_n \in \mathfrak{R}^{m \times m}$  y  $\Pi = \Pi_1 \Pi_2 \dots \Pi_{n-2} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$  son el producto de matrices elementales que caracterizan a las transformaciones de Householder. La transformación  $Q_k$  se escoge de tal manera que hace cero los elementos  $k+1$  a  $m$  de la columna  $k$ . La transformación  $\Pi_k$ , hará cero los elementos  $k+2$  a  $n$  de la fila  $k$ . Esquemáticamente para  $\mathfrak{R}^{5 \times 4}$  se tiene:

$$\begin{bmatrix} X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \\ X & X & X & X \end{bmatrix} \xrightarrow{Q_1} \begin{bmatrix} X & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \end{bmatrix} \xrightarrow{\Pi_1}$$

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & X \end{bmatrix} & \xrightarrow{Q_2} & \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & X & X \end{bmatrix} \\
 & & \xrightarrow{\Pi_2} \\
 \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & X & X \end{bmatrix} & \dots & \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

**Paso 2:** HACER CEROS LOS ELEMENTOS QUE NO ESTÁN EN LA DIAGONAL PRINCIPAL (Rotaciones de Givens).

Esto se realiza mediante transformaciones de Givens consiguiendo expresar la matriz  $B$  de la siguiente forma:

$$B = USV^t$$

donde  $U, V$  son matrices ortogonales y  $S$  es diagonal. Dicho de otro modo:

$$U^t B V = S = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathfrak{R}^{m \times n}$$

Esto equivale a obtener los valores singulares de la matriz  $B$ . Esto se podría hacer usando la matriz  $B^t B$  y calculando sus valores propios, ya que los valores singulares de  $B$  son las raíces positivas de los valores propios de  $B^t B$ , pero los errores de redondeo en los valores singulares más pequeños aconsejan hacerlo en forma de etapas. En cada una de las etapas se irán haciendo ceros en la superdiagonal mediante rotaciones de Givens, esto introduce elementos no ceros en la subdiagonal que habrá que ir eliminado con nuevas rotaciones hasta llegar a una nueva expresión  $\bar{B}$  bidiagonal que verifica:

$$\bar{B} = \bar{U}^t B \bar{V}$$

donde  $\bar{U}$  y  $\bar{V}$  son ortogonales y  $\bar{V}$  es esencialmente la misma que se habría obtenido de la descomposición  $QR$  de  $B^t B$ . Después del proceso, la superdiagonal de  $\bar{B}$  llega a ser despreciable y  $S = \liminf \bar{B}$ . El proceso se ilustra en el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc}
 \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\overline{V}_1} & \begin{bmatrix} X & 0 & 0 & 0 \\ X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\overline{U}_1^t} \\
 \\
 \begin{bmatrix} X & X & X & 0 \\ 0 & X & X & X \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\overline{V}_2} & \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \xrightarrow{\overline{U}_2^t} \\
 \\
 \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & X & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} X & X & 0 & 0 \\ 0 & X & X & 0 \\ 0 & 0 & X & X \\ 0 & 0 & 0 & X \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{array}$$

La matriz  $A$  después de los dos pasos descritos será:

$$A = (Q\overline{U}) \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} (\Pi\overline{V})^t = U \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} V^t$$

y el problema de mínimos cuadrados se resuelve en virtud del teorema (2.3.2).

La descomposición en valores singulares maneja correctamente la deficiencia de rango de la matriz  $A$  ya que las componentes  $r + 1$  a  $n$  del vector solución serán cero si los valores singulares  $\lambda_{r+1} \cdots \lambda_n$  son tan pequeños que se consideran cero.

### Ecuaciones Normales

Otra forma de abordar el problema de mínimos cuadrados lineales es a través de las ecuaciones normales. El siguiente teorema garantiza que el problema de encontrar la pseudosolución del sistema  $Ax = b$  con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$   $m > n$  equivale a resolver un sistema lineal de la forma:

$$A^t Ax = A^t b$$



**Teorema 2.3.3** [23] Sean  $X$  e  $Y$  dos espacios vectoriales de dimensión finita  $n, m$  sobre el cuerpo  $\mathfrak{R}$  y  $A$  la matriz de una transformación lineal de  $X$  en  $Y$ , el vector  $x \in X$  minimiza  $\|Ax - b\|_2$  si y solo si  $A^t Ax = A^t b$ .

### Prueba

Recordemos que los mínimos de  $\|Ax - b\|_2$  son los mismos que los de  $\|Ax - b\|_2^2$  y sean  $x$  y  $z \in \mathfrak{R}^n$ , y  $\alpha \in \mathfrak{R}$ , consideremos la igualdad:

$$\|A(x + \alpha z) - b\|_2^2 = \|Ax - b\|_2^2 + \alpha^2 \|Az\|_2^2 + 2\alpha z^t A^t (Ax - b) \quad (2.22)$$

Si  $x$  resuelve el problema de mínimos cuadrados entonces se puede escribir:

$$\|Ax - b\|_2^2 < \|A(x + \alpha z) - b\|_2^2$$

y por la igualdad (2.22) esto implica que:

$$\alpha^2 \|Az\|_2^2 + 2\alpha z^t A^t (Ax - b) > 0$$

Como el primer término siempre es positivo y  $\alpha$  y  $z$  no son cero se deduce que  $A^t (Ax - b) = 0$  pues de no serlo se podría encontrar un  $z$  y un  $\alpha$  de forma que no se cumpliera lo anterior. Así para  $z = -A^{-1}(Ax - b)$  y  $\alpha \in (0, 2)$  se tiene la desigualdad contradictoria siguiente:

$$\alpha^2 z^t A^t A A^{-1} (Ax - b) - 2\alpha z^t A^t (Ax - b) < 0$$

pues  $2\alpha > \alpha^2 \iff \alpha \in (0, 2)$ . □

El sistema de ecuaciones que definen la relación  $A^t (Ax - b) = 0$  se denomina *ecuaciones normales*, y el vector solución  $x$  se obtiene:

$$x = (A^t A)^{-1} A^t b \quad (2.23)$$

El vector solución además es único si  $A$  es de rango completo, es decir  $\text{Rango}(A) = n$ . La interpretación geométrica del problema en tres dimensiones es la de la figura 2.5. Como el vector  $Ax - b$  es ortogonal al subespacio Imagen de  $A$ , en este caso el plano, y este subespacio está generado por las columnas de  $A$ , entonces su producto escalar debe ser cero,  $A^t (Ax - b) = 0$ .

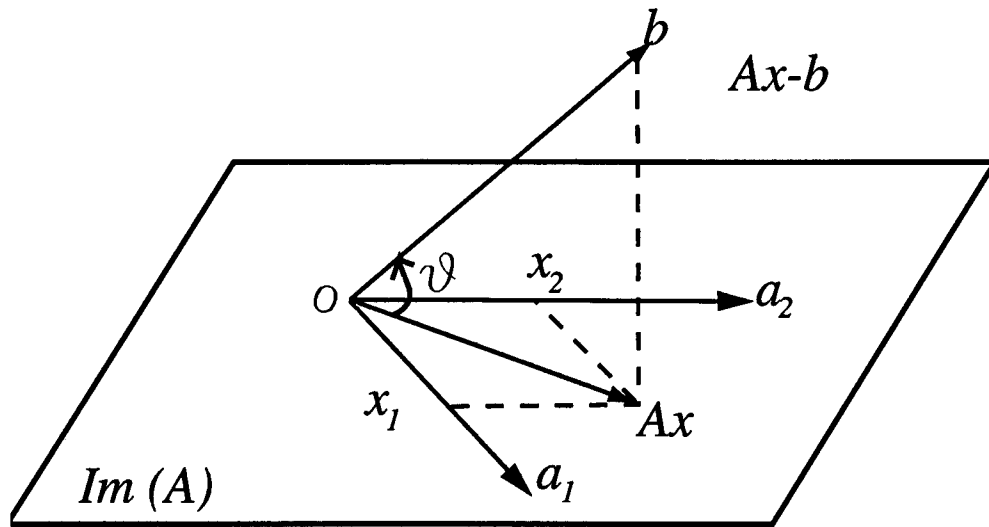


Figura 2.5: Interpretación geométrica problema de mínimos cuadrados en  $\mathbb{R}^{3 \times 2}$

Si comparamos la solución a un sistema no lineal cuando usamos el enfoque que se ha denominado de optimización dada por la ecuación (2.20) con (2.23) observamos que el método de ecuaciones normales es un caso particular del de optimización en el que se desprecia el término  $G_i^t(x_0)r(x_0)$ . Ese término resulta despreciable si las funciones son sólo ligeramente no lineales con lo que las segundas derivadas son despreciables o si los residuos son pequeños. Volveremos sobre este tema cuando particularicemos a los sistemas de ecuaciones que se generan en el problema del posicionamiento absoluto, que son los que nos interesan.

La resolución numérica de las ecuaciones normales cuando el rango es completo se puede abordar por cualquier método para resolver sistemas con matriz cuadrada y simétrica, pues  $A^t A$  lo es. Además como esta matriz es definida positiva lo más habitual es factorizar la matriz según el siguiente teorema:

**Teorema 2.3.4** [28] *Si  $A$  es una matriz simétrica definida positiva de orden  $n$  existe una matriz triangular inferior  $G$  con todos los elementos de la diagonal positivos tal que*

$$A = GG^t$$

□

La matriz  $G$  se denominada factor de Cholesky. La resolución del sistema de ecuaciones normales se escribe  $A^t Ax = A^t b$ , que con la factorización pasa a ser  $GG^t x = A^t b$ . Llamando  $G^t x = y$  y  $z = A^t b$ , se resolvería primero el sistema  $Gy = z$  por sustitución directa, y luego el sistema  $G^t x = y$  por sustitución hacia atrás.

Cuando hay deficiencia de rango o cuando la matriz tiene un mal condicionamiento el sistema podría no resolverse, y además si  $A$  es dispersa  $A^t A$  podría no serlo. Todo ello hace aconsejable el estudio de la matriz y también utilizar técnicas que transformen directamente la matriz  $A$  en otra más fácil de manipular y que tenga en cuenta la deficiencia de rango y así no usar las ecuaciones normales cuando se sospeche deficiencia de rango o mal condicionamiento.

### Triangularización

Cuando no sea recomendable el uso de las ecuaciones normales, las transformaciones ortogonales de Householder y Givens, puesto que conservan la norma euclídea, permiten transformar  $A$  en una triangular superior dando lugar a la factorización denominada  $QR$  que es como sigue:

**Paso 1:** Descomposición ortogonal.

$A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  con  $m \gg n$  y  $b \in \mathbb{R}^m$  y  $Rango(A) = n$ . Sea  $Q$  ortogonal  $\in \mathbb{R}^{m \times m}$  de forma que

$$QA = R = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

con  $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular superior. Si hacemos

$$Qb = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

con  $c \in \mathbb{R}^{n \times 1}$  y  $d \in \mathbb{R}^{m-n \times 1}$  entonces:

$$\|Ax - b\|_2^2 = \|QA x - Qb\|_2^2 = \|R_1 x - c\|_2^2 + \|d\|_2^2$$

la  $\|Ax - b\|_2^2$  y  $\|QAx - Qb\|_2^2$  tienen el mismo mínimo con la ventaja de que  $QA$  es triangular, y puesto que los mínimos de  $\|QAx - Qb\|_2^2$  son los mismos que los de  $\|Ax - b\|_2^2$ , la solución al problema se obtiene en el siguiente paso.

**Paso 2:** Resolución por sustitución inversa.

Resolver el nuevo sistema  $R_1x - c = 0$  por sustitución inversa, además se tiene que la suma de residuos al cuadrado es:

$$r^2 = \|d\|_2^2$$

y el vector de residuos  $r = Ax - b$  se obtiene como:

$$r = Q \begin{bmatrix} 0 \\ d \end{bmatrix}$$

El proceso descrito se denomina triangularización o factorización ortogonal.

Otra forma de triangularización es usar transformaciones elementales de tal forma que sea posible expresar  $A = LU$  como producto de una matriz subtriangular (Lower) y otra supertriangular (Upper), con lo que el sistema de ecuaciones dado por  $Ax = b$  se transforma en  $LUx = b$  cuya resolución se reduce a resolver dos sistemas triangulares de dos etapas:

1.  $Ly = b$  que se resuelve por sustitución directa.
2.  $Ux = y$  que se resuelve mediante sustitución inversa.

### Propagación de errores

En los algoritmos que involucran secuencias de matrices que suponen transformaciones ortogonales de Householder o Givens se produce una propagación de los errores de redondeo propios del cálculo. Las propiedades asociadas a las transformaciones de Householder son bastante buenas ya que el vector calculado  $\hat{w}$  que genera la transformación  $\hat{H}$  calculada, es muy próximo al  $w$  teórico que genera la  $H$  teórica, verificando que:

$$\|\hat{H} - H\| = \epsilon$$

y el error asociado al producto:

$$\widehat{H}A = H(A + E) \quad \|E\| = \epsilon\|A\|$$

$$A\widehat{H} = (A + E)H \quad \|E\| = \epsilon\|A\|$$

donde  $\epsilon$  representa la unidad de redondeo en los cálculos.

En cuanto a las rotaciones de Givens también tienen propiedades numéricas favorables, de la misma manera la rotación de Givens calculada  $\widehat{G}$  se corresponde con la rotación teórica de una matriz muy próxima y así:

$$\cos\widehat{\theta} = \cos\theta(1 + \epsilon)$$

$$\sin\widehat{\theta} = \sin\theta(1 + \epsilon)$$

y el error asociado al producto:

$$\widehat{G}A = G(A + E) \quad \|E\| \approx \epsilon\|A\|$$

$$A\widehat{G} = (A + E)G \quad \|E\| \approx \epsilon\|A\|$$

En la modificación de una matriz  $A = A_0 \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  por transformaciones ortogonales donde la secuencia de reflexiones y rotaciones produce  $A_1, \dots, A_p = B$  matrices generadas a través de transformaciones tipo:

$$A_k = \widehat{H}A\widehat{G} \quad k = 1 \dots p$$

se verifica que siendo  $H$  y  $G$  las matrices calculadas en ausencia de redondeo:

$$B = (H_1 \dots H_p)(A + E)(G_1 \dots G_p)$$

donde  $\|E\| \leq c\epsilon\|A\|$  siendo  $c$  una constante que depende de  $n, m$  y  $p$ . En otras palabras,  $B$  es la exacta transformación ortogonal de una matriz muy próxima a  $A$ .

### Particularidades cuando la matriz $A$ es deficiente o casi deficiente de rango

Cuando  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  y  $\text{Rango}(A) = r < n$  o su número de condición es alto, lo que suele denominarse *casi deficiente* de rango, la solución mínimos cuadrados

no es única, y para calcular una de ellas hay que imponer algún requerimiento extra, como es que la solución tenga norma mínima. El siguiente resultado garantiza que de todas las soluciones sólo una de ellas tiene norma mínima. El conjunto de todas las soluciones se puede representar por:

$$\chi = x \in \mathbb{R}^n : \|Ax - b\|_2 = \text{mín}$$

Sean  $x_1$  y  $x_2$  dos soluciones y  $\lambda$  un escalar  $\in [0, 1]$  entonces:

$$\begin{aligned} \|A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) - b\|_2 &\leq \lambda \|Ax_1 - b\|_2 \leq \lambda \|Ax_1 - b\|_2 + (1 - \lambda) \|Ax_2 - b\|_2 = \\ &= \text{mín} \|Ax - b\|_2 \end{aligned}$$

puesto que  $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in \chi$ , entonces  $\chi$  tiene un único elemento con mínima norma, y ese elemento es la solución mínimos cuadrados.

Además la triangularización ortogonal de la forma  $A = QR$  de la matriz presenta grandes dificultades prácticas siendo necesario el intercambio de columnas y encontrar el criterio que permita decidir cuándo la base ortonormal que forma las columnas de  $Q$  está calculada, ya que esto puede no detectarse cuando la deficiencia no es muy grande. El siguiente teorema permite la triangularización en este caso:

**Teorema 2.3.5** [20] *Dada la matriz  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $r < n$  existe una permutación, representada por la matriz  $P$  y una matriz ortogonal  $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , tales que*

$$QAP = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

donde  $R_{11} \in \mathbb{R}^{r \times r}$  es triangular superior con todos los elementos de la diagonal principal positivos

**Prueba**

Si el  $\text{Rango}(A) = r$ , siempre es posible elegir una permutación  $P$  tal que

$$AP = [A_1, A_2],$$

donde las columnas de  $A_1$  son linealmente independientes. Sea la descomposición ortogonal  $QR$  de  $A_1$  tal que

$$QA_1 = \begin{bmatrix} R_{11} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$QAP = [A_1, A_2] = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} \\ 0 & R_{22} \end{bmatrix}$$

Como  $Rango(QAP) = Rango(A) = r$ , la matriz  $R_{22} = 0$ , de lo contrario  $QAP$  tendría más de  $r$  filas linealmente independientes, lo cual es imposible.  $\square$

Si nos centramos en la descomposición de valores singulares la deficiencia de rango se puede detectar y manejar, ya que si  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \lambda_n \geq 0$  son los valores singulares de  $A$  ordenados, si el  $Rango(A) = n$  todos los valores son positivos y si  $Rango(A) = r < n$  entonces los  $s$  primeros valores son positivos y el resto son 0. Aunque en el cálculo y debido a los errores de redondeo los  $n - r$  valores restantes no sean exactamente cero.

## 2.4. Sistemas de ecuaciones lineales con matrices dispersas

Las matrices dispersas son aquellas matrices de gran tamaño en las que *muchos* de los elementos que las configuran son cero, tal es el caso de los sistemas asociados a las observaciones de satélites GPS. El término *muchos*, es susceptible de matizar ya que no hay un acuerdo en cuanto a la cantidad de ceros que debe tener una matriz para que sea dispersa. A pesar de ello, una matriz debe considerarse dispersa si merece la pena manipularla mediante procesos diseñados para este propósito, independientemente del número de ceros que contenga [75].

En el caso de que la matriz  $A$  sea dispersa o tenga una estructura determinada, hace pensar en esa característica a la hora de elegir el mejor método de resolución. Los métodos descritos anteriormente se adaptan fácilmente a matrices dispersas ya que hoy día los paquetes de cálculo matricial tienen implementados algoritmos de almacenamiento y operaciones con matrices dispersas que tienen en cuenta la estructura. Pero hay un aspecto muy importante cuando se trabaja con matrices dispersas que es el orden en que se tratan las filas y columnas, ya que en el transcurso de las operaciones necesarias para

resolver el sistema a través de cualquier clase de factorización se producen elementos distintos de cero en lugares donde antes había ceros (elementos de relleno, *fill-in*). La reordenación de las ecuaciones cuyo objetivo es evitar este efecto de relleno es la estrategia que debe seguirse cuando la matriz que tratamos es dispersa. A través del estudio de la estructura dispersa que presenta la matriz se puede ver el efecto que las diferentes reordenaciones tienen en la factorización de la matriz.

Recordemos que una reordenación de filas de una matriz equivale a pre-multiplicar dicha matriz por una permutación de la matriz identidad. Una reordenación de columnas equivale a postmultiplicar por una permutación de la matriz identidad. Una permutación simétrica es aquella que se aplica tanto a filas como a columnas.

Para definir una reordenación óptima debe tenerse en cuenta la estructura de la matriz, y el tipo de operaciones que se van a realizar con ella. En nuestro caso en el que se quiere resolver el problema de mínimos cuadrados, interesa:

**Factorizar A mediante transformaciones ortogonales  $QA=R$ .** Como  $R$  es supertriangular una reordenación que nos agrupara los elementos de esa manera facilitaría posteriormente la factorización. La permutación de Dulmage-Mendelsohn encuentra la permutación de filas y columnas para que  $A$  tenga estructura simbólica supertriangular por bloques.

**Factorizar A mediante transformaciones elementales  $A=LU$ .** Una reordenación que conservara la dispersidad al hacer factores triangulares tipo  $L$  y  $U$ , facilitaría el proceso. La permutación aproximada de grado mínimo [39] encuentra la permutación de columnas que hace que la descomposición en factores triangulares tienda a tener factores más dispersos.

**Factorizar las ecuaciones normales  $A^tA$ .** Dado que la matriz de ecuaciones normales es simétrica, una reordenación que asegurara factores de Cholesky más dispersos que los asociados a la matriz original sería una buena estrategia. La permutación simétrica aproximada de grado mínimo tiende a hacer factores de Cholesky más dispersos.

Trabajar con matrices reordenadas en las que el número de elementos de relleno se reduce considerablemente presenta tres grandes ventajas:



1. Disminución del número de posiciones de memoria que se han de reservar para los elementos distintos de cero que surgen en el proceso de factorización.
2. Disminución del número de operaciones a realizar, y por tanto, tiempo total para resolver el correspondiente sistema.
3. Mejora en la estabilidad numérica del proceso global de resolución, al disminuir el número de elementos a considerar, y por tanto disminuir la influencia de los errores de redondeo y errores de cancelación.

El tratamiento de problemas de mínimos cuadrados dispersos tendrá en cuenta antes de resolver el sistema, explotar la dispersidad mediante reordenaciones convenientes, bien sea a través de las ecuaciones normales, a través de los valores singulares o mediante transformaciones ortogonales.

## 2.5. Análisis descriptivo y cuantitativo del modelo de ecuaciones

En esta sección se procederá a realizar un análisis descriptivo y cuantitativo con unos datos de observación concretos.

### 2.5.1. Matriz del modelo

Dada la gran cantidad de ecuaciones que se generan desde cada uno de los satélites, y debido al gran trabajo que supone realizar cálculos con todas ellas, el procesado de los datos y la forma de resolver el sistema resultante es de crucial importancia. La posibilidad, además, de utilizar bloques de observaciones de distintos satélites o distintas épocas, que, aunque con distintas incógnitas, mantienen la misma estructura, nos lleva a estudiar bien la forma que presentan las matrices asociadas al modelo de ecuaciones de observación.

Veamos a continuación la estructura de las matrices ya linealizadas, cuantificando su dispersidad su rango y su número de condición, lo que nos permitirá elegir el mejor método de resolución.

La matriz de diseño asociada, procedente de la linealización, resulta altamente dispersa cuantas más observaciones se hagan. Hay distintos modelos para las observaciones de satélite, las observaciones directas, y combinaciones lineales de ellas.

En esta tesis se trabajará únicamente con observaciones directas, y desde un sólo receptor. El uso de observaciones directas se debe a que las combinaciones lineales producen pérdida de información. El uso de un sólo receptor es debido a que el problema que se pretende resolver es un posicionamiento absoluto de precisión. La doble frecuencia se ha utilizado no para generar el doble de observaciones sino para corregir el efecto Ionosférico. Llamando  $s$  al número de satélites,  $t$  al número de épocas (instantes de observación), y considerando un único receptor y una frecuencia, la estructura de la matriz puede dividirse en tres tipos de submatrices:

- Un bloque denso de dimensión  $(s \times t, 3)$ . Tanto para las ecuaciones provenientes de observaciones de pseudodistancia como de medida de fase.
- $t$  bloques columna de dimensión  $(s, t)$  y de valor la unidad. Tanto para las ecuaciones provenientes de observaciones de pseudodistancia como de medida de fase.
- $t$  bloques diagonales de dimensión  $(s, s)$  y de valor la unidad. Esta estructura sólo aparece si se consideran las observaciones de medida de fase.

La dimensión total de la matriz en el caso de las ecuaciones de medida de fase es,  $s \times t, 3 + s + t$ . Cada ecuación aporta 5 coeficientes distintos de cero: 3 de posición, 1 de ambigüedad y 1 tiempo del receptor.

La dimensión total de la matriz en el caso de las ecuaciones de medida de pseudodistancia es,  $s \times t, 3 + t$  incógnitas. Cada ecuación aporta 4 coeficientes distintos de cero: 3 de posición y 1 tiempo del receptor.

En la figura 2.6 se pueden observar las submatrices mencionadas para unos datos de observación concretos, éstos son los relativos al 6-9-2002 de la estación ALGONQUIN (Canadá) y se han particularizado para  $s = 8$ ,  $t = 10$ .

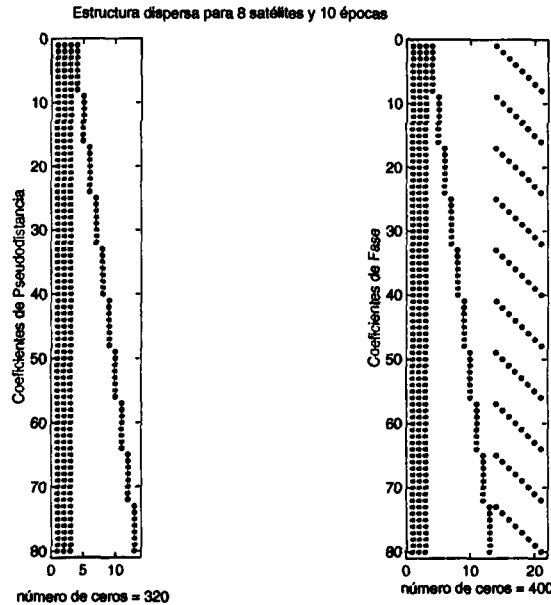


Figura 2.6: Estructura de la matriz de diseño, observaciones de pseudodistancia y fase.

En la tabla 2.2 se han calculado algunos parámetros de la matriz, para distintos sistemas de ecuaciones. Se puede observar cómo para mayor número de observaciones, la densidad en porcentaje de la matriz de diseño disminuye, y cómo el número de condición de la matriz aumenta.

Épocas	Ecuac.	Incógnitas		Densidad %		Rango		Nº Condición	
		F	P	F	P	F	P	F	P
2	16	13	5	38	80	12	5	$2,18e + 017$	8,73
5	40	16	8	31	50	15	8	$2,16e + 017$	9,51
10	80	21	13	23	30	20	13	$2,89e + 017$	11,38
30	240	41	33	12	12	40	33	$1,55e + 017$	16,65
100	800	111	103	4	3	110	103	$8,01e + 016$	22,87

Tabla 2.2: Matriz de diseño para modelo de medida de fase (F) y pseudodistancia (P)

La matriz es deficiente de rango en el caso de ecuaciones de fase, ya que el número de incógnitas es superior al rango en una unidad, esto implica una dependencia lineal de una columna. Esta dependencia proviene de la particular estructura de los bloques de la matriz con valor unidad, así la columna cuarta

se puede poner como combinación lineal de las columnas 5 a  $n$  de la siguiente forma, siendo  $m \times n$  la dimensión de la matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{1,4} \\ a_{2,4} \\ \vdots \\ a_{m,4} \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} a_{1,5} & \cdots & a_{1,n-s} & a_{1,n-s+1} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,5} & \cdots & a_{2,n-s} & a_{2,n-s+1} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & & & & & \\ a_{m,5} & \cdots & a_{m,n-s} & a_{m,n-s+1} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}_{m \times n-4} \begin{bmatrix} -1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{n-4 \times 1} \quad (2.24)$$

Cada elemento de la columna se escribe:

$$a_{i,4} = -a_{i,5} \dots - a_{i,n-s} + a_{i,n-s+1} \dots + a_{i,n} \quad (2.25)$$

para  $i = 1 \dots m$ .

En estas circunstancias de deficiencia de rango al realizar la inversión puede producirse un gran error. El número de condición de la matriz es altísimo, lo que implica mal condicionamiento.

En el caso de la matriz de ecuaciones de pseudodistancia, no se produce la deficiencia de rango pero tampoco existe buen condicionamiento, aunque este es mucho mejor. El mejor condicionamiento se produce cuando el número de condición es 1.

### 2.5.2. Matriz de ecuaciones normales

Como ya vimos en los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones, un forma de resolverlos es a través de las ecuaciones normales, cuya matriz asociada  $N$  es simétrica, i.e.  $N = N^t$ . Esto es así porque la matriz de ecuaciones normales está formada por el producto de tres matrices  $N = A^t P A$ , donde  $P$  es la matriz diagonal de pesos (para simplificar se puede asumir  $P = I$ ) y  $A$  es la matriz rectangular del modelo. Además  $N$  es definida positiva y su determinante es mayor o igual que cero, este último caso ocurre cuando hay deficiencia de rango.

La matriz  $N$  de ecuaciones normales es dispersa y tiene una cierta estructura. Los elementos distintos de cero se agrupan como se observa en la figura 2.7 para las ecuaciones de pseudodistancia y en la figura 2.8.

En la tabla 2.3 se han calculado los números de condición, y la densidad, en porcentaje, de la matriz de ecuaciones normales. Como era de esperar el número de condición es mayor que para la matriz de diseño, y la densidad también como se puede ver en la tabla 2.2. En cuanto al rango, la deficiencia se mantiene para las ecuaciones de fase.

Épocas	Densidad %		N° Condición	
	F	P	F	P
2	65	92	$1,57e + 020$	76,33
5	70	68	$1,19e + 018$	90,44
10	66	46	$1,14e + 017$	$1,29e + 002$
30	44	20	$3,15e + 017$	$2,77e + 002$
100	19	6	$1,01e + 018$	$5,23e + 002$

Tabla 2.3: Matriz de ecuaciones normales para modelo de medida de fase (F) y pseudodistancia (P)

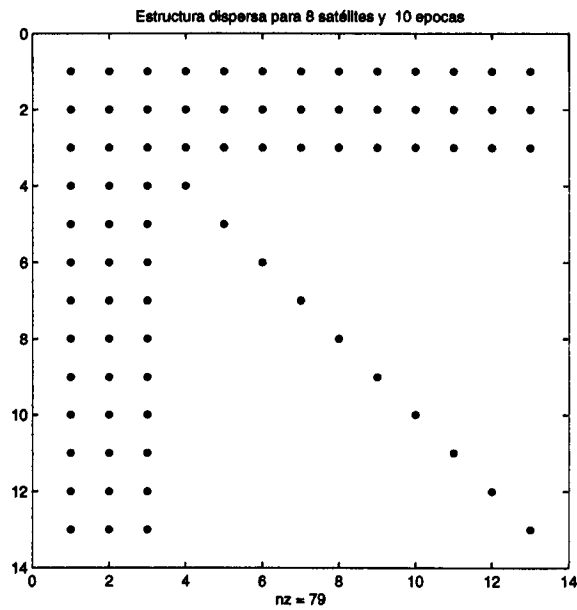


Figura 2.7: Estructura de la matriz de ecuaciones normales. Observaciones de pseudodistancia.

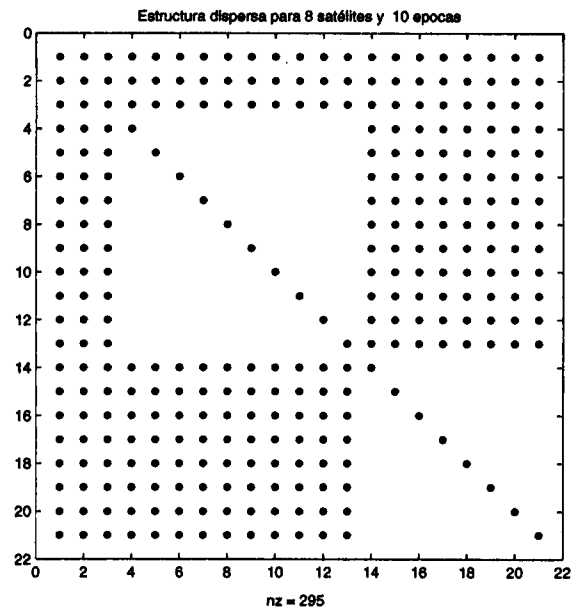


Figura 2.8: Estructura de la matriz de ecuaciones normales. Observaciones de fase.

### 2.5.3. Reordenaciones de las matrices del modelo y de las ecuaciones normales

En todas las figuras de esta sección denotaremos por  $nz$  el número de ceros de la matriz. Para los mismos datos del apartado anterior se muestra el aspecto de las matrices tras utilizar diferentes reordenaciones.

#### Reordenación de Dulmage-Mendelsohn (D-M)

Esta reordenación encuentra una permutación de filas  $F$  y de columnas  $C$  de forma que  $F * A * C$  tiene un aspecto triangular superior por bloques. Las matrices reordenadas presentan la estructura de la figura 2.9.

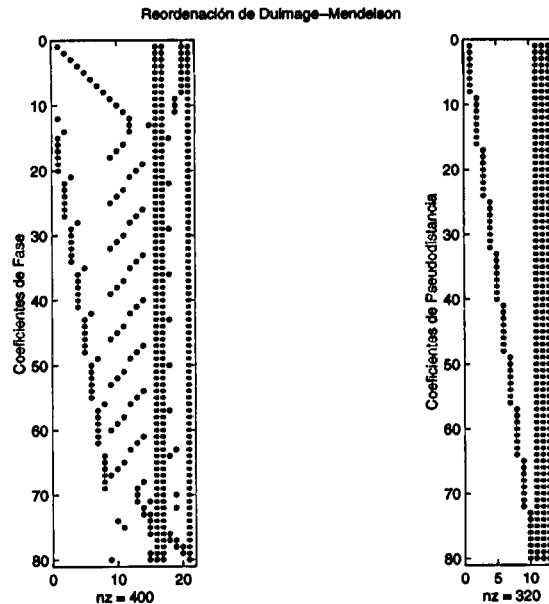


Figura 2.9: Estructura de la matriz de observaciones de fase y pseudodistancia. Reordenación de Dulmage-Mendelsohn

#### Reordenación de Grado Mínimo (GM)

Esta reordenación encuentra una permutación de columnas  $C$  de forma que  $A * C$  tiende a tener factor subtriangular (L) y supertriangular (U) más dispersos que  $A$ . Si la matriz es simétrica como es el caso de  $A^t A$  entonces  $(A * C)^t * A * C$  tiende a tener factor de Cholesky  $G$  más disperso que  $A^t A$ . Ex-

este la versión para matrices simétricas denominado Grado Mínimo Simétrico (GMS).

### Reordenación Aproximada de Grado Mínimo (GMA)

Similar a la anterior pero más rápida que la reordenación clásica de Grado Mínimo y genera factores  $L$  y  $U$  mucho más dispersos que ésta. En el caso de las ecuaciones de pseudodistancia actúa de la misma forma la reordenación de Grado Mínimo que la Aproximada de Grado Mínimo y ambas son iguales a la reordenación de Dulmage-Mendelsohn. La estructura de las matrices reordenadas para las ecuaciones de fase presentan la estructura de las figuras 2.10.

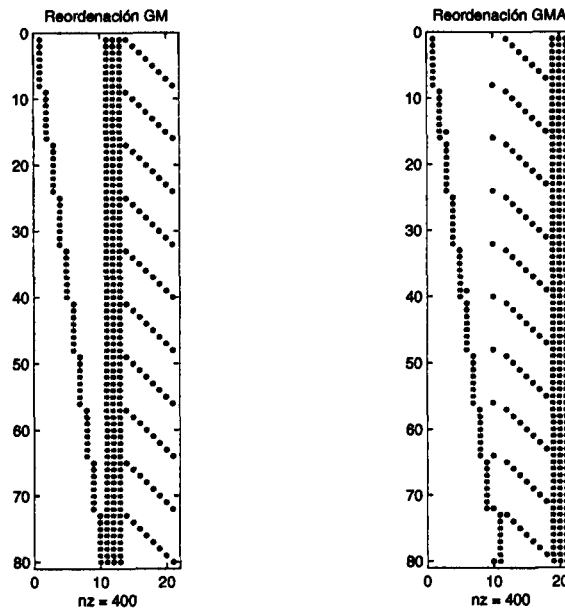


Figura 2.10: Estructura de la matriz de observaciones de fase. Reordenación de Grado Mínimo y Aproximada de Grado Mínimo

### Transformaciones ortogonales factores $Q, R$ y factor de Cholesky $G$

Según las referencias [42], [21], la estructura  $G$  que predice la factorización de  $A^t A$  por Cholesky, es igual a la estructura  $R$  que predice la factorización de  $A$  por el método basado en transformaciones ortogonales. Aunque el resultado estructural es igual, el número de operaciones llevado a cabo puede ser diferente, siendo aconsejable calcular  $R$  por Cholesky. En este caso el algoritmo



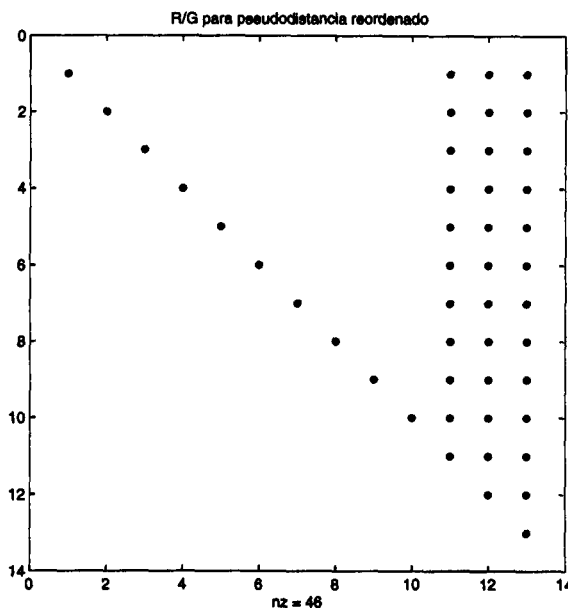


Figura 2.11: Factor  $R/G$  de la matriz observaciones de pseudodistancia para cualquier reordenación

Aproximado de Grado Mínimo y el clásico de Grado Mínimo se aplican en su versión simétrica.

Los resultados obtenidos para la factorización de  $A$  sin reordenar producen factores  $G$  y por tanto  $R$  completamente densos tanto en ecuaciones de pseudodistancia como de fase. Las reordenaciones de Dulmage-Mendelsohn, Aproximada de Grado Mínimo y Grado Mínimo producen factores dispersos pero no se encuentran grandes diferencias entre una reordenación y otra cuando se utilizan las ecuaciones de fase; en la figura 2.12 se ha mostrado la reordenación de Grado Mínimo. Para las ecuaciones de pseudodistancia cualquier reordenación produce exactamente los mismos resultados, figura 2.11.

En cuanto a los factores  $Q$ , tras la reordenación, y tanto para ecuaciones de pseudodistancia como para fase presentan un aspecto muy similar y bastante denso, sea cual sea la reordenación, tal y como se muestra en las figuras 2.13 y 2.14

La dispersidad de los factores  $R/G$  se hace más evidente cuando el número de ecuaciones aumenta. La figura 2.15 muestra el aspecto del factor para 100

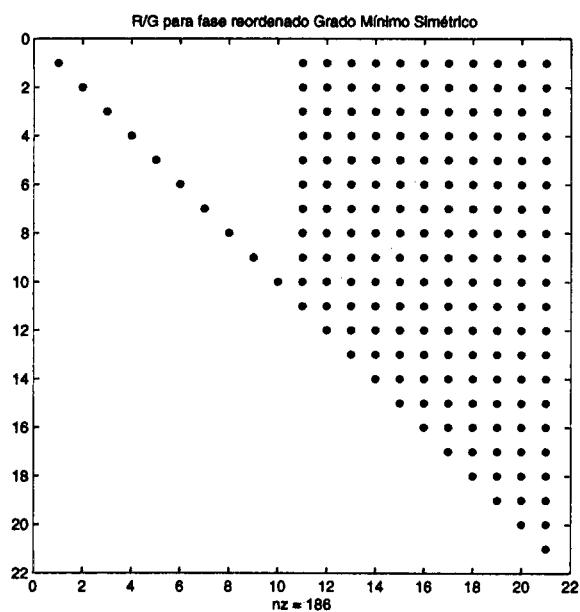


Figura 2.12: Factor R/G de la matriz observaciones de fase reordenada por Grado Mínimo Simétrico

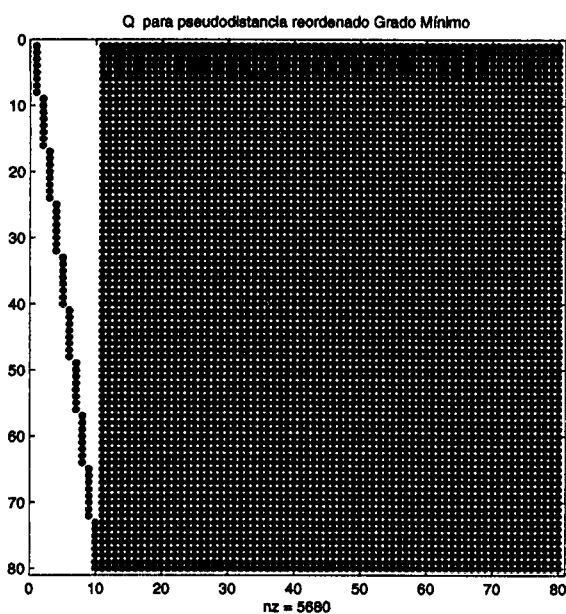


Figura 2.13: Factor Q de la matriz observaciones de pseudodistancia reordenada por Grado Mínimo

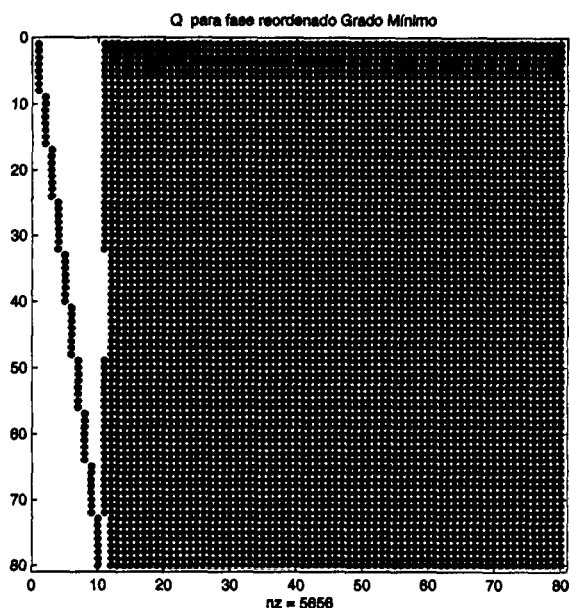


Figura 2.14: Factor Q de la matriz observaciones de fase reordenada por Grado Mínimo

épocas en ecuaciones de pseudodistancia para las que cualquier reordenación produce las misma factorización.

Cuando se utilizan las ecuaciones de fase, las diferencias encontradas entre las distintas reordenaciones en cuanto a dispersidad resultan un poco más evidentes que en el caso de utilizar solamente 10 épocas, pero no son muy significativas. En la figura 2.16 se han reordenado las ecuaciones normales usando el algoritmo Aproximado de Grado Mínimo Simétrico (GMSA), el número de entradas distintas de cero es 1155. En la figura 2.17 se ha usado el de Grado Mínimo Simétrico (GMS), y las entradas distintas de cero son 1045, y en la figura 2.18 se ha reordenado la matriz original por el algoritmo Aproximado de Grado Mínimo (GMA), y posteriormente se forman las ecuaciones normales. Es este último caso el que muestra una mayor dispersidad ya que el número de entradas distintas de cero es 828 lo que parece apuntar a que la reordenación previa a la formación de las ecuaciones normales mejora la dispersidad.

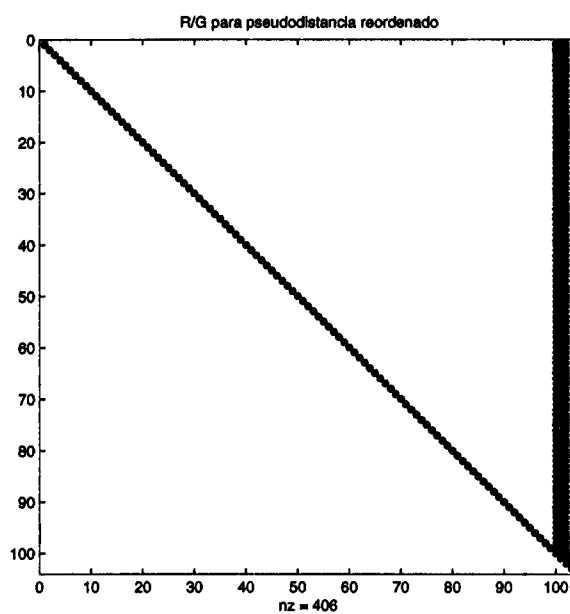


Figura 2.15: Factor R/G de la matriz observaciones de pseudodistancia, 100 épocas, para cualquier reordenación

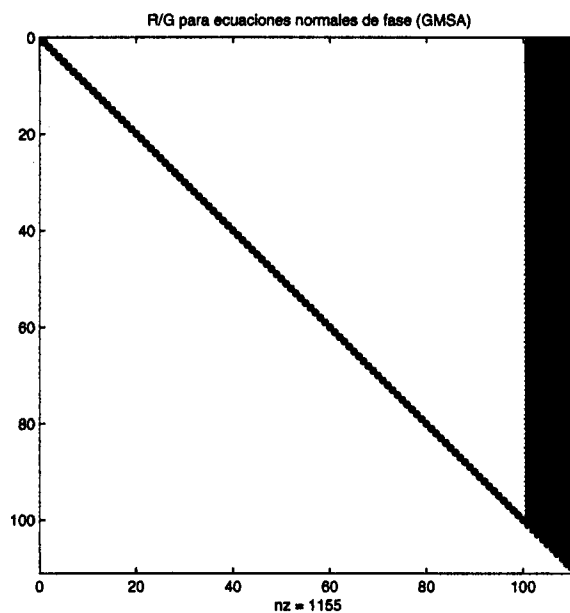


Figura 2.16: Factor R/G de la matriz observaciones de fase reordenada 100 épocas (GMSA)

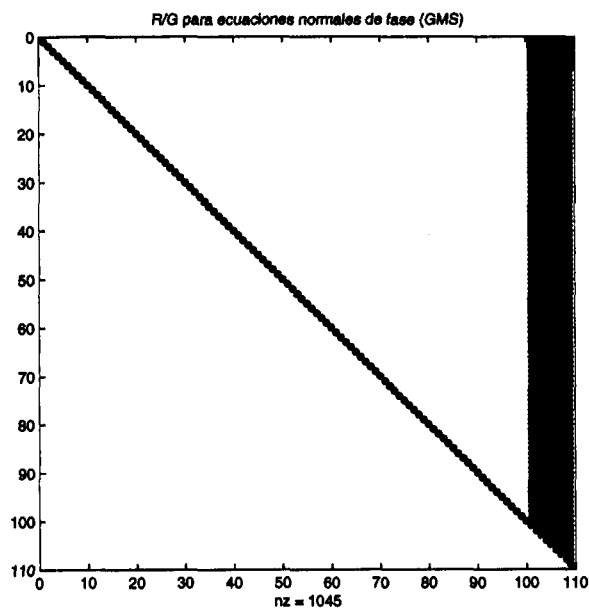


Figura 2.17: Factor R/G de la matriz observaciones de fase reordenada 100 épocas (GMS)

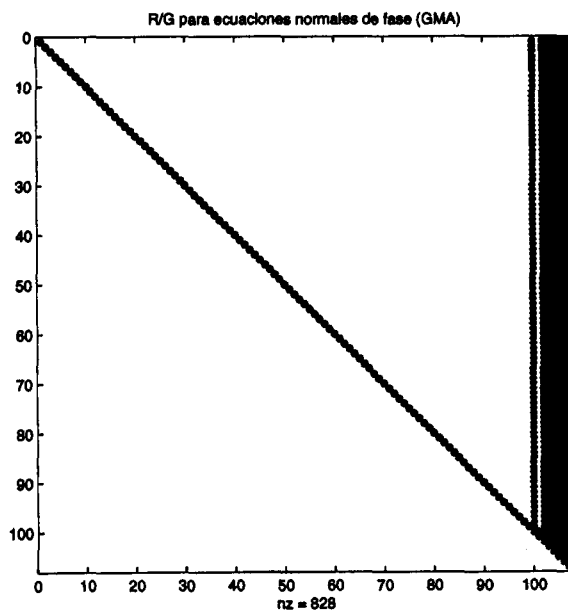


Figura 2.18: Factor R/G de la matriz observaciones de fase reordenada 100 épocas (GMA)

### Transformaciones elementales, factores L y U

Los resultados obtenidos para la factorización de  $A$  sin reordenar producen factores  $L$  y  $U$  menos densos que usando factores ortogonales, en las figuras 2.19, y 2.20 se muestran estos factores.

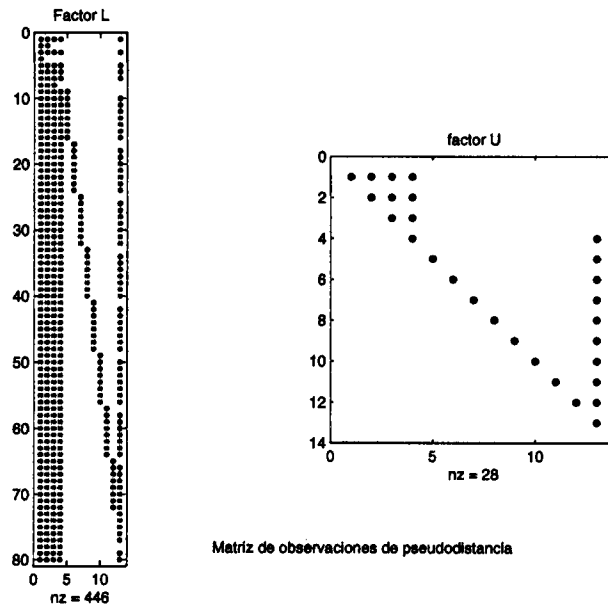


Figura 2.19: Factores L U de la matriz observaciones de pseudodistancia

Mediante las reordenaciones estos factores  $L$ ,  $U$  tienden a ser más dispersos. Para las ecuaciones de pseudodistancia todas las reordenaciones producen la misma estructura factorizada y esta es la mostrada en la figura 2.21. Para las ecuaciones de fase existen diferencias en cuanto a la reordenación utilizada, produciendo factores mucho más dispersos la reordenación de Grado Mínimo Aproximada (GMA). En las figuras 2.22 y 2.23 se muestran las de Grado Mínimo (GM) y Grado Mínimo Aproximada (GMA).

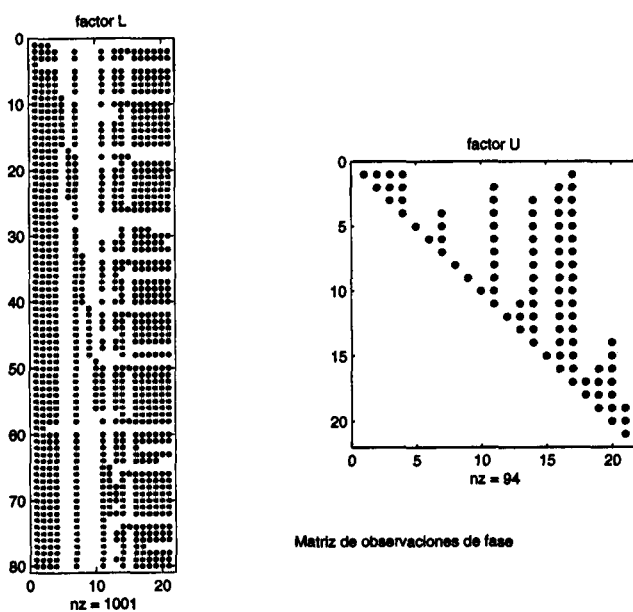


Figura 2.20: Factor L U de la matriz observaciones de fase

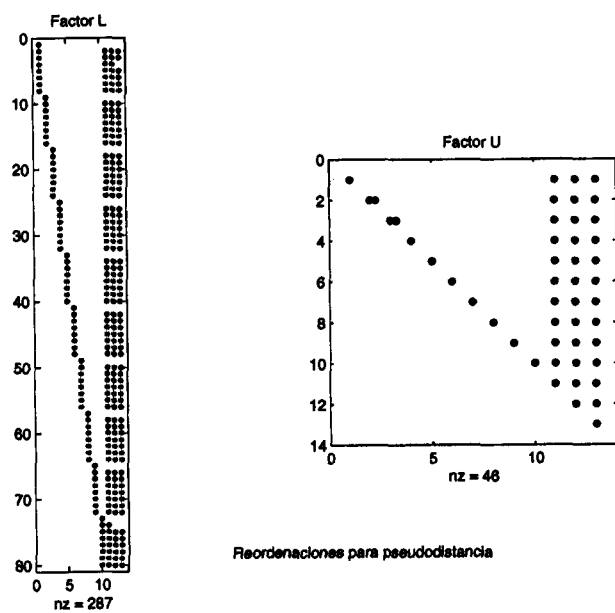


Figura 2.21: Factores L U de la matriz observaciones de pseudodistancia para cualquier reordenación

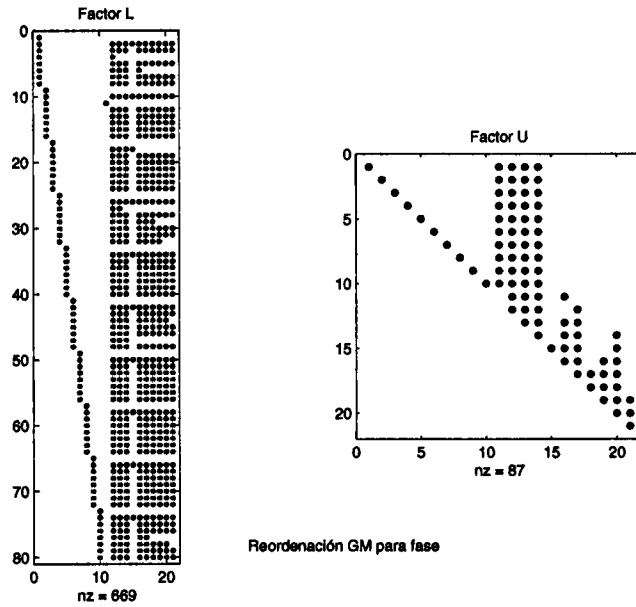


Figura 2.22: Factores L U de la matriz observaciones de fase reordenada (GM)

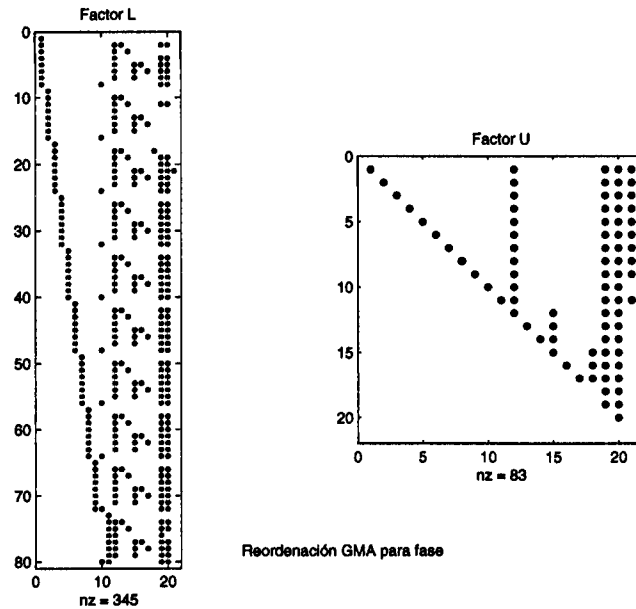


Figura 2.23: Factores L U de la matriz observaciones de fase reordenada (GMA)



### 2.5.4. Valores singulares

En un problema de mínimos cuadrados dada  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  los valores propios  $\lambda_i^{-1}$  de la matriz  $(A^t A)^{-1}$  definen el hiperelipsoide de error cuyos semiejes son  $E_i = cte \sqrt{\lambda_i^{-1}}$ , estos valores propios son los inversos de los valores propios  $\lambda_i$  de  $A^t A$ . Las direcciones de los semiejes vienen dadas por los vectores propios  $V$  tales que  $A^t A = V \Lambda V^t$ , donde  $\Lambda$  es la matriz de los valores propios de  $A^t A$ . Así pues el error dependerá exclusivamente de los valores propios y los vectores propios.

Para matrices rectangulares la noción de valor propio se debe sustituir por valor singular, y estos son  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ , las raíces cuadradas positivas de los valores propios de la matriz cuadrada  $A^t A$ . así pues el hiperelipsoide de error viene caracterizado por:

$$E_i = \lambda_i^{-1}$$

Los valores singulares de la matriz de observaciones de pseudodistancia son los que se muestran en la figura 2.24.

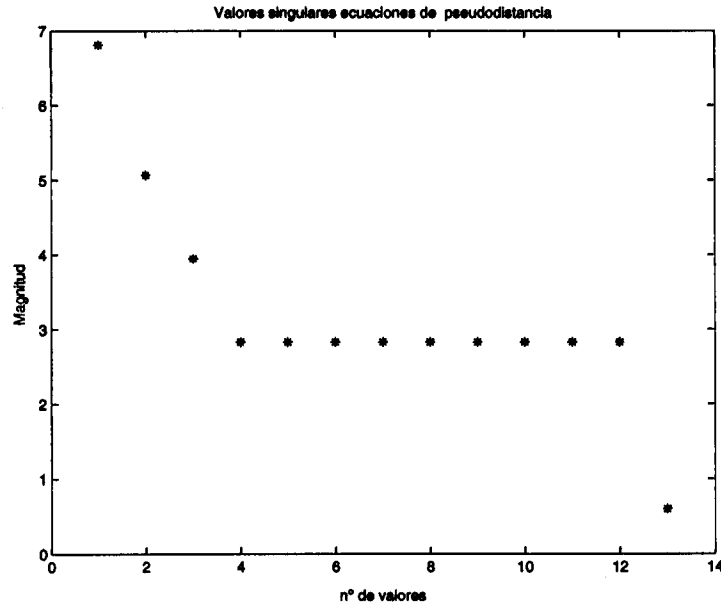


Figura 2.24: Valores singulares de la matriz observaciones de pseudodistancia para 10 épocas

Para observaciones de fase los valores singulares se muestran en la figu-

ra 2.25.

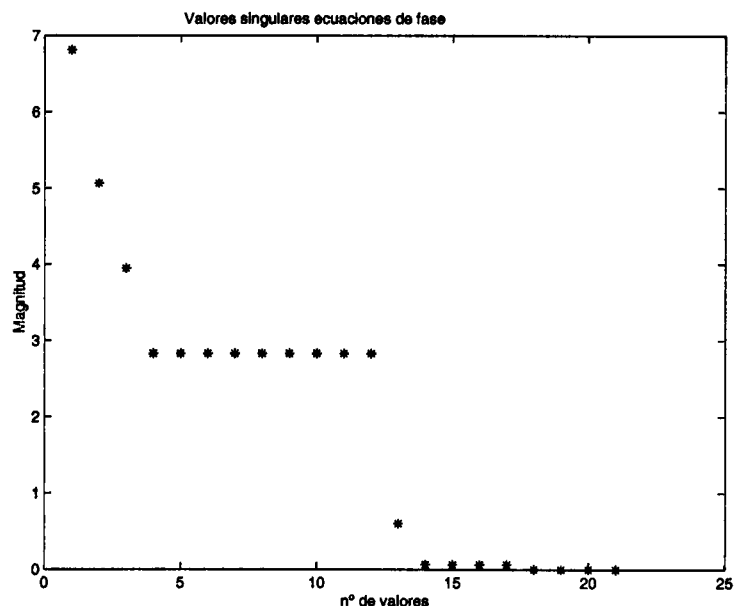


Figura 2.25: Valores singulares de la matriz observaciones de fase para 10 épocas

Los valores singulares  $\lambda_4, \dots, \lambda_{12}$  de la matriz tanto de las observaciones de pseudodistancia como de fase presentan un valor de multiplicidad 9, este valor está mal condicionado, lo que induce inestabilidad en la matriz y confirma el mal condicionamiento de los sistemas. En la matriz de observaciones de fase, además, debido a su deficiencia de rango hay un valor singular que es prácticamente cero, lo que aumenta el mal condicionamiento en este caso.

Las reordenaciones de las matrices no alteran los valores singulares en el caso de las ecuaciones de pseudodistancia, pero sí en el caso de ecuaciones de fase, sin embargo la variación es pequeña, ya que el número de condición se mantiene dentro del mismo orden.

### 2.5.5. Matriz de segundas derivadas

El enfoque de resolución del sistema mediante optimización según la ecuación (2.20) incluye una matriz de segundas derivadas, y según lo ya indicado,

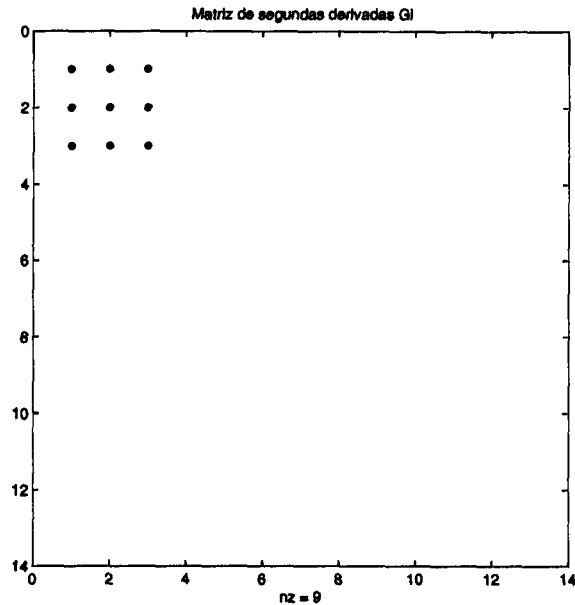


Figura 2.26: Matriz de segundas derivadas observaciones de pseudodistancia para 10 épocas

la solución mediante ecuaciones normales representa un caso particular de este método, cuando la matriz  $G_i$  se desprecia. Para los modelos de ecuaciones que se tratan en esta tesis vamos a calcular esta matriz para ver si se puede considerar despreciable.

En las observaciones de pseudodistancia para cada observación, y siguiendo con el ejemplo de  $s = 8$ , y  $t = 10$ , la matriz es de dimensión  $13 \times 13$ , mientras que para observaciones de fase la dimensión es de  $21 \times 21$ , pero en ambos casos presenta el aspecto de la figura 2.26.

Los valores que toman esos elementos distintos de cero se pueden calcular según la expresión (2.18), y su valor es del orden de  $10^{-8}$  m por tanto este enfoque nos lleva a considerarlo igual que si se resuelve el sistema mediante las ecuaciones normales.

## 2.6. Correcciones en el proceso de resolución

La resolución de los sistemas descritos en las secciones anteriores, requiere como paso previo, que los datos observados así como los datos de los satélites sufran una serie de correcciones de los errores agrupados bajo el nombre de retardos y que se han descrito en el capítulo primero. Las que se han tenido en cuenta a lo largo de este trabajo son:

1. Para tratar el error en las efemérides transmitidas por el satélite, se han utilizado efemérides precisas cada minuto proporcionadas por el Centro Europeo de Operaciones Espaciales (ESOC) perteneciente a la Agencia Espacial Europea (ESA).
2. Para tratar el error en el estado del reloj del satélite, se han utilizado los datos para los relojes calculados cada 5 minutos por el centro ESOC.
3. Para eliminar la influencia de la Ionosfera se ha utilizado la combinación de las dos frecuencias transmitidas denominada combinación Ionosfera libre que está exenta de error.
4. La influencia de la Troposfera se ha corregido teniendo en cuenta la elevación del satélite a partir de las correcciones estimadas en el cénit cada dos horas y proporcionadas por el centro ESOC.

Un esquema del software desarrollado en entorno MATLAB para la realización de cálculos y gráficos se describirá en el Anexo A.



## Capítulo 3

# Sensibilidad frente a las perturbaciones

Una vez definidos y analizados los sistemas de ecuaciones con los que trataremos, analizaremos en este capítulo cuestiones relacionadas con la sensibilidad de los sistemas a las perturbaciones, a través de los números de condición y de los valores propios.

Un problema que aparece en todos los procesos en que intervienen observaciones, y en el que se pretende determinar cualquier valor numérico es el hecho de que la precisión aritmética no es infinita y que los datos reales de observación son inexactos. Así un sistema de ecuaciones que se puede enunciar:  $Ax = b$  donde  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $b \in \mathbb{R}^m$  tiene solución si y solo si:

1.  $b$  pertenece al espacio imagen de  $A$ , y esta solución es única si y solo si
2. El Núcleo de  $A$  se reduce al elemento cero.

Debido a la finitud de la precisión y a la inexactitud de los datos, lo menos frecuente que se presenta en las ecuaciones que surgen en la naturaleza, derivadas de observaciones sistemáticas, son sistemas que cumplan las condiciones anteriores, y por tanto cabe preguntarse:

- ¿Qué ocurre cuando  $A$  es deficiente de rango y por tanto su Núcleo no se reduce a cero?
- Si  $A$  y  $b$  son perturbados pequeñas cantidades. ¿Cómo se ve afectada  $x$ ?

- Si  $b$  no pertenece al espacio imagen. ¿Cómo se puede determinar  $x$  de forma que  $Ax$  esté lo más próximo a  $b$  como podamos?

La respuesta a estas tres cuestiones requiere un lenguaje que haga precisa la noción de ‘pequeña perturbación’, ‘casi deficiencia de rango’ y ‘distancia’. El concepto de *norma*, *rango* y *número de condición* nos permitirá abordar las interrogantes anteriores.

El capítulo está organizado como sigue:

En las tres primeras secciones se revisan conceptos relacionados con la norma matricial, los sistemas mal condicionados y el indicador clásico del mal condicionamiento que es el número de condición. En la sección cuarta se da una expresión para acotar el error relativo cuantificando el tamaño de las perturbaciones, esta acotación es más rigurosa que la que la obtenida mediante el número de condición. En la sección quinta y mediante el número de condición por componente se muestra que hay al menos una componente del vector solución cuya sensibilidad relativa a las perturbaciones es proporcional al número de condición de la matriz, pero que pueden existir otras componentes mucho mejor condicionadas. Este resultado se da tanto para perturbaciones en la matriz de diseño como en la matriz de términos independientes. Al final de la sección se calculan los números de condición por componente para los datos concretos de observación usados en el capítulo anterior. Por último en la sección sexta se analiza mediante el mapa espectral de la matriz la estabilidad de los valores singulares de las matrices de los modelos de ecuaciones de observación.

### 3.1. Norma matricial

Una norma en el espacio de matrices  $\mathfrak{R}^{m \times n}$  es una función  $f : \mathfrak{R}^{m \times n} \rightarrow \mathfrak{R}$  que verifica:

1.  $f(A) \geq 0 \quad A \in \mathfrak{R}^{m \times n} \quad f(A) = 0 \implies A = 0$
2.  $f(A + B) \leq f(A) + f(B) \quad A, B \in \mathfrak{R}^{m \times n}$
3.  $f(\alpha A) = |\alpha|f(A) \quad \alpha \in \mathfrak{R}, \quad A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$

Existen distintos tipos de normas matriciales que denotaremos por  $\|\cdot\|_i$ , siendo  $i$  el indicador del tipo de norma. La norma de Frobenius o F-norma y la p-norma son las más frecuentes. La F-norma se define como:

$$\|A\|_F = \left[ \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2 \right]^{1/2}$$

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}$$

Donde  $\|x\|_p$  es la norma de Hölder o p-norma vectorial definida por:

$$\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p} \quad p \geq 1$$

La p-norma matricial queda pues definida a través de la norma vectorial. Puede derivarse que  $\|A\|_p$  es la p-norma del mayor vector obtenido aplicando  $A$  a la p-norma de un vector unitario:

$$\|A\|_p = \sup_{x \neq 0} \left\| A \left( \frac{x}{\|x\|_p} \right) \right\|_p = \max_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_p$$

Las normas matriciales constituyen realmente familias de normas. Las p-normas tienen las siguientes propiedades:

$$\|Ax\|_p \leq \|A\|_p \|x\|_p \quad A \in \mathfrak{R}^{m \times n} \quad x \in \mathfrak{R}^n$$

La siguiente se conoce como propiedad submultiplicativa, y aunque no la verifican todas las normas, las que se utilizarán en este trabajo si la verifican.

$$\|AB\|_p \leq \|A\|_p \|B\|_p \quad A \in \mathfrak{R}^{m \times n} \quad B \in \mathfrak{R}^{n \times q} \quad (3.1)$$

La norma de Frobenius y las p-normas ( $p = 1, \dots, \infty$ ) satisfacen unas desigualdades que se utilizan mucho en análisis matricial y que posteriormente necesitaremos conocer. Estas son:



$$\begin{aligned}
\|Ax\|_2 &\leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2 \\
\max_{i,j} |a_{ij}| &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \max_{i,j} |a_{ij}| \\
\|A\|_1 &= \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \\
\|A\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \tag{3.2} \\
\frac{1}{\sqrt{n}\|A\|_\infty} &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m}\|A\|_\infty \\
\frac{1}{\sqrt{m}\|A\|_1} &\leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n}\|A\|_1 \\
\|Ax\|_2 &\leq \sqrt{\|Ax\|_1 \|Ax\|_\infty}
\end{aligned}$$

Otra propiedad importante de la 2-norma y de la F-norma es su invarianza ante transformaciones ortogonales, como también ocurre con la norma vectorial. Sean  $Q$  y  $Z$  ortogonales y  $\in \mathfrak{R}^{m \times m}$ ,  $\mathfrak{R}^{n \times n}$  respectivamente, entonces:

$$\|QAZ\| = \|A\|$$

En el espacio  $\mathfrak{R}^{m \times n}$  la elección de una u otra norma es irrelevante ya que todas son equivalentes. La 1-norma y la  $\infty$ -norma son las más fáciles de calcular. La norma permite hablar del concepto de distancia. De hecho el espacio  $\mathfrak{R}^n$  con la norma define un espacio métrico donde tiene sentido hablar de proximidad, convergencia y continuidad. Así si  $\bar{x}$  es una aproximación de  $x$  como solución de un sistema de ecuaciones lineales dado por  $Ax = b$  con  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$ , se puede definir el error absoluto ( $e_a$ ) y el error relativo ( $e_r$ ) en cualquier norma pues son equivalentes, como la distancia entre ellos en el sentido de la norma. Estos errores se definen como sigue:

$$\begin{aligned}
e_a &= \|x - \bar{x}\| \\
e_r &= \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|}
\end{aligned}$$

El concepto de  $e_r$  en la  $\infty$ -norma se puede asociar al número de dígitos correctos al tomar la solución aproximada por la real y así:

$$\frac{\|x - \bar{x}\|_\infty}{\|x\|_\infty} \approx 10^{-p}$$

significa que la mayor componente de  $\bar{x}$  tiene  $p$  dígitos correctos, las otras componentes pueden tener menos.

## 3.2. Definición de problema mal condicionado

La solución exacta de un sistema de ecuaciones depende de si este sistema está bien condicionado o si no lo está. Sarker Weiner y Jain [62] definen un problema bien condicionado si se cumplen las siguientes condiciones:

1. La solución  $x$  existe para cada elemento  $b$  del espacio de Hilbert  $B$ .
2. La solución  $x$  es única.
3. Pequeñas perturbaciones en  $b$  producen pequeñas perturbaciones en  $x$  sin necesidad de imponer restricciones adicionales.

Si cualquiera de las condiciones anteriores no se cumplen entonces el problema debe clasificarse de mal condicionado.

La primera condición deja de cumplirse si el número de ecuaciones independientes  $m$  no es igual al número de incógnitas  $n$ . La segunda condición no se cumple si el número de ecuaciones e incógnitas es el mismo pero existe alguna dependencia lineal entre las ecuaciones que hace que la matriz del sistema  $A$  sea singular. La singularidad de la matriz indica que existe al menos un valor propio que es precisamente cero. Y por último, la tercera condición no se cumple si pequeñas perturbaciones en  $b$  producen grandes perturbaciones en la solución  $x$ , es decir el problema no es estable, y esto es así cuando el número de ecuaciones e incógnitas no es el mismo y la matriz  $A$  tiene algunos valores propios próximos a cero, es decir es *casi-singular*.

Otros autores [68], llaman *mal planteado* al problema que no cumple alguna de las condiciones mencionadas y denomina mal condicionado a aquél que cumple las dos primeras pero falla en la estabilidad. La existencia y unicidad de la solución es siempre más fácil de probar que la estabilidad y para probar esto último se necesita definir el número de condición de la matriz del sistema que veremos en una sección posterior.

El error de redondeo en el cálculo hace difícil distinguir entre valores propios que son exactamente cero y valores propios que son próximos a cero. Por esto cualquier problema que viole la segunda o tercera condición se suele llamar *problema singular, casi-singular* o problema con *no-unicidad* en la solución. Los datos que relacionan a las variables en estos problemas son linealmente dependientes y se dice que son *multicolíneales*. La multicolínealidad se define como la existencia de una dependencia lineal entre los vectores columna de la matriz de diseño  $A$  en un problema lineal  $Ax + \varepsilon = b$ . La existencia de multicolínealidad puede dar como resultado intervalos de confianza demasiado grandes para algunos de los parámetros estimados, también puede dar estimaciones con signos erróneos. La multicolínealidad en ocasiones se usa como sinónimo de mal condicionamiento.

El número de condición será una medida de la existencia y grado de la multicolínealidad, aunque no permite explicar la estructura de esa dependencia entre las columnas de la matriz de diseño, la mejor manera para explicar esa estructura y su severidad es analizando los valores propios y los vectores propios de la matriz  $A^t A$ , a través de su espectro [19], [24].

### 3.3. Consideraciones sobre Rango y Número de Condición

Recordemos que en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales del tipo  $Ax = b$   $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$   $m > n$  en los que la igualdad anterior no se cumple exactamente, es decir en los sistemas sobredeterminados (cuando el número de ecuaciones es superior al de incógnitas), se busca una solución aproximada tal que  $A\bar{x} = r$  siendo  $r$  la proyección de  $b$  en el subespacio de  $\mathfrak{R}^n$  generado por las columnas de  $A$ , de forma que  $b$  y  $r$  estén lo más cerca posible en el sentido de la 2-norma,  $\|A\bar{x} - b\|_2 = \text{mín.}$  Ésta es la solución mínimos cuadrados del sistema y es el mejor estimador insesgado y de mínima varianza.

El subespacio generado por las columnas de  $A$ ,  $\text{Rango}(A)$ , es tal que cualquier vector perteneciente a él es combinación lineal de las columnas de  $A$ . Si la dimensión de  $\text{Rango}(A)$  es igual al número de columnas de la matriz,  $A$  se denomina *de rango completo* y la solución mínimos cuadrados es única,

pero si la dimensión de  $Rango(A) = r < n$ , implica que  $n - r$  columnas de  $A$  son linealmente dependientes, lo que nos informa que hay  $n - r$  valores singulares de  $A$  tan pequeños que pueden considerarse cero, la matriz en este caso se denomina *deficiente de rango*, no es invertible, y la solución mínimos cuadrados no es única. Los valores singulares próximos a cero pueden producir grandes errores de redondeo.

Por otra parte sabemos que pequeños cambios en la matriz  $A$  de coeficientes o en  $b$  de términos independientes, generalmente provenientes de observaciones, pueden causar grandes cambios en la solución, hablamos entonces de *perturbaciones*. Ciertos sistemas tienen tendencia a magnificar pequeños errores. Se intenta medir esta tendencia y como puede eso afectar a la precisión de la solución calculada.

Una medida de esta sensibilidad de la solución a pequeños cambios es el *número de condición* de una matriz  $\kappa(A)$ . Se llama *matriz mal condicionada* a aquella que si es sensible y su número de condición es grande, y *bien condicionada* si no es sensible y su número de condición es próximo a uno. La medida del error cometido en el cálculo de la solución se puede acotar a través de este número.

En muchas ocasiones el significado físico de las componentes de la solución hace que éstas sean de diversa naturaleza y de magnitud muy diferente. Este es el caso de los sistemas de ecuaciones que tratamos en esta tesis, en los que las incógnitas relativas al reloj del receptor son de un orden de magnitud  $10^{-5}$  veces menor que las incógnitas de posición. El sistema de ecuaciones debe enfrentarse al problema de la pérdida de exactitud en el proceso práctico de cálculo de la solución que teóricamente es la mejor en el sentido de los mínimos cuadrados. Esta pérdida de exactitud se debe a tres factores:

1. La magnitud relativa de las componentes de la solución.
2. El número de condición de la matriz.
3. La relación entre la matriz de coeficientes y los términos independientes.

El conocimiento de la exactitud en el cálculo de las componentes del vector solución es muy importante. La solución calculada  $\bar{x}$  es usualmente diferente

de la solución verdadera  $x$ . La solución  $\bar{x}$  puede ser vista como la verdadera solución del sistema perturbado  $(A + F)\bar{x} = b + f$ . Hay dos formas convencionales al estimar el error en  $\bar{x}$  como comparación con el valor verdadero de la solución:

1. Error absoluto  $e_a = \|x - \bar{x}\|$

2. Error relativo  $e_r = \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|}$

Si utilizamos el error absoluto podemos ver que:  $r_a = \|b - A\bar{x}\|$ , donde  $r_a$  es el residual absoluto, que idealmente debe ser cero, pero en la práctica no es así. Cuanto menor sea el residual mejor debe ser la solución obtenida, pero desgraciadamente pequeños residuos no siempre verifican que la solución obtenida esté cerca de la solución real, independientemente de que signifique precisión, la solución no es exacta. Un ejemplo aclara esta idea, sean  $A$ , y  $b$  las matrices asociadas a un sistema del que se conoce la solución verdadera dada por el vector  $x$ .

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 5,00001 & 10 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 15 \\ 15,00001 \end{bmatrix} \quad x = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema se puede obtener como solución  $\bar{x}$  y como residuo  $r$ :

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad r = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,00002 \end{bmatrix}$$

podemos ver que el residuo  $r$  es ciertamente pequeño, pero la solución está lejos de ser la solución real aunque su precisión sea buena; por tanto aunque es precisa no es exacta. Lo único que aseguran los residuales grandes es que la solución calculada no es buena aproximación de la solución verdadera. Por tanto el residuo no es una buena medida de la exactitud.

En cuanto al error relativo, la precisión y exactitud en la solución se estiman mediante una acotación de este error a través de una determinada norma. Para ello consideremos el sistema parametrizado siguiente:

$$(A + \epsilon F)x(\epsilon) = b + \epsilon f \tag{3.3}$$

si  $\epsilon = 0$  entonces  $Ax(0) = b$  y por tanto  $x(0) = x$ .

Si  $A$  no es singular entonces  $x(\epsilon)$  es diferenciable alrededor de cero. Diferenciando la expresión (3.3) tenemos

$$Ax'(\epsilon) + Fx(\epsilon) + \epsilon Fx'(\epsilon) = f$$

particularizando para  $\epsilon = 0$  queda:

$$Ax'(0) + Fx(0) = f$$

y despejando tenemos:

$$x'(0) = A^{-1}(f - Fx(0)) \quad (3.4)$$

Considerando el desarrollo de Taylor para  $x(\epsilon)$  y truncando en los términos de segundo orden podemos escribir:

$$x(\epsilon) = x(0) + \epsilon x'(0) + O(\epsilon^2) \quad (3.5)$$

Sustituyendo la expresión (3.4) en la expresión (3.5) y despreciando los términos de segundo orden:

$$x(\epsilon) = x(0) + \epsilon A^{-1}(f - Fx(0))$$

si sustituimos para la definición de error relativo obtenemos:

$$\frac{\|x - x(\epsilon)\|}{\|x\|} = \frac{\|x - x(0) + \epsilon A^{-1}(f - Fx(0))\|}{\|x\|}$$

puesto que  $x(0) \approx x$  podemos escribir la siguiente desigualdad:

$$\frac{\|x - x(\epsilon)\|}{\|x\|} \leq \epsilon \|A^{-1}\| \left( \frac{\|f\|}{\|x\|} + \|F\| \right) \quad (3.6)$$

Se define el número de condición en una determinada norma como:

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \geq 1$$

Para matrices singulares se toma  $\kappa(A) = \infty$ . Con la definición anterior, si multiplicamos el segundo miembro de la expresión (3.6) por  $\frac{\|A\|}{\|A\|}$ , teniendo en cuenta que  $\|b\| \leq \|A\| \|x\|$  y tomando de nuevo la notación de  $\bar{x}$  como la solución verdadera al problema perturbado, la expresión (3.6) se escribe:

$$\begin{aligned} \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} &\leq \epsilon \|A^{-1}\| \left( \frac{\|f\| \|A\|}{\|x\| \|A\|} + \|F\| \frac{\|A\|}{\|A\|} \right) \\ \frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} &\leq \kappa(A) (\rho_A + \rho_b) \end{aligned} \quad (3.7)$$

y este es el límite superior más utilizado para acotar el error relativo. El número de condición por tanto actúa como amplificador para las perturbaciones relativas en los coeficientes  $\rho_A$  y en los datos observados  $\rho_b$  respectivamente:

$$\rho_A = \epsilon \frac{\|F\|}{\|A\|}$$

$$\rho_b = \epsilon \frac{\|f\|}{\|b\|}$$

lo más frecuente es aproximar  $\rho_A = \|F\|/\|A\|$  y  $\rho_b = \|f\|/\|b\|$ .

Si la norma es la euclídea, entonces:

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2 \|A^{-1}\|_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_n}$$

con  $\lambda_1$  y  $\lambda_n$  los valores singulares mayor y menor respectivamente. Para matrices deficientes de rango en que el número de condición por definición es  $\infty$ , éste se calcula en la norma Ecuclídea como cociente entre el mayor y el menor valor singular distinto de cero.

Estos aspectos implican que  $\kappa(A)$  nos da la medida de la tendencia del sistema, de su estabilidad frente a pequeñas perturbaciones y de su sensibilidad a los procesos de redondeo, pues pueden considerarse éstos como perturbaciones en el sistema debidas al proceso de cálculo y no a errores de observación. Antes de resolver un sistema, dado que para ello han de realizarse cálculos para obtener la factorización que permita calcular la pseudoinversa, es necesario estudiar el número de condición. Como consecuencia de estas consideraciones podemos concluir que:

1. El rango de una matriz nos permite controlar los errores de redondeo, provocados por los valores singulares próximos a cero.
2. El número de condición nos permite acotar el error relativo de la solución y asegurar su exactitud.

En muchas situaciones este tipo de acotamiento del error no es bueno. En estas situaciones el número de condición puede sobrestimar grandemente el error en algunas componentes de la solución, y esto, cuando cada componente tiene un significado físico diferente es importante considerarlo. Lo que si asegura el número de condición así calculado es que hay al menos una componente

del vector solución cuya sensibilidad frente a las perturbaciones es proporcional al número de condición de la matriz, pero que pueden existir componentes que están mucho mejor condicionadas.

El número de condición por componentes que veremos en otra sección nos permitirá una mejor acotación del error. En ocasiones el mal condicionamiento de la matriz se debe sólo a unas pocas filas de la matriz inversa. Lo que significa que muchas componentes de la solución están calculadas con más exactitud de lo que cabría esperar.

Antes de concluir esta sección mencionaremos dos propiedades más relativas al número de condición:

$$\frac{1}{\kappa_p(A)} = \min_{A+E} \frac{\|E\|_p}{\|A\|_p}$$

con  $E$  conjunto de matrices singulares. Este resultado se debe a W. Kahan [35] donde muestra que  $\kappa_p(A)$  mide la distancia, en el sentido de la  $p$ -norma, de la matriz  $A$  al conjunto de matrices singulares  $E$ . Por tanto cuanto mayor es el número de condición mayor es la proximidad de la matriz a ser una matriz singular.

Por otra parte, para cualesquiera dos números de condición en dos normas  $\alpha, \beta$  de  $\mathbb{R}^{n \times n}$ , existen constantes  $C_1$  y  $C_2$  que las hacen equivalentes:

$$C_1 \kappa_\alpha(A) \leq \kappa_\beta(A) \leq C_2 \kappa_\alpha(A)$$

Para cualquier norma se tiene que  $\kappa(A) \geq 1$ . Las matrices con valores pequeños se dice que están bien condicionadas. En la 2-norma, las matrices ortogonales están perfectamente condicionadas y su número de condición es exactamente uno.

### 3.4. Límites rigurosos para el error relativo

La acotación para el error relativo dada tiene el inconveniente de que se ha obtenido bajo la condición de  $\epsilon$  suficientemente pequeño, y que no aporta información sobre los términos de segundo orden que se han despreciado en el desarrollo utilizado para su obtención. Sin embargo esta cota está bien calculada y no significa que no sea precisa, sino que la forma de obtenerla no es la



más adecuada. En este sentido es necesario desarrollar algunos resultados que den cuenta de las perturbaciones en el sistema, de su magnitud y sus límites, sin establecer restricciones.

Dado un sistema lineal  $Ax = b$  de rango completo y el sistema perturbado  $(A + F)\bar{x} = b + f$ , veamos algunos resultados que permiten acotar mejor el error relativo, cuantificando el tamaño de las perturbaciones para que el sistema resultante no sea singular.

**Lema 3.4.1** [23] *Sea*

$$Ax = b \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad 0 \neq b \in \mathbb{R}^n$$

y

$$(A + F)\bar{x} = b + f \quad F \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad f \in \mathbb{R}^n$$

con  $\|F\| \leq \delta\|A\|$  y  $\|f\| \leq \delta\|b\|$ . Si  $\delta\kappa(A) = r < 1$  entonces  $A + F$  es no singular y se verifica que  $\frac{\|\bar{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{1+r}{1-r}$ .

□

Este lema nos indica que dado el número de condición de la matriz la máxima perturbación para que el sistema siga siendo no singular debe ser menor que el inverso del número de condición, es decir si el número de condición es muy grande la máxima perturbación debe ser muy pequeña. El siguiente teorema nos permite obtener un límite riguroso para la perturbación en el sistema  $Ax = b$

**Teorema 3.4.1** [23] *Si se dan las condiciones del lema (3.4.1), entonces*

$$\frac{\|x - \bar{x}\|}{\|x\|} \leq \frac{2\delta}{1-r}\kappa(A)$$

□

El siguiente ejemplo ilustra que efectivamente la primera acotación basada en el desarrollo en serie dado en (3.3) puede resultar muy inferior a la cota rigurosa. Por tanto incluso para números de condición no excesivamente grandes la cota para el error relativo puede aumentar.

Para los mismos datos usados en otros capítulos correspondientes al modelo de ecuaciones de 10 épocas y considerando perturbaciones razonables del orden de 0,3 m en los datos de las efemérides de los satélites, que inducen una perturbación en los coeficientes de la matriz  $A$  del orden de  $10^{-7}$  y en los de  $A^t A$  del orden de  $10^{-6}$  (ver (3.27)), y perturbaciones del orden de la mitad de la longitud de onda en las observaciones  $\approx 0,1$  m, la tabla 3.1 resume los resultados obtenidos.

	$\delta$	N. Condición		$\frac{2\delta}{1-r}\kappa$		$(\rho_A + \rho_b)\kappa$	
		F	P	F	P	F	P
$A$	0,043	$2,89^{17}$	11,38	$4,87^{16}$	1,91	$1,23^{16}$	0,48
$A^t A$	0,0068	$1,14^{17}$	$1,29^2$	$1,31^{16}$	14,94	$7,72^{14}$	0,88

Tabla 3.1: Cota para el error relativo para modelo de medida de fase (F) y pseudodistancia (P)

Para que se cumpla el lema (3.4.1),  $\delta$  tiene que tomarse mayor que  $\rho_A$  y  $\rho_b$ . Como se observa para ecuaciones de observación de fase dado el alto número de condición las cotas calculadas son altísimas. En el caso de las ecuaciones normales la amplificación puede ser mucho mayor, como se observa en la tabla 3.1.

## 3.5. Estudio del número de condición por componentes

En esta sección se obtendrán expresiones para el error en las componentes individuales de la solución para los sistemas lineales y se extenderá el resultado para la solución mínimos cuadrados. Sobre las perturbaciones  $F$  y  $f$  no se asumirá ni tamaño, ni estructura, ni distribución, lo que hace los resultados más generales.

### 3.5.1. Números de Condición para sistemas lineales

Dado un sistema lineal  $Ax = b$  de rango completo y el sistema perturbado  $(A + F)\bar{x} = b + f$ , definimos el error relativo individual por componente de la solución calculada  $\bar{x}$  como:

$$e_{ri} = \frac{\|x_i - \bar{x}_i\|}{\|x_i\|}$$

Veremos como se expresa este error sin hacer ningún tipo de suposición sobre las perturbaciones  $F$  y  $f$ , sobre tamaño, estructura o distribución.

Asociado al sistema  $Ax = b$  no hay un simple número de condición sino una serie de números, uno para cada componente de la solución, que dan una idea clara de los tres factores responsables de la pérdida de exactitud en el cálculo de la solución ya mencionados en la sección 3.3. El error relativo basado en la norma no puede predecir la presencia de componentes bien condicionadas, por lo que los números de condición por componente son importantes.

Sea  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $n$ . Sea  $\kappa(A) = \|A\| \|A^+\|$  el número de condición y sea  $r_i$  las filas de la pseudoinversa  $A^+$ .

Considerando las perturbaciones en los términos independientes, supongamos que la solución exacta  $x = 0$  resuelve  $Ax = b$ , mientras que la solución  $\bar{x}$  resuelve  $A\bar{x} = b + f$ . Sea  $\beta_i$  el ángulo entre  $r_i$  y  $b$  y  $\psi_{fi}$  el ángulo entre  $r_i$  y  $f$ . Si  $x_i \neq 0$  y  $\rho_b = \|f\|/\|b\|$  entonces:

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} = \frac{r_i(b + f) - r_i b}{r_i b} = \frac{r_i f}{r_i b}$$

y aplicando la definición de producto vectorial se tiene

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} = \frac{\|r_i\| \|f\| \cos \psi_{fi}}{\|r_i\| \|b\| \cos \beta_i}$$

por otra parte

$$\frac{1}{\cos \beta_i} = \frac{\|r_i\| \|b\|}{r_i b} = \frac{\|r_i\| \|b\|}{x_i}$$

podemos multiplicar la expresión anterior por  $\frac{\|A\| \|\bar{x}\|}{\|A\| \|\bar{x}\|}$  con lo que no se altera nada. De lo anterior podemos escribir la relación:

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} = \frac{1}{\cos \beta_i} \rho_b \cos \psi_{fi} = \frac{\|b\|}{\|A\| \|x\|} \frac{\|x\|}{x_i} \|A\| \|r_i\| \rho_b \cos \psi_{fi} \quad (3.8)$$

Escribir de esta forma el error relativo cuando se consideran perturbaciones en los términos independientes nos permitirá posteriormente compararlo con el error relativo cuando se consideran perturbaciones en la matriz  $A$ . Considerando ahora las perturbaciones en la matriz del sistema lineal, suponemos que la solución exacta  $x = 0$  resuelve  $Ax = b$ , mientras que la solución  $\bar{x}$

resuelve  $(A + F)\bar{x} = b$ . Si denotamos  $\psi_{Fi}$  el ángulo entre  $r_i$  y  $F\bar{x}$ . Si  $x_i \neq 0$  y  $\rho_{A\bar{x}} = \frac{\|F\bar{x}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|}$  entonces si consideramos  $A\bar{x} + F\bar{x} = b \Rightarrow \bar{x}_i = r_i(b - F\bar{x})$  sustituyendo esto en la fórmula para el error relativo se tiene

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} = -\frac{r_i F\bar{x}}{r_i b}$$

y aplicando la definición de producto vectorial se tiene

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} = -\frac{\|r_i\|\|F\bar{x}\| \cos \psi_{Fi}}{\|r_i\|\|b\| \cos \beta_i}$$

si multiplicamos la expresión anterior por  $\frac{\|A\|\|\bar{x}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|}$  no se altera nada y si expresamos

$$\cos \beta_i = \frac{r_i b}{\|r_i\|\|b\|}$$

podemos escribir la relación siguiente:

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} = -\frac{1}{\cos \beta_i} \frac{\|F\bar{x}\|}{\|b\|} \cos \psi_{Fi} = -\frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|A\| \|r_i\| \rho_{A\bar{x}} \cos \psi_{Fi} \quad (3.9)$$

Si analizamos (3.8) y (3.9), en la primera expresión de la igualdad, observamos que la perturbación  $f$ , en un caso y  $F\bar{x}$  en otro es amplificada por  $\frac{1}{\cos \beta_i}$ .

Esto implica que el error relativo en  $\bar{x}_i$  aumenta con el aumento de ortogonalidad de  $r_i$  y  $b$ . Analizando ahora (3.8) y (3.9) en la segunda expresión de la igualdad vemos que tienen dos factores de amplificación comunes:

$$\frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \quad (3.10)$$

y

$$\|A\| \|r_i\| \leq \kappa(A) \quad (3.11)$$

Por otra parte el término en (3.8)

$$\frac{\|b\|}{\|A\|\|x\|} \quad (3.12)$$

sólo aparece cuando se consideran perturbaciones en los términos independientes y no en la matriz del sistema, y es común a todas las componentes de la solución  $\bar{x}$  y se puede acotar inferiormente. Teniendo en cuenta la propiedad submultiplicativa de la norma tenemos:

$$\frac{1}{\kappa(A)} = \frac{\|b\|}{\|A\|\|A^+\|\|b\|} \leq \frac{\|b\|}{\|A\|\|A+b\|} = \frac{\|b\|}{\|A\|\|x\|}$$

y para el caso del sistema lineal sin perturbaciones  $Ax = b$  este término también está acotado superiormente pues

$$\frac{\|b\|}{\|A\|\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|x\|}{\|A\|\|x\|} = 1$$

También podemos encontrar una cota superior para el sistema con perturbaciones:

$$\frac{\|b+f\|}{\|A\|\|x\|} = \frac{\|Ax+f\|}{\|A\|\|x\|} \leq \frac{\|A\|\|x\|\|f\|}{\|A\|\|x\|} = \frac{\|A\|}{\|A\|} + \frac{\|f\|}{\|x\|} \leq 2 \quad (3.13)$$

donde se ha considerado que el valor de  $x$  y  $f$  son del mismo orden.

Las expresiones (3.8) y (3.9) dan una clara separación de los tres factores responsables de la pérdida de exactitud en la solución calculada: magnitud relativa de las componentes de la solución (3.10), número de condición de la matriz (3.11), y relación entre matriz de coeficientes y los términos independientes (3.12).

Dado que uno de los factores de amplificación está acotado veamos cuando los otros factores alcanzan su máximo valor. Si  $\|r_{max}\| = \max_k \|r_k\|$  es la fila de mayor norma en  $A^+$  entonces teniendo en cuenta la desigualdad que satisface la norma de Frobenius y las  $p$ -normas ( $p = 1, 2, \infty$ ) según la cual:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n}\|A\|_2$$

$$\|A\|\|r_{max}\| \leq \kappa(A) \leq \sqrt{n}\|A\|\|r_{max}\| \implies \frac{\kappa(A)}{\sqrt{n}} \leq \|A\|\|r_{max}\| \quad (3.14)$$

Aplicando la desigualdades dadas en (3.14) a los errores relativos por componente dados en (3.8) y (3.9) y considerando el valor absoluto, equivalente en números reales a la norma en vectores, se obtiene que existe una componente  $\bar{x}_k$  para la que se verifica:

$$\frac{|\bar{x}_k - x_k|}{|x_k|} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\|b\|}{\|A\|\|x\|} \kappa(A) \frac{\|x\|}{|x_k|} \rho_b |\cos \psi_{fk}|$$

$$\frac{|\bar{x}_k - x_k|}{|x_k|} \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \kappa(A) \frac{\|\bar{x}\|}{|x_k|} \rho_{A\bar{x}} |\cos \psi_{Fk}|$$

De las ecuaciones anteriores se deduce que las expresiones para la sensibilidad de  $x_k$  a perturbaciones tanto en la matriz  $A$  como en los términos independientes tiene una forma similar. Como se observa la sensibilidad de  $\bar{x}$  a perturbaciones en la matriz es proporcional al número de condición de  $A$ , y cuando las perturbaciones lo son en los términos independientes la sensibilidad frente a la perturbación sólo es apreciable cuando dichos términos independientes tienen una dirección específica, esto es, cuando  $\frac{\|b\|}{\|A\|\|x\|}$  no es demasiado pequeño, ya que en otro caso  $\frac{\|b\|}{\|A\|\|x\|} \rho_b$  sería de segundo orden y por tanto despreciable.

**Definición 3.5.1** [8] Sea  $x \neq 0$  solución del sistema lineal  $Ax = b$  con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $n$ , y sea  $\bar{x} \neq 0$  la solución calculada. Si  $r_i$  son las filas de  $A^+$  entonces para  $1 \leq i \leq n$ :

1.  $\frac{\|\bar{x}\|}{|x_i|}$  y
2.  $\|A\| \|r_i\|$

se denominan números de condición por componentes del sistema lineal, o números de condición de  $x_i$ .

Hacemos notar que aunque en las expresiones (3.8) y (3.9) el término que aparece es  $\frac{\|\bar{x}\|}{x_i}$  en la definición (3.5.1), se ha tomado  $\frac{\|\bar{x}\|}{|x_i|}$  en valor absoluto ya que no cambia la magnitud del factor, únicamente el signo. Se toma positivo en el sentido de factor amplificador de las perturbaciones.

Estos números así definidos miden el condicionamiento del sistema lineal, es decir de  $A$  y los términos independientes.

### 3.5.2. Números de Condición para Mínimos Cuadrados

Consideramos ahora conjuntamente las perturbaciones en  $A$  y en los términos independientes  $b$  del problema lineal  $Ax = b$ .

Sea  $x \neq 0$  solución que resuelve el problema,  $\min_y \|Ay - b\|$ , con residual exacto  $r = b - Ax$ , y  $\bar{x} \neq 0$  resuelve  $\min_y \|(A + F)y - (b + f)\|$  con residual

asociado a la solución mínimos cuadrados  $\bar{r} = b + f - (A + F)\bar{x} \neq 0$  y por tanto  $\bar{x} = A^+(b + f - F\bar{x} - \bar{r})$ .

Sean  $q_i$  las filas de  $(A^t A)^{-1}$  y sean los siguientes ángulos de error entre distintos vectores definidos de forma similar a los casos separados de perturbaciones:  $\psi_{Fi}$  el ángulo entre  $r_i$  y la perturbación  $F\bar{x}$ ,  $\psi_{fi}$  el ángulo entre  $r_i$  y la perturbación  $f$ ,  $\omega_i$  el ángulo entre  $r_i$  y  $\bar{r}$ , y  $\omega_{qi}$  ángulo entre  $q_i$  y  $F^t \bar{r}$ . Si llamamos perturbación relativa mínimos cuadrados a la expresión:

$$\rho_{A\bar{r}} = \frac{\|F^t \bar{r}\|}{\|A^t\| \|\bar{r}\|}$$

si  $x_i \neq 0$  es la  $i$ -ésima componente del vector solución entonces, el error relativo en esa componente haciendo un proceso similar a los realizados en (3.8) y (3.9) se expresa:

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} = \frac{r_i(b + f - F\bar{x} - \bar{r}) - r_i b}{r_i b} = \frac{r_i b + r_i f - r_i F\bar{x} - r_i \bar{r} - r_i b}{r_i b},$$

Aplicando la definición de producto escalar de dos vectores se tiene

$$\frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} = \frac{\|r_i\| \|f\| \cos \psi_{fi} - \|r_i\| \|F\bar{x}\| \cos \psi_{Fi} - \|r_i\| \|\bar{r}\| \cos \psi_{\omega_i}}{\|r_i\| \|b\| \cos \beta_i}$$

descomponiendo la igualdad anterior en sus tres sumandos se pueden escribir:

$$\frac{\|r_i\| \|f\| \cos \psi_{fi}}{\|r_i\| \|b\| \cos \beta_i} \quad (3.15)$$

$$-\frac{\|r_i\| \|F\bar{x}\| \cos \psi_{Fi}}{\|r_i\| \|b\| \cos \beta_i} \quad (3.16)$$

$$-\frac{\|r_i\| \|\bar{r}\| \cos \psi_{\omega_i}}{\|r_i\| \|b\| \cos \beta_i} \quad (3.17)$$

y si multiplicamos (3.15) por

$$\frac{\|A\| \|\bar{x}\| \|b\|}{\|A\| \|\bar{x}\| \|b\|}$$

entonces teniendo en cuenta que

$$\frac{\|f\|}{\|b\|} = \rho_b$$

y

$$x_i = \|r_i\| \|b\| \cos \beta_i$$

nos queda

$$\frac{\|b\|}{\|A\| \|\bar{x}\|} \frac{\|A\| \|\bar{x}\|}{\|b\|} \frac{\|r_i\| \|f\| \cos \psi_{fi}}{\|r_i\| \|b\| \cos \beta_i}$$

y el término (3.15) queda

$$\frac{\|b\|}{\|A\| \|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|A\| \|r_i\| \rho_b$$

Para el término (3.16) si lo multiplicamos por

$$\frac{\|A\| \|\bar{x}\|}{\|A\| \|\bar{x}\|}$$

entonces teniendo en cuenta que

$$\frac{\|F\bar{x}\|}{\|A\| \|\bar{x}\|} = \rho_{A\bar{x}}$$

y

$$x_i = \|r_i\| \|b\| \cos \beta_i$$

nos queda

$$\frac{\|A\| \|\bar{x}\|}{\|r_i\| \|b\| \cos \beta_i} \frac{\|r_i\| \|F\bar{x}\| \cos \psi_{Fi}}{\|A\| \|\bar{x}\|}$$

y el término (3.16) se expresa

$$-\frac{\bar{x}}{x_i} \|A\| \|r_i\| \rho_{A\bar{x}} \cos \psi_{Fi}$$

Por último, el tercer término (3.17) si lo multiplicamos por:

$$\frac{\|A\| \|\bar{x}\| \|r_i\| \|q_i\| \|F^t \bar{\tau}\|}{\|A\| \|\bar{x}\| \|r_i\| \|q_i\| \|F^t \bar{\tau}\|}$$

teniendo en cuenta que

$$\frac{\|F^t \bar{\tau}\|}{\|A^t\| \|\bar{\tau}\|} = \rho_{A^t \bar{\tau}}$$

y

$$x_i = \|r_i\| \|b\| \cos \beta_i$$



el término nos queda:

$$-\frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\| \|A\|^2 \rho_{A\bar{r}} \cos \omega_{qi}$$

De todo lo anterior podemos escribir la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} &= \frac{\|b\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|A\| \|r_i\| \rho_b - \\ &- \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|A\| \|r_i\| \rho_{A\bar{x}} \cos \psi_{Fi} - \\ &- \frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\| \|A\|^2 \rho_{A\bar{r}} \cos \omega_{qi} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si comparamos esta expresión con las obtenidas anteriormente tratando separadamente las perturbaciones en  $b$  (3.8) y en  $A$  (3.9), comprobamos que los dos primeros sumandos corresponden efectivamente a los errores relativos en la solución del sistema lineal perturbado en los términos independientes y la matriz  $A$  respectivamente, con los mismos factores de amplificación ya descritos. Para el problema de mínimos cuadrados surge un nuevo término que da cuenta de la naturaleza del problema. Si escribimos de nuevo la ecuación (3.18) y llamamos ERL (error relativo para el sistema lineal perturbado) a los dos primeros términos entonces la ecuación se expresa:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{x}_i - x_i}{x_i} &= ERL - \frac{\|r_i\| \|\bar{r}\| \cos \psi_{\omega_i}}{\|r_i\| \|b\| \cos \beta_i} = \\ &= ERL - \frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\| \|A\|^2 \rho_{A\bar{r}} \cos \omega_{qi} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Fijándonos pues en este término nuevo, en la primera expresión de la ecuación (3.19) se muestra que el error relativo se verá amplificado por  $\frac{1}{\cos \beta_i}$ , como en el caso de la solución del sistema lineal perturbado. Si nos fijamos en la segunda expresión vemos que surgen tres factores de amplificación para la perturbación relativa mínimos cuadrados  $\rho_{A\bar{r}}$  y estos factores son:

$$\frac{\|\bar{x}\|}{x_i}, \quad \|q_i\| \|A\|^2, \quad \frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|}$$

El primer factor  $\frac{\|\bar{x}\|}{x_i}$  es la relación entre el tamaño de la componente y la solución total.

Tomando  $e_i$  como la columna  $i$ -ésima de la matriz identidad, el segundo factor  $\|q_i\| \|A\|^2$  se puede acotar superiormente:

$$\begin{aligned}\|q_i\| \|A\|^2 &= \|e_i (A^t A)^{-1}\| \|A\|^2 \leq \|e_i\| \|(A^t A)^{-1}\| \|A\|^2 \\ &= \|A^{-1} (A^t)^{-1}\| \|A\| \|A\| \leq \|A^{-1}\| \|(A^t)^{-1}\| \|A\| \|A\|\end{aligned}$$

como  $\|(A^t)^{-1}\| = \|A^{-1}\|$  entonces:

$$\|q_i\| \|A\|^2 \leq \|A^{-1}\| \|A^{-1}\| \|A\| \|A\| = \kappa^2(A)$$

También se puede acotar inferiormente para alguna componente, para lo que tendremos en cuenta que  $\|q_i\| \geq \|r_i\|^2$  y haciendo uso de las desigualdades (3.1) que satisfacen la norma de Frobenius y las  $p$ -normas se tiene:

$$\begin{aligned}\|q_i\| \|A\|^2 &\geq \|r_i\|^2 \|A\|^2 \geq \frac{1}{\sqrt{n}} \|r_i\|^2 \frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|^2 = \\ &= \frac{1}{n} \|(A^t A)^{-1} A^t\|^2 \|A\|^2 = \frac{1}{n} \|A^{-1} (A^t)^{-1} A^t\|^2 \|A\|^2 = \\ &= \frac{1}{n} \|A^{-1} I\|^2 \|A\|^2 = \frac{1}{n} \kappa^2(A)\end{aligned}$$

Resumiendo los últimos resultados:

$$\frac{1}{n} \kappa^2(A) \leq \|q_i\| \|A\|^2 \leq \kappa^2(A) \quad (3.20)$$

Por último el tercer factor  $\frac{\|\bar{r}\|}{\|A\| \|\bar{x}\|}$  describe la relación entre la matriz  $A$  y el lado derecho  $b$ . Si  $\theta$  es el ángulo entre  $b$  y  $\text{Rango}(A)$  entonces el residuo  $\bar{r}$  asociado a la solución  $\bar{x}$  se puede acotar superiormente por:

$$\frac{\|\bar{r}\|}{\|A + F\| \|\bar{x}\|} \leq \frac{\|\bar{r}\|}{\|A\| \|\bar{x}\|} = \frac{\|b + f - (A + F)\bar{x}\|}{\|A\| \|\bar{x}\|} \leq \frac{\|b - A\bar{x}\|}{\|A\| \|\bar{x}\|} = \tan(\theta)$$

en la expresión se ha tenido en cuenta la interpretación geométrica dada en el capítulo anterior, ver figura (2.5). También se puede acotar inferiormente, multiplicando el denominador por algún número mayor que 1 como por ejemplo  $\kappa(A)$  y así:

$$\frac{1}{\kappa(A)} \tan(\theta) \leq \frac{\|\bar{r}\|}{\|A\| \|\bar{x}\|} \leq \tan(\theta)$$

De lo anterior se deduce que los dos últimos factores quedan conjuntamente acotados inferior y superiormente por:

$$\frac{1}{n}\kappa(A)\tan(\theta) \leq \frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|}\|q_i\|\|A\|^2 \leq \tan(\theta)\kappa^2(A)$$

Cuanto mayor sea el ángulo  $\theta$  el sistema tendrá mayor sensibilidad a las perturbaciones, pudiendo llegar a ser el cuadrado del número de condición.

**Definición 3.5.2** [8] Sea  $x \neq 0$  solución del problema de mínimos cuadrados  $\min_y \|Ax - b\|$  con  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  de rango  $n$ , y sea  $\bar{x} \neq 0$  la solución calculada con residuo  $\bar{r} \neq 0$ . Si  $q_i$  son las columnas de  $(A^t A)^{-1}$  y  $r_i$  las columnas de la pseudoinversa  $A^+$  entonces los factores:

1.  $\frac{\|\bar{x}\|}{|x_i|}$
2.  $\|A\|\|r_i\|$
3.  $\frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\|\|A\|^2$

para  $1 \leq i \leq n$ , se denominan números de condición por componentes del problema mínimos cuadrados.

Estos tres factores hacen referencia a los tres factores que producen pérdida de exactitud en las soluciones del problema mínimos cuadrados, comentados antes.

En resumen, los números de condición por componente consisten en tres partes: la magnitud relativa de cada componente de la solución  $\frac{\|\bar{x}\|}{|x_i|}$ , el número de condición por fila  $\|A\|\|r_i\|$ , (valores que hacen referencia a perturbaciones en la matriz y en los términos independientes de forma aislada), y el término  $\frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\|\|A\|^2$  que surge cuando se considera el problema de mínimos cuadrados y que describe la relación entre perturbaciones en la matriz y perturbaciones en los términos independientes.

### 3.5.3. Estimación de los números de condición por componentes

En esta sección se calcularán los números de condición por componentes para los datos utilizados en otras secciones. Los valores  $\frac{\|\bar{x}\|}{|x_i|}$  y  $\|\bar{r}\|$  deben calcularse a posteriori una vez resuelto el sistema. Para el cálculo de  $\|r_i\|$ ,  $\|q_i\|$  y debido al mal condicionamiento de  $A$  que requiere calcular la pseudoinversa  $A^+ = (A^t A)^{-1} A^t$  y la inversa  $(A^t A)^{-1}$ , se ha realizado una descomposición mediante transformaciones ortogonales  $QR$  según el teorema 2.3.5 (página 69) para evitar la pérdida de información numérica inherente al proceso de cálculo de  $A^t A$ . Aunque esta factorización no requiere ningún intercambio de columnas es útil realizarlo para detectar deficiencias de rango, y así en cada paso de la factorización la columna con mayor norma es la que se usará para el siguiente paso. Así se asegura que los elementos de la diagonal de  $R$  estén en orden decreciente y que la dependencia lineal entre columnas pueda detectarse.

Si  $A$  es deficiente de rango la estructura triangular de  $R$  hace posible encontrar la solución mínimos cuadrados. Con esta factorización para calcular  $\|r_i\|$  es suficiente trabajar con la matriz  $R$  en lugar de con  $A$  y posteriormente estimar  $\|q_i\|$  haciendo uso de la desigualdad  $\|q_i\| \geq \|r_i\|^2$ . Así:

$$q_i = e_i^t (A^t A)^{-1} = e_i^t A^{-1} A^{-t} = e_i^t R^{-1} R^{-t} \quad (3.21)$$

Si llamamos  $v_i = R^{-t} e_i$  a las columnas de  $R^{-t}$ , entonces  $v_i^t = e_i^t R^{-1}$  y la expresión (3.21) se expresa:

$$q_i = v_i^t R^{-t} \Rightarrow q_i^t = R^{-1} v_i \Rightarrow R q_i^t = v_i$$

Esto significa que  $q_i^t$ , que son las filas en forma de columna de  $(A^t A)^{-1}$  son solución del sistema triangular  $R q_i^t = v_i$  y se puede calcular  $\|r_i\|$  partiendo de:

$$\|R q_i^t\| = \|v_i\|$$

si sustituimos en el primer miembro de la desigualdad tenemos

$$\|Q^t A (A^t A)^{-t} e_i\| = \|v_i\|$$

Como la norma de una matriz es igual a la de su traspuesta entonces

$$\|Q^t [A (A^t A)^{-t}]^t e_i\| = \|Q^t (A^t A)^{-1} A^t e_i\| = \|v_i\| \Rightarrow \quad (3.22)$$

$$\Rightarrow \|r_i\| = \|v_i\| \quad (3.23)$$

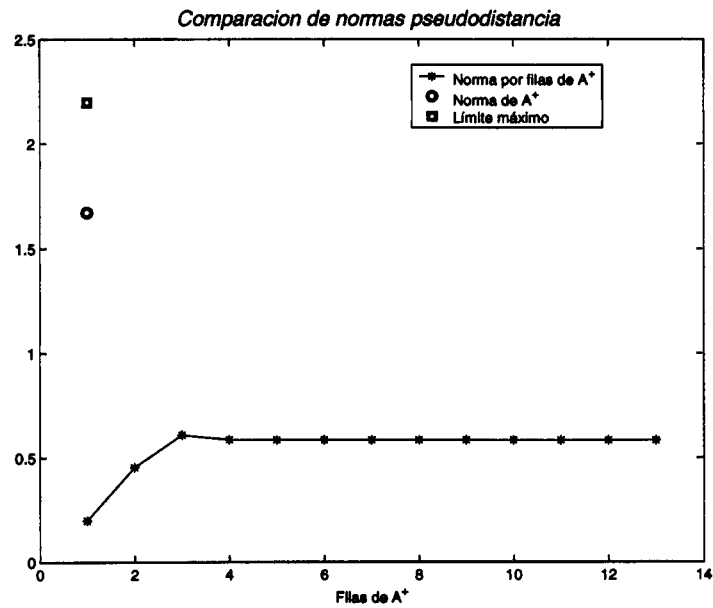


Figura 3.1: Comparación de normas (pseudodistancia).  $\|A^+\| = 1,67$ ,  $\|r_{min}\| = 0,19$ ,  $\|r_{max}\| = 0,60$

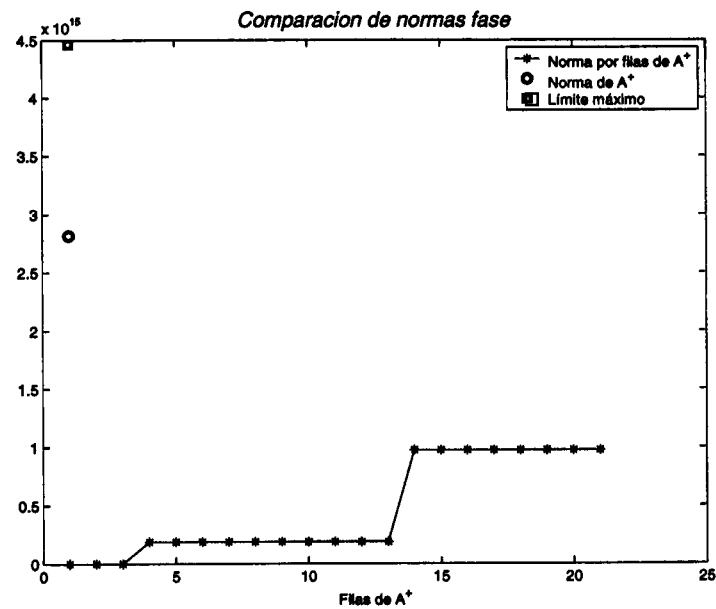


Figura 3.2: Comparación de normas (fase).  $\|A^+\| = 2,82e+015$ ,  $\|r_{min}\| = 0,21$ ,  $\|r_{max}\| = 9,74e+014$

Para los mismos datos tratados en la sección anterior, recordemos: datos relativos al 6-9-2002 para la estación ALGONQUIN (Canadá) y particularizados para  $s = 8$  satélites,  $t = 10$  épocas. En las siguientes figuras vemos cómo los números de condición por componente varían grandemente. Estos pueden predecir la sensibilidad individualmente de cada componente de la solución, incluso más exactamente que el número de condición clásico. En la figura (3.1) se puede ver cómo existe diferencia entre las normas por fila de la pseudoinversa  $\|r_i\|$  y la norma de la pseudoinversa  $\|A^+\|$  para el caso de ecuaciones de pseudodistancia. De acuerdo con la desigualdad (3.14), aplicada a la pseudoinversa, al menos un  $\|r_k\|$  establece un límite superior para  $\|A^+\|$ , este límite viene dado por  $\sqrt{n}\|r_{max}\|$ . La desviación de los otros  $\|r_i\|$  de  $\|A^+\|$  no es demasiado grande ya que el número de condición tampoco lo es.

La figura (3.2) muestra la misma situación ahora para las ecuaciones de fase. En este caso la diferencia entre las normas por fila de la pseudoinversa y la norma de la pseudoinversa es mucho más pronunciada. También se puede observar cómo la desviación de los  $\|r_i\|$  de  $\|A^+\|$  es mayor en este caso, esto es así porque el número de condición para las ecuaciones de fase es mucho mayor. La tabla (3.2) resume los resultados.

Modelos	$\ A^+\ $	$\ r_{min}\ $	$\ r_{max}\ $	$\sqrt{n}\ r_{max}\ $
Pseudodistancia	1,67	0,19	0,60	2,20
Fase	$2,82e + 015$	0,21	$9,74e + 014$	$4,46e + 015$

Tabla 3.2: Comparación de normas

Las figuras (3.3) y (3.4) muestran los tres factores de amplificación dados en la definición 3.5.2. Como puede apreciarse, el comportamiento es similar en ambos modelos aunque más pronunciado también en el de fase. Las tres primeras componentes que se refieren a la posición se ven menos afectadas por las perturbaciones que el resto de componentes, ya que los tres factores son inferiores al número de condición.

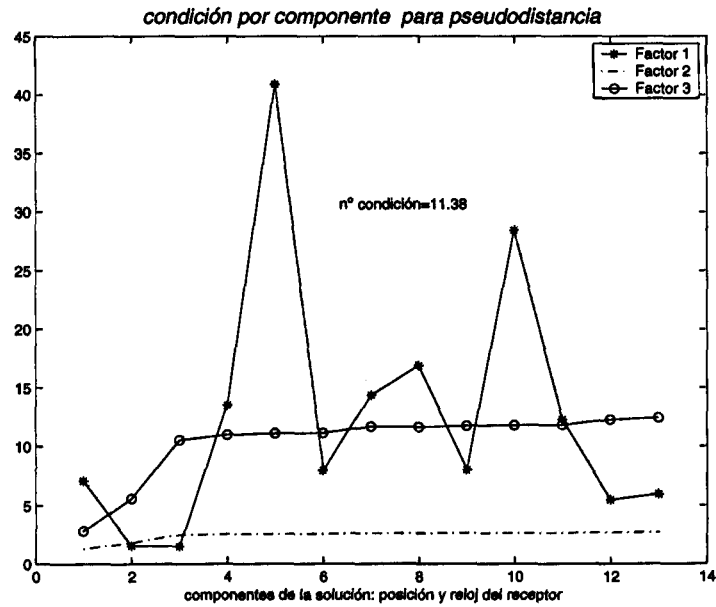


Figura 3.3: Números de condición por componentes y  $n^\circ$  de condición (pseudodistancia), factores:  $\frac{\|\bar{x}\|}{\|x_i\|}$ ,  $\|A\|\|r_i\|$  y  $\frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\| \|A\|^2$

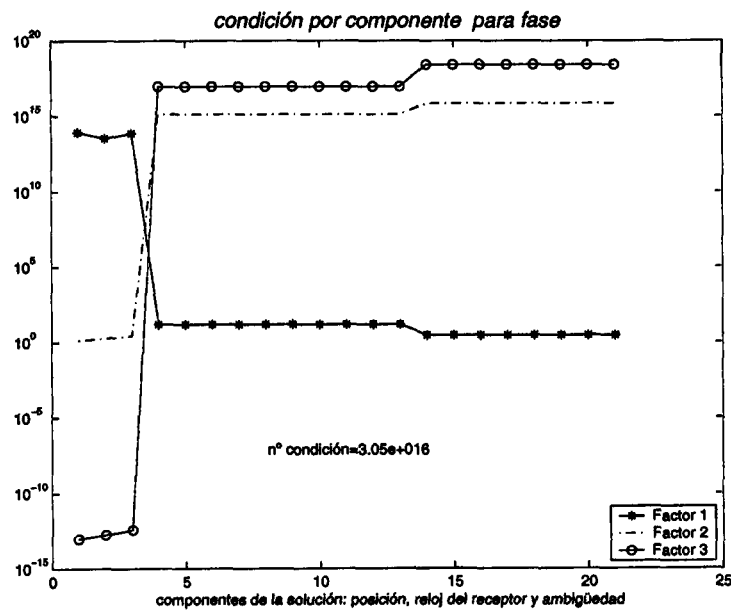


Figura 3.4: Números de condición por componentes y  $n^\circ$  de condición (fase), factores:  $\frac{\|\bar{x}\|}{\|x_i\|}$ ,  $\|A\|\|r_i\|$  y  $\frac{\|\bar{r}\|}{\|A\|\|\bar{x}\|} \frac{\|\bar{x}\|}{x_i} \|q_i\| \|A\|^2$

### 3.6. Estudio del Mapa Espectral

Un camino para estudiar la sensibilidad de los valores propios frente a las perturbaciones es estudiar el espectro de la matriz para diferentes perturbaciones.

Se denomina *espectro* de una matriz a la colección de los  $\varepsilon$ -*espectros* para  $\varepsilon \in [\varepsilon_1, \varepsilon_2]$  donde el  $\varepsilon$ -*espectro*, denotado por  $\Lambda_\varepsilon(A)$ , es la unión de todos los valores propios  $\lambda$ , de todas las matrices  $A + F$  con  $\|F\| \leq \varepsilon\|A\|$ . Para  $\varepsilon = 0$ , el espectro se reduce a los valores propios. La idea de examinar los valores propios de  $A + F$  donde  $F$  es una pequeña perturbación introducida permite hacer las dos definiciones siguientes:

**Definición 3.6.1 ( $\varepsilon$ -Pseudo valor propio)**  $\lambda$  es un  $\varepsilon$ -Pseudo valor propio de  $A$  si  $\lambda$  es valor propio de  $\|A + F\|$  con  $\|F\| \leq \varepsilon\|A\|$

**Definición 3.6.2 ( $\varepsilon$ -Pseudoespectro)** El conjunto  $\Lambda_\varepsilon(A)$  es el  $\varepsilon$ -Pseudoespectro de  $A$  si  $\Lambda_\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } \lambda \text{ es un } \varepsilon\text{-Pseudo valor propio de } A\}$ .

Para un  $\varepsilon$  fijado la región del plano complejo que representa  $\Lambda_\varepsilon(A)$  viene dada por  $\{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } \|(A - \lambda I)^{-1}\| \|A\| \leq \varepsilon^{-1}\}$ , siendo el contorno de la región cuando  $\|(A - \lambda I)^{-1}\| \|A\| = \varepsilon^{-1}$ .

Una definición equivalente de  $\varepsilon$ -Pseudoespectro en términos de valores propios de matrices perturbadas es como sigue:  $\Lambda_\varepsilon(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} \text{ tal que } \lambda \in \Lambda(A + F) \text{ para } \|F\| \leq \varepsilon\}$ .

Este concepto fue introducido por Godunov [22] y la representación gráfica de la región mencionada, denominada *Mapa espectral*. Nos da una idea de la sensibilidad del espectro de la matriz, en definitiva de la inestabilidad de dichos valores propios. Con frecuencia, se suele representar en escala logarítmica de la forma:

$$\log_{10} \|(A - \lambda I)^{-1}\| \|A\| \quad (3.24)$$

para diferentes valores de  $\varepsilon$ . El logaritmo se usa para poder visualizar el amplio rango de valores que se obtienen en las proximidades de los valores propios de



la matriz.

La región dentro de cada contorno representa el conjunto de todos los valores propios de todas las matrices  $A$  perturbadas la cantidad  $F$  para

$$\|F\| \leq \varepsilon \|A\| \quad (3.25)$$

El número de dígitos usados en los cálculos también está relacionado con el mapa espectral. Supongamos que se conoce la norma de la matriz  $\|A\|$  con una precisión de  $10^{-4}$  por ejemplo, la región encerrada dentro del contorno asociado con  $\varepsilon = 10^{-4}$  es el conjunto de todos los posibles valores propios de la matriz. En particular si se calculan los valores propios de  $A$  con 4 decimales, se podrían obtener como resultado cualquier valor contenido en el  $10^{-4}$ -espectro. Cuanto mayores son las áreas de contorno más sensible son los valores propios de la matriz a las perturbaciones.

Las perturbaciones en los valores propios calculados son la consecuencia de perturbaciones  $F$  en la matriz  $A$ . Estas perturbaciones pueden provenir tanto de aspectos físicos (imperfecto conocimiento de los datos), como de aspectos numéricos (aritmética de precisión finita). El mapa espectral nos permite ver gráficamente la sensibilidad de los valores propios de la matriz  $A$  a las perturbaciones.

La definición de espectro hace referencia a valores propios y por tanto a matrices cuadradas. Para el caso de matrices rectangulares el concepto debe entenderse a través de la relación que existe entre los valores propios de una matriz cuadrada y los valores singulares de una matriz rectangular, y esta es,  $\sqrt{\lambda_{A^t A}} = \lambda_A$ . Con  $\lambda_A$  valor singular y  $\lambda_{A^t A}$  valor propio.

Para los mismos datos usados en otros capítulos y considerando perturbaciones razonables del orden de 0,3 m en los datos de las efemérides de los satélites se tiene:

$$(A + F)^t(A + F) = A^t A + A^t F + F^t A + F^t F$$

y por tanto la perturbación en  $A^t A$  se puede calcular como:

$$F_{A^t A} = A^t F + F^t A + F^t F$$

En la tabla 3.3 se muestran los coeficientes de la matriz de perturbación  $F_A$  asociada a la matriz  $A$ . Esta matriz es igual para las ecuaciones de pseudodistancia y para las ecuaciones de fase ya que sólo tiene distintas de cero las tres primeras columnas. En las tablas 3.4 y 3.5 se representan los coeficientes correspondientes a la matriz  $F_{A^t A}$  de perturbación asociada a  $A^t A$  para ecuaciones de pseudodistancia y fase respectivamente. Los valores calculados de las normas son los siguientes para ecuaciones de pseudodistancia:

$$\begin{aligned}\|F_{A^t A}\| &= 1,819295009045917e - 006 \approx 10^{-6} \\ \|F_A\| &= 1,970236141496485e - 007 \approx 10^{-7}\end{aligned}\tag{3.26}$$

para fase se tiene:

$$\begin{aligned}\|F_{A^t A}\| &= 1,462163864960518e - 006 \approx 10^{-6} \\ \|F_A\| &= 1,970236141496485e - 007 \approx 10^{-7}\end{aligned}\tag{3.27}$$

Podemos por tanto suponer que para ambos tipos de ecuaciones las perturbaciones son del mismo orden. De la expresión (3.25) podemos calcular el valor de  $\varepsilon$  obteniendo:

$$\begin{aligned}\|F_{A^t A}\| \leq \varepsilon_{A^t A} \|A^t A\| &\Rightarrow \varepsilon_{A^t A} \geq 4,245391504071819e - 009 \\ \|F_A\| \leq \varepsilon_A \|A\| &\Rightarrow \varepsilon_A \geq 2,892131355268018e - 008\end{aligned}\tag{3.28}$$

Los valores de  $\varepsilon$  encontrados indican el mínimo valor del contorno que haría inestables los valores propios para perturbaciones como las dadas en las ecuaciones (3.26) y (3.27).

El cálculo para la generación de los espectros se ha realizado mediante un paquete de software existente que usa un algoritmo basado en el método de Lanczos [45]. En la tabla 3.6 se han especificado los valores de contorno máximo y mínimo correspondiente a los  $\varepsilon$ -espectros para la matriz de ecuaciones normales  $A^t A$  y en la inversa  $(A^t A)^{-1}$ , para los modelos de observaciones de pseudodistancia y fase usados en los capítulos anteriores.

En las figuras 3.6 y 3.8, se han representado los mapas espectrales correspondientes a la matriz  $A^t A$  tanto para pseudodistancia como para fase. La gama de grises y la escala permite ver fácilmente los contornos de los  $\varepsilon$ -espectros para los valores de  $\varepsilon$ , entre el máximo y el mínimo. Los ejes  $x, y$  representan el campo de los números complejos, el  $x$  para los valores propios

Coeficientes perturbados $A$ multiplicados por $10^{-7}$			
$a_{i1}$	$a_{i2}$	$a_{i3}$	$a_{i4}, \dots, a_{in}$
0,10000000050248	0,1999999989473	0	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0,0999999939225	0
0,10000000050248	0,10000000050248	0,0999999939225	0
0,0999999939225	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0,0999999939225	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0,0999999939225	0,1999999989473	0,0999999939225	0
0,0999999939225	0,1999999989473	0	0
0,0999999939225	0,20000000100495	0,10000000050248	0
0,0999999939225	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0,0999999939225	0
0	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0	0,1999999989473	0,0999999939225	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0,0999999939225	0
0,10000000050248	0,1999999989473	0,0999999939225	0
0,10000000050248	0,20000000044984	0,10000000050248	0
0,0999999939225	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0,0999999939225	0,1999999989473	0,10000000050248	0
0	0,1999999989473	0,0999999939225	0
0 0,0999999939225	0,1999999989473	0	0
...	...	...	...

Tabla 3.3: Perturbación de coeficientes de  $A$  (pseudodistancia y fase) para perturbaciones de 0,3 m en las efemérides de los satélites,  $i = 1, \dots, 80$ ,  $n = 13$  (fase),  $n = 21$  (pseudodisancia)

de  $A^t A$  y el  $y$  para la variación del valor propio para perturbaciones del orden de  $\varepsilon$ . La escala de  $\varepsilon$ -contornos se ha representado como ya se ha indicado en escala logarítmica. Se han añadido líneas de contorno en color blanco correspondientes a  $\varepsilon = 10^{-2}$  y en color negro para  $\varepsilon = 10^{-3}$ . Las figuras 3.5, 3.7, 3.9

Coeficientes perturbados $A^t A$ multiplicados por $10^{-5}$								
0,0014	0,0200	-0,0280	0,0080	0,0070	0,0060	0,0050	0,0050	...
0,0200	0,1549	-0,0469	0,0150	0,0160	0,0160	0,0160	0,0150	...
-0,0280	-0,0469	-0,0420	0,0060	0,0070	0,0070	0,0070	0,0050	...
0,0080	0,0150	0,0060	0	0	0	0	0	...
0,0070	0,0160	0,0070	0	0	0	0	0	...
0,0060	0,0160	0,0070	0	0	0	0	0	...
0,0050	0,0160	0,0070	0	0	0	0	0	...
0,0050	0,0150	0,0050	0	0	0	0	0	...
0,0070	0,0160	0,0040	0	0	0	0	0	...
0,0050	0,0160	0,0040	0	0	0	0	0	...
0,0040	0,0160	0,0020	0	0	0	0	0	...
0,0060	0,0160	0,0030	0	0	0	0	0	...
0,0050	0,0160	0,0040	0	0	0	0	0	...

Tabla 3.4: Perturbación de coeficientes de  $A^t A$  (pseudodistancia) para perturbaciones de 0,3 m en las efemérides de los satélites. Dimensión  $13 \times 13$

Coeficientes perturbados $A^t A$ multiplicados $10^{-5}$								
-0,0279	-0,0073	-0,0304	0,0080	0,0070	0,0060	0,0050	0,0050	...
-0,0073	0,1245	-0,0316	0,0150	0,0160	0,0160	0,0160	0,0150	...
-0,0304	-0,0316	-0,0335	0,0060	0,0070	0,0070	0,0070	0,0050	...
0,0080	0,0150	0,0060	0	0	0	0	0	...
0,0070	0,0160	0,0070	0	0	0	0	0	...
0,0060	0,0160	0,0070	0	0	0	0	0	...
0,0050	0,0160	0,0070	0	0	0	0	0	...
0,0050	0,0150	0,0050	0	0	0	0	0	...
0,0070	0,0160	0,0040	0	0	0	0	0	...
0,0050	0,0160	0,0040	0	0	0	0	0	...
0,0040	0,0160	0,0020	0	0	0	0	0	...
0,0060	0,0160	0,0030	0	0	0	0	0	...
0,0050	0,0160	0,0040	0	0	0	0	0	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...

Tabla 3.5: Perturbación de coeficientes de  $A^t A$  (fase) para perturbaciones de 0,3 m en las efemérides de los satélites. Dimensión  $21 \times 21$

Modelos	$A^t A$		$(A^t A)^{-1}$	
	$\varepsilon$ -max	$\varepsilon$ -min	$\varepsilon$ -max	$\varepsilon$ -min
Pseudodistancia	$10^{-1,1}$	$10^{-2,9}$	$10^{0,05}$	$10^{-2,8}$
Fase	$10^{-1,01}$	$10^{-3,3}$	$10^0$	$10^{-3,7}$

Tabla 3.6:  $\varepsilon$ -espectros

y 3.11 muestran el espectro que se reduce a los valores propios cuando  $\varepsilon = 0$ .

Como interpretación de las figuras 3.6 y 3.8 cabe destacar lo siguiente:

1. Las perturbaciones para las que los valores propios resultarían inestables son superiores a las consideradas razonables (3.28).
2. No hay diferencia en la estabilidad de los valores propios entre observaciones de fase y pseudodistancia.
3. La estabilidad de los valores propios garantiza el uso de esta descomposición en el tratamiento de los sistemas.

En cuanto a los mapas espectrales para la  $(A^t A)^{-1}$  se han representado en las figuras 3.10 y 3.12. Los resultados son similares y el análisis análogo.

Cuando se aumentan las observaciones, las regiones se hacen mayores para perturbaciones más pequeñas, pero el aumento no es muy significativo, ya que el orden de la perturbación sólo decrece en un grado, como se puede observar en las figuras 3.13 y 3.14 donde sólo se ha calculado el espectro para una parte de los valores propios. Los datos usados son los mismos a los que ya se ha hecho referencia pero en este caso el número de épocas de observación se ha aumentado a 100, manteniendo el mismo número de satélites. Por ello, podemos derivar un análisis e interpretación análogo a los realizados para el otro conjunto de datos.

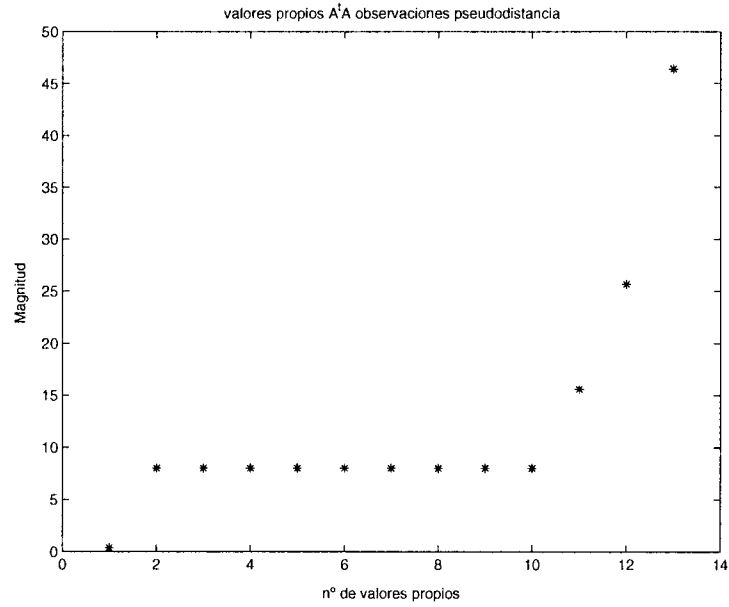


Figura 3.5: Valores propios  $A^t A$  pseudodistancia para  $\varepsilon = 0$

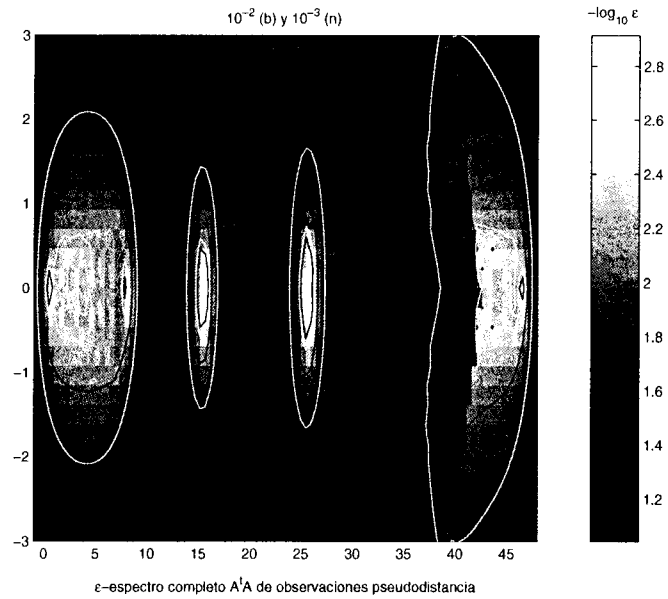


Figura 3.6: Espectro  $A^t A$  pseudodistancia. Se resaltan los contornos  $\varepsilon = 10^{-2}$  en blanco y  $\varepsilon = 10^{-3}$  en negro

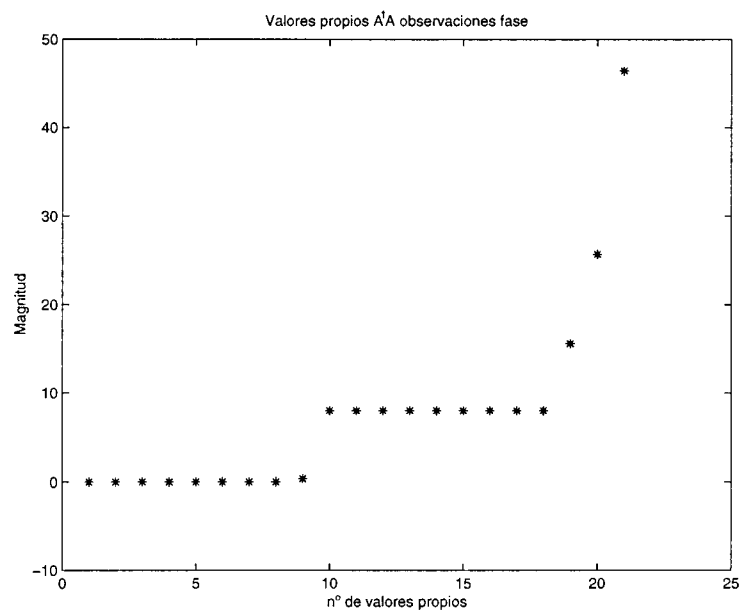


Figura 3.7: Valores propios  $A^t A$  fase para  $\varepsilon = 0$

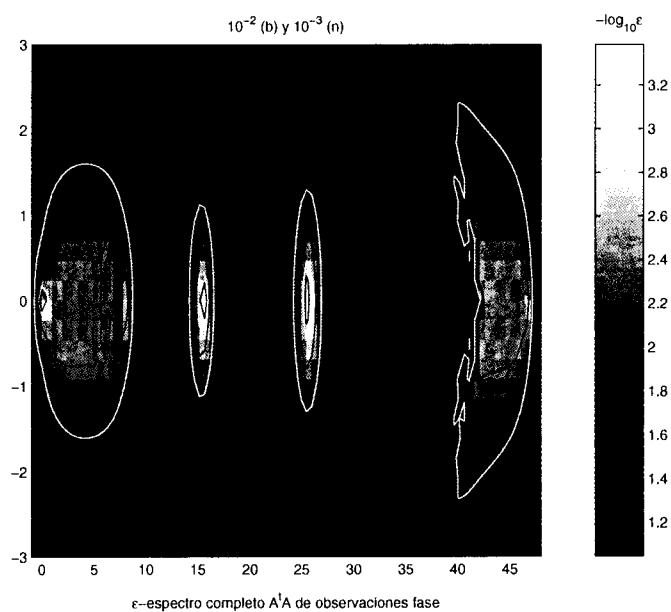


Figura 3.8: Espectro  $A^t A$  fase. Se resaltan los contornos  $\varepsilon = 10^{-2}$  en blanco y  $\varepsilon = 10^{-3}$  en negro

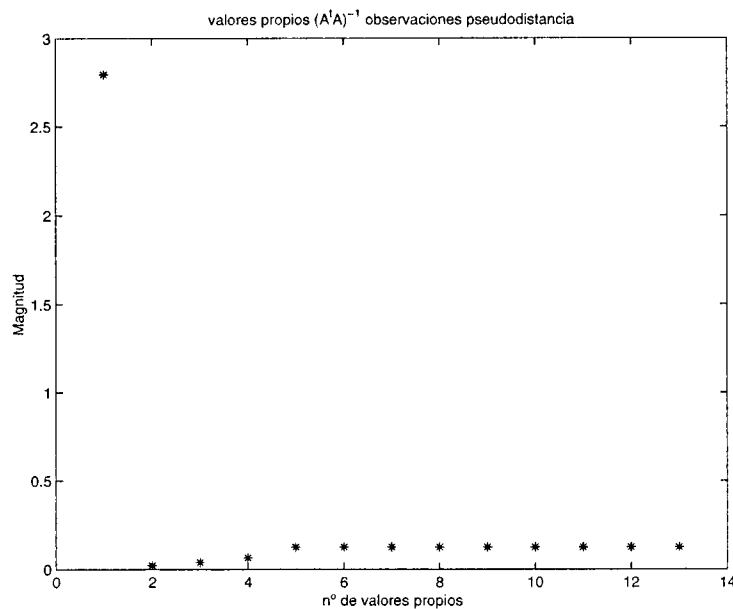


Figura 3.9: Valores propios  $(A^t A)^{-1}$  pseudodistancia para  $\varepsilon = 0$

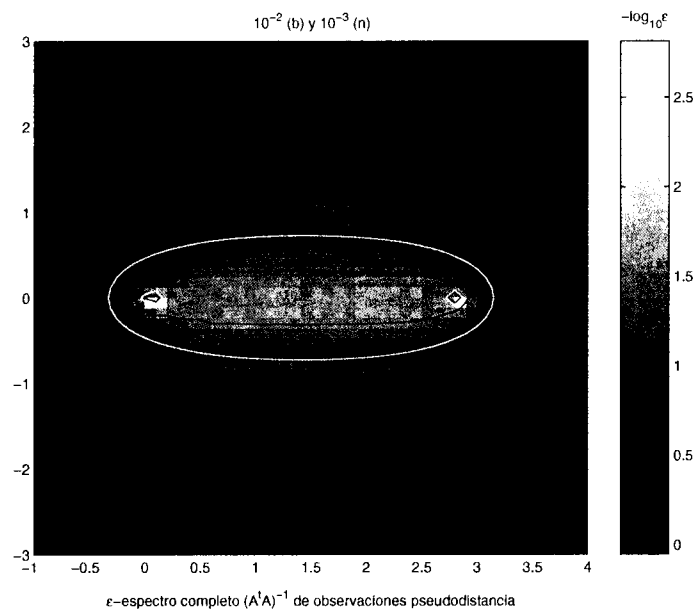


Figura 3.10: Espectro  $(A^t A)^{-1}$  pseudodistancia. Se resaltan los contornos  $\varepsilon = 10^{-2}$  en blanco y  $\varepsilon = 10^{-3}$  en negro



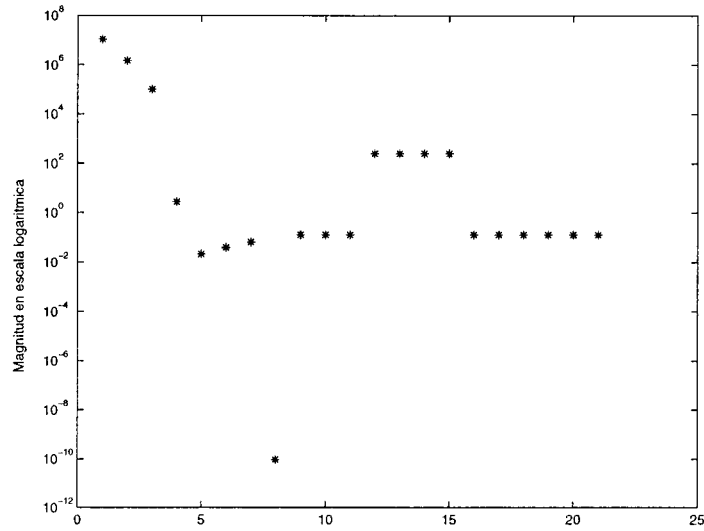


Figura 3.11: Espectro  $(A^t A)^{-1}$  fase para  $\varepsilon = 0$

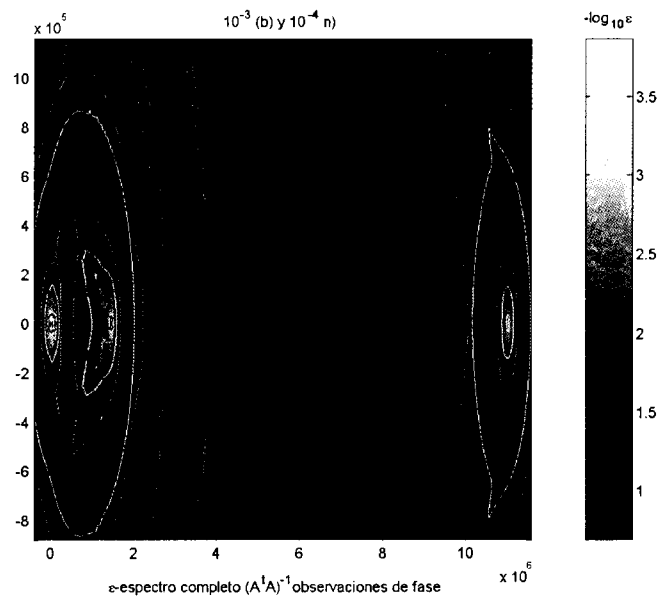


Figura 3.12: Valores propios  $(A^t A)^{-1}$  fase. Se resaltan los contornos  $\varepsilon = 10^{-3}$  en blanco y  $\varepsilon = 10^{-4}$  en negro

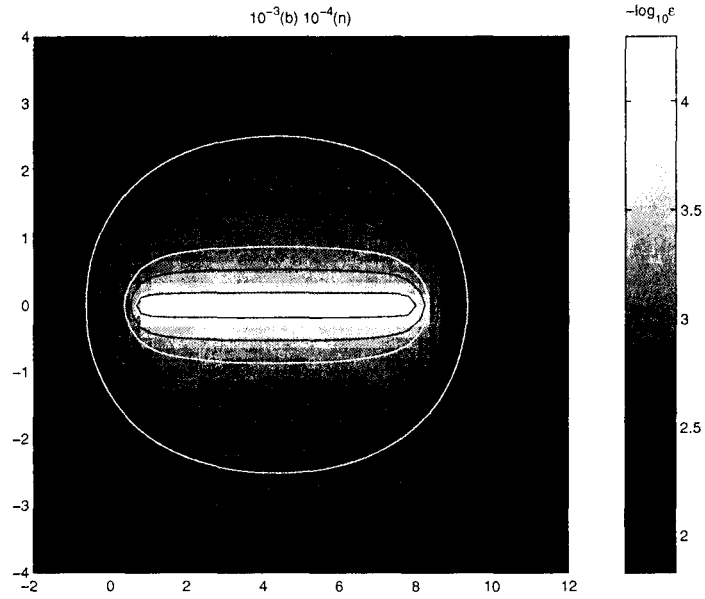


Figura 3.13: Espectro  $A^t A$  pseudodistancia, 100 épocas

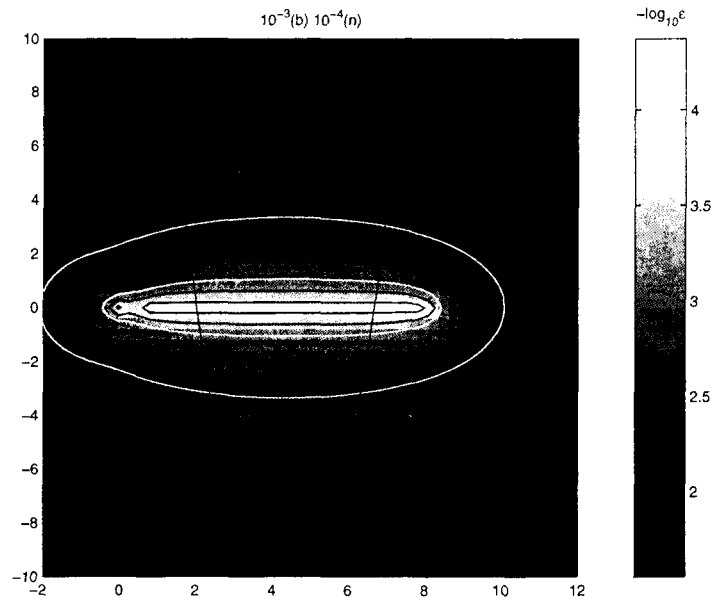


Figura 3.14: Espectro  $A^t A$  fase, 100 épocas



## Capítulo 4

# Multicolinealidad y deficiencia de rango

En este capítulo se estudia como alternativa al método de estimación mínimos cuadrados un método basado en la estimación mediante regresión. Esto permitirá reducir el número de condición de la matriz del sistema. También se introduce la transformación de Householder para evitar la deficiencia de rango en aquellos sistemas que la presenten. El capítulo está organizado como sigue:

En la sección primera se proponen los procedimientos para evitar las dificultades causadas por la colinealidad: Modificar el método de estimación y utilizar conjuntos de datos diferentes. En la segunda sección se desarrolla la idea de modificación del método de estimación, introduciendo los estimadores sesgados que mediante la introducción del sesgo pueden reducir el número de condición. Al final de la sección se calculan y comparan soluciones por el método de estimación mínimos cuadrados y por el método sesgado para los datos concretos ya mencionados en otros capítulos. La sección tercera, mediante un análisis de la varianza, estudia un conjunto de datos diferente en base a mayor separación entre observaciones y mayor número de éstas. Del estudio experimental se desprende que la elección de las observaciones influye en la solución. Por último en la sección cuatro se trata la deficiencia de rango de los sistemas asociados a las medidas de fase, evitándola mediante transformaciones de Householder.

El método de estimación mediante regresión en respuesta a diferentes tipos de mal condicionamiento de los sistemas de ecuaciones permite sobrellevar los

efectos de este mal condicionamiento. En este método se trabaja con los elementos de la diagonal principal de la matriz normal a fin de alterar la solución respecto a la solución mínimos cuadrados. Este método aunque es sesgado permite reducir el rango de los valores propios de la matriz del sistema y reducir por tanto el número de condición.

De los dos tipos de ecuaciones de observación dependiendo de la señal del satélite ya descritas y eliminando los errores sistemáticos y linealizando tenemos:

$$Ax + \varepsilon = b \quad (4.1)$$

Donde  $b$  es el vector de observaciones de dimensión  $(m \times 1)$ ,  $A$  es la matriz de diseño de dimensión  $(m \times n)$ ,  $x$  es el vector de correcciones a los parámetros incógnita  $(dx, dy, dz, dt, dN)$  de dimensión  $(n \times 1)$ , y  $\varepsilon$  es el error aleatorio distribuido como  $N(0, \sigma^2)$ . Las derivadas parciales de las ecuaciones de observación con respecto a los tres tipos de parámetros, posición de la estación  $(dx, dy, dz)$ , error del reloj de la estación  $dt$  y las ambigüedades  $dN$  forman la matriz de diseño  $A$ .

La solución mínimos cuadrados con matriz de pesos *a priori*  $P$ , y parámetros *a priori*  $(X_0, Y_0, Z_0, t_0, N_0)$  viene dada por:

$$\bar{x} = (A^t P A)^{-1} A^t P b \quad (4.2)$$

El teorema de Gauss-Markov nos asegura que de todos los estimadores de la solución, (4.2) es el mejor estimador insesgado, y por tanto  $E[\bar{x}] = x$ . El teorema se enuncia como sigue:

**Teorema 4.0.1** [69] *Bajo las condiciones del modelo  $Ax + \varepsilon = b$  el estimador mínimos cuadrados  $\bar{x}$  de  $x$  es el estimador insesgado de mínima varianza de todos los estimadores lineales insesgados*  $\square$

No obstante lo especificado en el teorema anterior, puede ocurrir que las observaciones tengan cierto grado de multicolinealidad, esto se manifiesta en una casi dependencia lineal entre las columnas de la matriz de diseño. Los indicadores de esta multicolinealidad pueden ser:

- Cambios grandes en las soluciones estimadas cuando se añaden o eliminan variables, o cuando se añaden o eliminan observaciones.

- Soluciones estimadas con signos opuestos a los esperados de las consideraciones teóricas o de la experiencia previa.
- Valores grandes en la matriz de correlación entre variables independientes.
- Grandes intervalos de confianza para las soluciones estimadas.

Estos indicadores no informan cuantitativamente de la multicolinealidad ni de su naturaleza, a veces puede ocurrir que aunque se produzca alguna de las situaciones anteriores la colinealidad no esté presente.

Cuando hay multicolinealidad la estimación mínimos cuadrados no es estable, la matriz  $A^t A$  es casi singular y pequeños cambios en las observaciones pueden producir grandes cambios en los parámetros estimados. Hay distintos procedimientos que se han propuesto para evitar las dificultades causadas por la multicolinealidad. Algunos de estos dejan intacto el método de mínimos cuadrados al estimar los parámetros, y otros introducen modificaciones en el método de estimación. Dentro de los del primer grupo se pueden mencionar los siguientes:

- Eliminar alguna variable del modelo que sea la causa. Esto tiene dos problemas, por una parte, nada se sabe de las variables eliminadas, y por otra las variables que queden se verán afectadas por las variables no incluidas en el modelo.
- Añadir observaciones que rompan la multicolinealidad. En general esto es difícil si la colinealidad es inherente al modelo de observación, pues las nuevas observaciones serán de igual naturaleza.
- Utilizar un conjunto de datos diferente para determinar las mismas variables. Esto supone conocer las situaciones de observación que pueden verse menos afectadas por la multicolinealidad, y a veces no son conocidas. Esta línea se abordará en la sección 4.2.

Cuando la forma de evitar la multicolinealidad se aborda desde la introducción de modificaciones en el método de estimación, deben considerarse otros estimadores distintos al estimador mínimos cuadrados. La alternativa de utilizar estimadores sesgados es una posibilidad. Cuando un estimador tiene un sesgo

pequeño y es sustancialmente más preciso que un estimador insesgado, podría ser preferible puesto que hay mayor probabilidad de que el valor estimado se encuentre más próximo al valor verdadero. La figura 4.1 ilustra esta situación,  $b$  es insesgado pero impreciso,  $b_s$  es mucho más preciso pero tiene un pequeño sesgo. La probabilidad de que  $b_s$  esté cerca del valor verdadero  $\beta$ , es mucho mayor que la del estimador insesgado  $b$ .

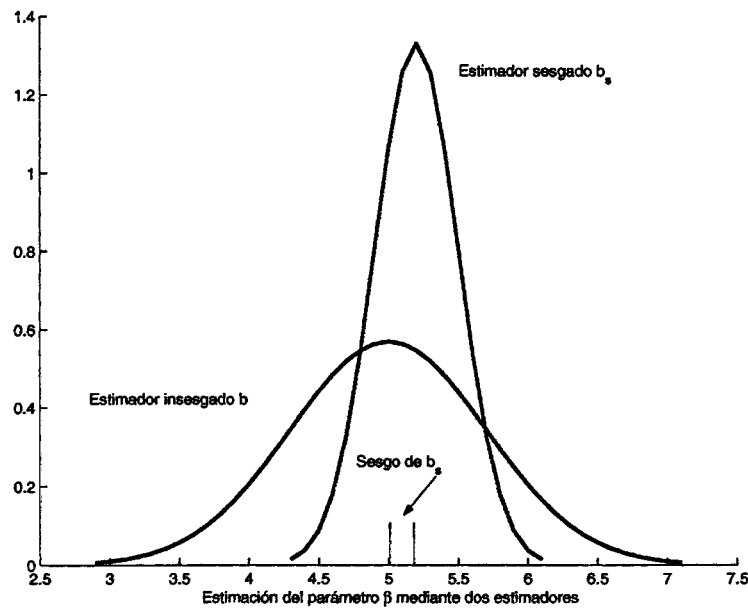


Figura 4.1: Un estimador sesgado con pequeña varianza puede ser preferible a uno insesgado con varianza grande

De entre los estimadores sesgados vamos a centrar nuestra atención en el estimador de *máxima regresión*.

## 4.1. Reducción del número de condición mediante regresión

### 4.1.1. Estimadores y multicolinealidad

Dado el problema lineal  $Ax + \varepsilon = b$  en presencia de una matriz de diseño  $A$  que es casi colineal, pequeños cambios en  $b$  vector de observaciones pueden producir cambios dramáticos en el valor de  $\bar{x}$ , estimación mínimos cuadrados

insegada de los parámetros  $x$ . Esta inestabilidad en la solución nos lleva a pensar en estimadores que no dependan tanto de los valores observados.

La multicolinealidad de los datos se manifiesta en que una columna de la matriz  $A$  es combinación lineal de de otras. Una forma de medir esta multicolinealidad es el número de condición de la matriz  $A^t A$ , que ya sabemos que se puede definir como el cociente entre su mayor y su menor valor propio, es decir  $\frac{\lambda_1}{\lambda_n}$ .

Si este cociente es muy grande el grado de colinealidad también lo es. Si consideramos el subespacio generado por las columnas de la matriz  $A$ , es decir  $\text{Rango}(A)$ , esta colinealidad nos indica que los datos contienen relativamente poca información sobre ciertas direcciones de este espacio comparadas con otras.

La ecuación  $Ax + \varepsilon = b$  la transformamos de la siguiente forma:

$$b = Ax + \varepsilon = ATT^{-1}x + \varepsilon \quad (4.3)$$

donde  $T$  es una matriz de dimensión  $(n \times n)$  no singular y tal que las columnas de  $AT$  son ortogonales. Una forma de elegir  $T$  es la matriz ortogonal  $Q$  que resulta de la descomposición de Schur de la matriz simétrica  $A^t A$  cuyas columnas son los vectores propios de  $A^t A$  que son ortonormales [34]. Por ser  $Q$  ortogonal su inversa coincide con su traspuesta y por tanto  $QQ^t = I$ , haciendo pues la transformación se tiene:

$$b = Ax + \varepsilon = AQQ^t x + \varepsilon = Hz + \varepsilon \quad (4.4)$$

donde  $H = AQ$  y  $z = Q^t x$

Por tanto se tiene que  $H^t H = (AQ)^t AQ = Q^t A^t AQ$  y por el teorema de descomposición de Schur [23],  $H^t H = \Lambda$ , que es la matriz diagonal de valores propios de  $A^t A$ , con elementos  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_n$  y por tanto las columnas de  $H$  son ortogonales. El mejor estimador insegado de  $z$  viene dado por  $\bar{z} = (H^t H)^{-1} H^t b = \Lambda^{-1} H^t b$ , con matriz de varianzas-covarianzas  $\sigma^2 \Lambda^{-1}$  siendo las varianzas asociadas a cada parámetro estimado  $(\bar{z})_i, i = 1, 2, \dots, n$  el valor:



$$\frac{\sigma^2}{\lambda_i} \quad (4.5)$$

A la vista de la expresión (4.5), la precisión, dada a través de su varianza, en la determinación de los parámetros usando el estimador insesgado, será buena para aquellos parámetros que correspondan a valores propios grandes, y de la misma forma existirá una imprecisión en la estimación de aquellos parámetros correspondientes a valores propios pequeños.

Por otra parte, en situaciones de multicolinealidad el resultado mínimos cuadrados es sensitivo al redondeo de los datos en los estados intermedios de los cálculos, estos errores se producen primeramente en el cálculo de la inversa de  $A^t A$ , (podemos considerar la matriz de pesos  $P$  como la identidad). Se hace necesario, por tanto, reconocer qué posibles errores de redondeo se producen e intentar minimizarlos o bien evitarlos. El error de redondeo es particularmente alto debido a las dos siguientes causas habituales:

1.  $A^t A$  tiene su determinante próximo a cero, es decir el sistema es multicolineal.
2. Los elementos de  $A^t A$  difieren sustancialmente en orden de magnitud.

La primera surge cuando las variables están correlacionadas, una solución para la primera causa la aportan los métodos de máxima regresión, que introducen un sesgo en la matriz del sistema y que son extensión del método de regresión cuando las variables se transforman mediante la transformación de correlación, ya que en presencia de datos multicolineales la solución mínimos cuadrados no es establ. Además Silvey [63] y Strang [61] demuestran que los datos multicolineales amplifican los efectos que causan en la solución los errores de observación. Como ya se ha dicho una medida de esta colinealidad es el número de condición de  $A^t A$ , los estimadores máximos se sugieren porque hacen decrecer el rango de los valores propios de  $A^t A$  y con esto mejoran el condicionamiento de la matriz. Esta disminución en el rango de los valores propios se produce porque se disminuyen los valores propios de  $A^t A$  a expensas de la introducción del sesgo.

Una solución a la segunda causa es la transformación de variables mediante el modelo de regresión. Esta transformación, mencionada en el párrafo anterior, denominada *transformación de correlación* se hace de forma que todos

los elementos de la matriz  $A^t A$  una vez transformada tomen valores entre  $-1$  and  $+1$ . La nueva matriz así transformada se denomina matriz normalizada, y es tal que en el cálculo de la inversa se comporta mucho mejor frente a los errores de redondeo, es decir está menos influenciada por ellos. Esta nueva matriz normalizada tiene también menor número de condición lo que mejora los aspectos numéricos en los procesos de cálculo. Los términos fuera de la diagonal serán menores o iguales a uno y representan una medida cuantitativa de la dependencia entre los parámetros del modelo.

Por otra parte debe matizarse el hecho de que a veces nos encontramos con valores propios prácticamente cero, lo que produce sistemas con determinante próximo a cero, y valores propios exactamente cero, lo que produce sistemas singulares. En este caso Cicci y Tapley [15] han desarrollado una modificación al procedimiento clásico de máxima regresión denominada Tipo-máximo (RT). Las ecuaciones derivadas de observaciones de fase producen como ya hemos visto sistemas singulares (ver (2.25)). A continuación se describe este método más detalladamente.

#### 4.1.2. Transformación de correlación

Para poder introducir el método de Tipo-máximo es necesario realizar una serie de pasos previos. Estos pasos son el *centrado* de los datos y el uso de la *matriz de correlación* en lugar de la matriz  $A^t A$ . El centrado de datos permite expresar las coeficientes de los parámetros como desviación de sus respectivas medias, procede modificando la matriz del modelo de forma que a cada fila le resta la media por columnas. Dadas las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ &\quad \dots \\ b_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{aligned}$$

sumando y restando la media por columnas  $\bar{a}_i$  se tiene:

$$\begin{aligned} b_1 &= (a_{11} + \bar{a}_1 - \bar{a}_1)x_1 + (a_{12} + \bar{a}_2 - \bar{a}_2)x_2 + \cdots + (a_{1n} + \bar{a}_n - \bar{a}_n)x_n \\ &\quad \dots \\ b_m &= (a_{m1} + \bar{a}_1 - \bar{a}_1)x_1 + (a_{m2} + \bar{a}_2 - \bar{a}_2)x_2 + \cdots + (a_{mn} + \bar{a}_n - \bar{a}_n)x_n \end{aligned}$$

llamando  $\bar{a}_{11} = a_{11} - \bar{a}_1, \dots, \bar{a}_{m1} = a_{m1} - \bar{a}_1$  y sustituyendo

$$\begin{aligned} b_1 &= \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n + \bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \dots + \bar{a}_nx_n \\ &\quad \dots \\ b_m &= \bar{a}_{m1}x_1 + \bar{a}_{m2}x_2 + \dots + \bar{a}_{mn}x_n + \bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \dots + \bar{a}_nx_n \end{aligned} \quad (4.6)$$

Como la media de los valores observados  $b$  es

$$\bar{b} = \bar{a}_1x_1 + \bar{a}_2x_2 + \dots + \bar{a}_nx_n$$

entonces

$$\begin{aligned} b_1 - \bar{b} &= \bar{a}_{11}x_1 + \bar{a}_{12}x_2 + \dots + \bar{a}_{1n}x_n \\ &\quad \dots \\ b_m - \bar{b} &= \bar{a}_{m1}x_1 + \bar{a}_{m2}x_2 + \dots + \bar{a}_{mn}x_n \end{aligned} \quad (4.7)$$

y el sistema puede escribirse

$$b - \bar{b} = \bar{A}x + \varepsilon \quad (4.8)$$

De esta forma las entradas de la matriz se hacen todas del mismo orden, ya que se expresan todos los coeficientes como desviaciones de sus medias respectivas.

El procedimiento para determinar la matriz de correlación supone transformar los coeficientes y expresarlos en unidades de desviación típica y así los coeficientes quedan:

$$\frac{b_i - \bar{b}}{\sigma_b}, \quad \frac{a_{i1} - \bar{a}_1}{\sigma_1}, \quad \dots, \quad \frac{a_{in} - \bar{a}_n}{\sigma_n} \quad i = 1, \dots, m \quad (4.9)$$

donde,  $\sigma_b, \sigma_1 \dots \sigma_n$  son las desviaciones típicas de cada columna y definidas como:

$$\begin{aligned} \sigma_b &= \sqrt{\frac{\sum (b_i - \bar{b})^2}{n-1}} \\ \sigma_j &= \sqrt{\frac{\sum (a_{i1} - \bar{a}_1)^2}{n-1}} \quad j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Se ha usado la *cuasi-varianza* muestral que es estimador insesgado de la varianza poblacional para determinar la desviación típica. Por último la forma de obtener la transformación de correlación hace uso de la siguiente función aplicada a los coeficientes tipificados (4.9) y así estos quedan:

$$b_{Ni} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left( \frac{b_i - \bar{b}}{\sigma_b} \right)$$

$$a_{Nij} = \frac{1}{\sqrt{n-1}} \left( \frac{a_{ij} - \bar{a}_j}{\sigma_j} \right) \quad i = 1, \dots, m \quad j = 1, \dots, n$$

y el sistema puede escribirse

$$b_N = A_N x_N + \varepsilon \quad (4.10)$$

las incógnitas en el sistema transformado  $x_{N1}, \dots, x_{Nn}$  se relacionan con las originales mediante

$$x_1 = \frac{\sigma_b}{\sigma_1} x_{N1} \quad x_2 = \frac{\sigma_b}{\sigma_2} x_{N2} \quad \dots \quad x_n = \frac{\sigma_b}{\sigma_n} x_{Nn} \quad (4.11)$$

La matriz del sistema de ecuaciones normales originales  $A^t A$  después de la transformación de correlación pasa a tomar la expresión siguiente:

$$A_N^t A_N = \begin{bmatrix} \sum (a_{Ni1})^2 & \sum (a_{Ni1} a_{Ni2}) & \dots & \sum (a_{Ni1} a_{Nin}) \\ \sum (a_{Ni2} a_{Ni1}) & \sum (a_{Ni2})^2 & \dots & \sum (a_{Ni2} a_{Nin}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum (a_{Nin} a_{i1}) & \sum (a_{Nin} a_{i2}) & \dots & \sum (a_{Nin})^2 \end{bmatrix}$$

y por tanto se tiene

$$\sum (a_{Ni1})^2 = \sum \left( \frac{a_{i1} - \bar{a}_1}{\sqrt{n-1}\sigma_1} \right)^2 = \frac{\sum (a_{i1} - \bar{a}_1)^2}{(n-1)\sigma_1^2} = 1$$

de forma similar

$$\sum (a_{Nij})^2 = 1 \quad j = 1, \dots, n$$

y finalmente

$$\begin{aligned} \sum (a_{Ni1} a_{Ni2}) &= \sum \left( \frac{a_{i1} - \bar{a}_1}{\sqrt{n-1}\sigma_1} \right) \sum \left( \frac{a_{i2} - \bar{a}_2}{\sqrt{n-1}\sigma_2} \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \frac{\sum (a_{i1} - \bar{a}_1) \sum (a_{i2} - \bar{a}_2)}{\sigma_1 \sigma_2} \end{aligned}$$

$$= \frac{\sum(a_{i1} - \bar{a}_1) \sum(a_{i2} - \bar{a}_2)}{[\sum(a_{i1} - \bar{a}_1)]^{\frac{1}{2}} [\sum(a_{i2} - \bar{a}_2)]^{\frac{1}{2}}} = r_{12}$$

donde  $r_{12}$  es el coeficiente de correlación entre las variables  $x_1$  y  $x_2$ . Lo mismo se verifica para los restantes  $a_{i1}a_{in}$ . Puesto que  $\sum(a_{Ni1}a_{Ni2}) = \sum(a_{Ni2}a_{Ni1})$ , es decir la matriz  $A_N^t A_N$  es simétrica, entonces se puede escribir:

$$R = A_N^t A_N = \begin{bmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{12} & 1 & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & & & \\ r_{1n} & r_{2n} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Como el coeficiente de correlación varía entre  $-1$  y  $+1$ , los elementos de  $R$  también toman estos valores.

La matriz del  $A^t b$  del sistema de ecuaciones normales originales después de la transformación de correlación pasa a tomar, de forma similar a lo hecho anteriormente, la expresión siguiente:

$$A_N^t b_N = \begin{bmatrix} r_{b1} \\ r_{b2} \\ \cdots \\ r_{bn} \end{bmatrix}$$

donde  $r_{bj}$  con  $j = 1, \dots, n$  son los coeficientes de correlación entre las observaciones y cada variable respectivamente.

Si aplicamos la técnica de mínimos cuadrados a las ecuaciones transformadas la solución mínimos cuadrados resulta:

$$\bar{x}_N = (A_N^t A_N)^{-1} A_N^t b_N \quad (4.12)$$

La estabilidad del sistema mejora y la solución del sistema transformado queda relacionada con la solución sin transformar mediante un factor de escala dado por las relaciones entre las desviaciones estándar dado en (4.11). A la matriz  $A_N$  se le suele denominar matriz normalizada, y a la solución  $\bar{x}_N$  solución normalizada.

### 4.1.3. Estimadores de Máxima Regresión y Tipo-máximo

Para resolver los problemas cuya matriz de diseño es multicolineal se han utilizado estimadores sesgados, dado que se observa que algunas observaciones pueden ejercer gran influencia en el número de condición, la eliminación de estas ecuaciones puede evitar el problema.

Entre los métodos propuestos para estudiar este problema los más populares son los propuestos por Hoerl y Kennard (1970), que sugirieron el uso de estimadores sesgados llamados *estimadores de máxima regresión*. Una vez que la matriz del sistema mediante la transformación de correlación adopta la forma de matriz normalizada  $A_N$  el estimador de máxima regresión introduce el sesgo y permite estimar los parámetros mediante la ecuación:

$$\bar{x}_K = (A_N^t A_N + KI)^{-1} A_N^t b \quad (4.13)$$

donde  $K$  es un número positivo entre  $(0, 1)$  e  $I$  es la identidad. Para distintos valores de  $K$  se obtiene una familia de estimadores, donde  $K=0$  es el estimador mínimos cuadrados. Eliminando el factor  $(A_N^t A_N)^{-1}$  de la expresión (4.12) y el factor  $(A_N^t A_N + KI)^{-1}$  de la expresión (4.13) tenemos:

$$(A_N^t A_N) \bar{x}_N = A_N^t b \quad (4.14)$$

y

$$(A_N^t A_N + KI) \bar{x}_K = A_N^t b \quad (4.15)$$

sustituyendo (4.14) en (4.15):

$$\begin{aligned} (A_N^t A_N + KI) \bar{x}_K &= (A_N^t A_N) \bar{x}_N \\ \bar{x}_N &= (A_N^t A_N)^{-1} (A_N^t A_N + KI) \bar{x}_K \\ \bar{x}_N &= (I + K(A_N^t A_N)^{-1}) \bar{x}_K \implies \\ \bar{x}_K &= (I + K(A_N^t A_N)^{-1})^{-1} \bar{x}_N \end{aligned} \quad (4.16)$$

A la vista de lo anterior, se puede decir que los estimadores de máxima regresión se obtienen como todas las combinaciones lineales del estimador mínimos cuadrados con coeficientes determinados por la matriz:

$$F = (I + K(A_N^t A_N)^{-1})^{-1}$$

En esta familia de estimadores, la matriz  $A_N^t A_N + KI$  que reemplaza a  $A^t A$  del estimador mínimos cuadrados, tiene un menor número de condición que  $A^t A$ . El estimador así obtenido,  $\bar{x}_K$ , tiene la propiedad de que, para un cierto  $K > 0$ , su error medio cuadrático, (medida del efecto combinado del sesgo y la varianza), es menor que el error medio cuadrático obtenido por el estimador mínimos cuadrados  $\bar{x}_N$  (en este caso al ser insesgado el estimador, el error medio cuadrático coincide con la varianza). El valor apropiado de  $K$  depende de los valores de los parámetros  $x$  y de la varianza  $\sigma^2$  con que se distribuya el error. Para una estimación poco adecuada de la constante  $K$ ,  $\bar{x}_K$ , podría tener un error medio cuadrático mayor que el de  $\bar{x}_N$ , y no sería mejor que la estimación mínimos cuadrados.

La definición original de los estimadores de máxima regresión dan lugar a la definición de los estimadores Tipo-máximo, de la forma siguiente [34]:

$$x_T = T^{-1} A^t b \quad (4.17)$$

donde el número de condición de la matriz  $T$  es menor que  $A^t A$ . Estos estimadores son más estables que los estimadores mínimos cuadrados.

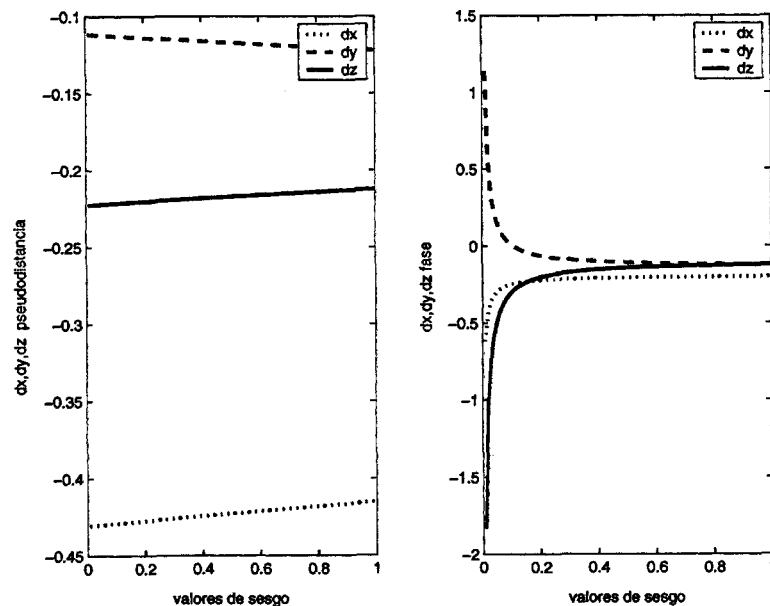


Figura 4.2: Familia de estimadores para los parámetros de posición  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  para ecuaciones de pseudodistancia y fase.

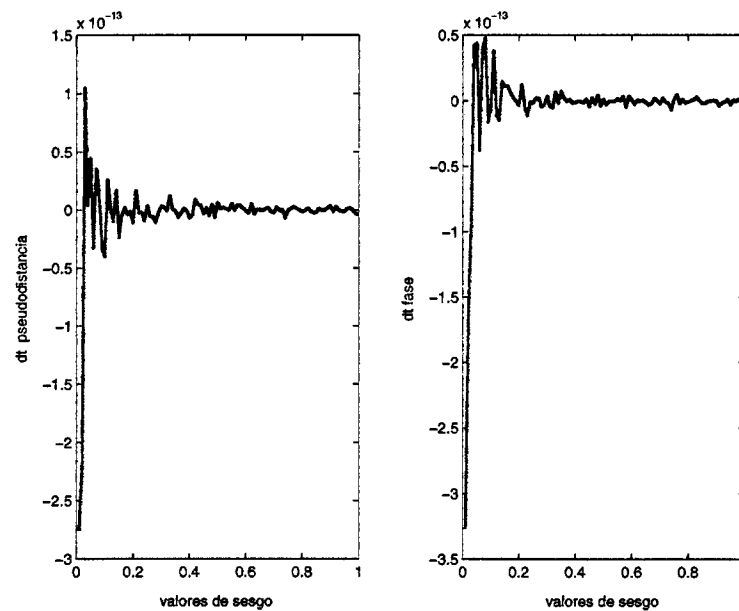


Figura 4.3: Familia de estimadores para el estado del reloj del receptor  $dt$  para ecuaciones de pseudodistancia y fase.

Para ilustrar el uso de los estimadores Tipo-máximo, se presentan las figuras 4.2 y 4.3 que muestran las soluciones del sistema para diferentes valores de sesgo  $K$ . Se han separado los parámetros de posición  $dx, dy, dz$  de los de estado del reloj del receptor  $dt$ , dada su diferente naturaleza. En la representación del estado del reloj del receptor se ha considerado la media obtenida para todas los parámetros, según el número de épocas procesadas. En los gráficos se han utilizado los mismos datos que en secciones precedentes. Para el caso de ecuaciones de fase, dado que el sistema resulta deficiente de rango y por tanto singular, el valor del sesgo muy próximo a 0 daría peores resultados lo que se traduce, en la figura 4.2 en la parte correspondiente a ecuaciones de fase, en un mayor rango de valores en el eje  $y$  de la figura. La variación en las componentes de la solución para distintos valores de sesgo y para ecuaciones de pseudodistancia es de menor cuantía aunque también puede apreciarse a medida que aumenta el sesgo.

El efecto al ir variando  $K$  es que a medida que aumenta, los valores estimados tienden a ser menores en valor absoluto, tendiendo a cero cuando  $K$  tiende a infinito, los valores estimados pueden variar mucho cuando  $K$  se separa poco de cero, y estas fluctuaciones se estabilizan cuando el valor de  $K$  aumenta,



pudiendo incluso llegar a cambiar de signo. Además la componente de sesgo del error medio cuadrático aumenta a medida que lo hace  $K$ , mientras que la varianza disminuye. Siempre existe un valor de  $K$  para el que el estimador sesgado tiene un error medio cuadrático menor que el estimador insesgado de mínimos cuadrados. El problema estriba en que este valor de  $K$  del problema particular que se trate y de los valores a estimar, que son desconocidos, por tanto aunque se sepa que existe un  $K > 0$  tal que el error medio cuadrático (MSE) verifica  $MSE(K) < MSE(0)$  encontrarlo es otra tarea.

A la vista de las gráficas de la familia de estimadores proponemos una serie de criterios que pueden usarse para elegir  $K$ :

- Elegir  $K$  que produce soluciones estables.
- Elegir  $K$  de forma que aquellos parámetros que aparentemente son incorrectos en su signo tengan el signo adecuado.
- Elegir  $K$  que hace que la suma de cuadrados de los residuales no es excesivamente grande.

### Búsqueda de un estimador sesgado que sea Tipo-máximo

Cuando la multicolinealidad es exacta, es decir el sistema es singular, no existe una única solución. A efectos de cálculo esto también es así cuando los valores propios son próximos a cero, ya que es difícil distinguir entre exactamente cero y próximo a cero.

La técnica común para sobrellevar esta multicolinealidad es introducir información estadística en forma de covarianza *a priori* de la solución esperada. Para su determinación se emplean juicios subjetivos, que en muchos casos producen soluciones sesgadas, si la covarianza *a priori* lo está [14]. En este sentido un estimador sesgado artificialmente puede comportarse mejor que uno insesgado, dado que la solución es sensible a la elección de la covarianza *a priori*. La metodología basada en la máxima regresión representada a través de los estimadores Tipo-máximo determinan el mejor valor del sesgo artificial, que produce mejores soluciones que el uso de estimadores insesgados, o covarianzas *a priori* inexáctas.

La forma más simple de considerar la covarianza *a priori*, es considerarla una matriz diagonal, cuyos valores sean los inversos de las varianzas de los parámetros a estimar [18]. Esto es equivalente a añadir una cantidad positiva a la diagonal principal de la matriz de las ecuaciones normales del sistema. Si sustituimos la matriz del sistema por su transformación de correlación los aspectos numéricos se mejoran. Entonces la ecuación  $Ax + \varepsilon = b$  se transforma en:

$$b = A_N + \varepsilon \quad (4.18)$$

Donde  $A_N$  es la matriz resultante de la transformación de correlación. Este sistema normalizado de ecuaciones tiene como solución mínimos cuadrados la siguiente:

$$\bar{x}_N = (A_N^t A_N)^{-1} A_N^t b \quad (4.19)$$

Lo importante de la solución dada en la ecuación (4.19) y discutido en [44] es que es insesgada y de mínima varianza, y que podemos relacionar con la solución  $\bar{x}$  teniendo en cuenta la reparametrización ya mencionada.

$$x_1 = \frac{\sigma_b}{\sigma_1} x_{N1}, \quad x_2 = \frac{\sigma_b}{\sigma_2} x_{N2}, \quad \dots \quad x_n = \frac{\sigma_b}{\sigma_n} x_{Nn}$$

Partimos de la matriz  $A$  que transformaremos en la matriz normalizada y buscamos un valor  $K$  que nos permita encontrar el estimador Tipo-máximo de forma que la ecuación del sistema se escriba:

$$\bar{x}_K = (A_N^t A_N + KI)^{-1} A_N^t b \quad (4.20)$$

la matriz diagonal  $KI$  es usada como sesgo y el valor  $K$  es una constante. La solución obtenida será un estimador sesgado de la solución verdadera y por tanto  $E[\bar{x}_{cN}] \neq x_N$  y el sesgo queda definido como:

$$B(\bar{x}_K) = E[\bar{x}_K] - x_N \quad (4.21)$$

En esta familia de estimadores la matriz  $A_N^t A_N + KI$ , que reemplaza a  $A_N^t A_N$  en el estimador mínimos cuadrados, tiene menor número de condición, si se elige convenientemente la constante  $K$  para que el estimador sea de Tipo-máximo.

La forma óptima de obtener  $K$  será minimizando el error medio cuadrático de la solución, definido a través del operador esperanza matemática, que en forma matricial adopta la siguiente forma:

$$MSE(\bar{x}_K) = E[(\bar{x}_K - x_N)^t(\bar{x}_K - x_N)]$$

sumando y restando  $E[\bar{x}_K]$  tenemos

$$MSE(\bar{x}_K) = E[(\bar{x}_K - E[\bar{x}_K] + E[\bar{x}_K] - x_N)^t(\bar{x}_K - E[\bar{x}_K] + E[\bar{x}_K] - x_N)]$$

agrupando términos

$$MSE(\bar{x}_K) = E[(\bar{x}_K - E[\bar{x}_K])^t + B(\bar{x}_K)^t][(\bar{x}_K - E[\bar{x}_K]) + B(\bar{x}_K)]$$

sustituyendo el valor de (4.21)

$$\begin{aligned} MSE(\bar{x}_K) &= E[(\bar{x}_K - E[\bar{x}_K])^t(\bar{x}_K - E[\bar{x}_K])] + \\ &+ E[B(\bar{x}_K)^t B(\bar{x}_K)] + 2E[B(\bar{x}_K)^t]E[(\bar{x}_K - E[\bar{x}_K])] \end{aligned} \quad (4.22)$$

Teniendo en cuenta en la expresión anterior que la esperanza matemática del producto es el producto de las esperanzas cuando las variables son independientes y que  $E[(\bar{x}_K - E[\bar{x}_K])] = 0$  podemos escribir:

$$MSE(\bar{x}_K) = V(\bar{x}_K) + (B(\bar{x}_K))^2 \quad (4.23)$$

donde  $V$  es la varianza total y  $B$  el sesgo. La elección de  $K$  se hará de tal forma que se minimice la función  $MSE(\bar{x}_K)$ , es decir minimizar a la vez la varianza y el sesgo del estimador. La minimización nos lleva a obtener la fórmula [13]:

$$K = \frac{n}{(\bar{x}_N)^t \bar{x}_N} \quad (4.24)$$

La definición de este sesgo puede generalizarse usando una matriz  $K$  en lugar de una constante es decir:

$$\bar{x}_K = (A_N^t A_N + K)^{-1} A_N^t b \quad (4.25)$$

donde  $K$  es ahora una matriz de sesgo diagonal

$$K = \begin{bmatrix} k_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_n \end{bmatrix}$$

En cuyo caso se puede tomar como  $k_i$ :

$$k_i = \frac{1}{(\bar{x}_{iN})^2} \quad i = 1, \dots, n \quad (4.26)$$

Es frecuente que los distintos parámetros a estimar se encuentren agrupados en varios tipos que comparten un mismo significado físico, en nuestro caso, recordemos, tenemos tres tipos de incógnitas: Posición, estado del reloj del receptor y ambigüedades iniciales de los satélites. En esta situación los sesgos individuales  $k_i$  se consideran iguales dentro de cada tipo de variable, en cuyo caso los valores se calculan como sigue:

- Para las incógnitas de posición

$$k_1 = \frac{3}{\sum_{j=1}^3 (\bar{x}_{jN})^2} \quad (4.27)$$

- Para las incógnitas de estado del reloj del receptor siendo  $t$  el número de épocas observadas.

$$k_2 = \frac{t}{\sum_{j=4}^{4+t} (\bar{x}_{jN})^2} \quad (4.28)$$

- Para las ambigüedades iniciales siendo  $s$  el número de satélites observados

$$k_3 = \frac{s}{\sum_{j=4+t+1}^{4+t+s} (\bar{x}_{jN})^2} \quad (4.29)$$

Cuando existen gran número de incógnitas esta última aproximación puede ser muy ventajosa. En el estudio experimental se han analizado los tres tipos de soluciones, no encontrándose diferencias significativas.

#### 4.1.4. Descripción experimental y resultados

Con el fin de estudiar la reducción del número de condición por el método de estimación Tipo-máximo, se han usado los datos de observación de pseudodistancias para determinar la posición y el error en el estado del reloj del receptor, de una estación de la que se conoce la solución verdadera. La resolución por mínimos cuadrados (LS) nos permitirá realizar una comparación con el método propuesto de Tipo-máximo (RT). Como ya se ha mencionado estas observaciones fueron facilitadas por el Centro Europeo de Operaciones

Datos	Tiempo	Nº épocas	Método	Dimensión	Sistemas Resueltos
D1	0 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> 30 <sup>s</sup>	105	LS/RT	8 × 4	105
D5	0 <sup>h</sup> 52 <sup>m</sup> 30 <sup>s</sup>	105	LS/RT	40 × 8	21
D10	0 <sup>h</sup> 89 <sup>m</sup>	179	LS/RT	80 × 13	17
Solución posición: $X = 918129,742$ $Y = -4346072,212$ $Z = 4561978,390$ Solución reloj receptor: $t = 0,319285e - 6$					

Tabla 4.1: Descripción de las condiciones experimentales

Espaciales (ESOC) y están referidas a la estación ALGONQUIN (Canadá) en la fecha 6-9-2002.

En el estudio se analizaron los siguientes conjuntos de datos:

1. D1 corresponde a 105 épocas de observación tomadas durante un intervalo de tiempo de aproximadamente una hora. Durante ese tiempo se observaron simultáneamente 8 satélites. Los sistemas de ecuaciones se plantearon independientemente para cada época de observación por lo que se resolvieron 105 sistemas diferentes.
2. D5 corresponde a los mismos datos de observación anteriores. Los sistemas de ecuaciones se plantearon considerando en cada sistema observaciones pertenecientes a cinco épocas consecutivas por lo que se resolvieron 21 sistemas diferentes.
3. D10 corresponde a 179 épocas de observación tomadas durante un intervalo de tiempo de aproximadamente una hora y media. Durante ese tiempo se observaron simultáneamente 8 satélites. Los sistemas de ecuaciones se plantearon considerando en cada sistema observaciones pertenecientes a 10 épocas consecutivas por lo que se resolvieron 17 sistemas diferentes.

En la tabla 4.1 se resumen las condiciones experimentales y el valor de la solución verdadera. En la tabla 4.2 se resumen los valores de los sesgos  $K$ ,  $k_1$  y  $k_2$  para ecuaciones de pseudodistancia. Se han escrito solamente los valores máximos y mínimos del conjunto de soluciones.

En la tabla 4.3 se resumen los valores de los sesgos  $K$ ,  $k_1$ ,  $k_2$  y  $k_3$  para ecuaciones de fase. En este caso sólo se han calculado para el conjunto D10. Se

puede apreciar que para este tipo de ecuaciones los sesgos son mucho menores.

Conjunto de datos	Máximo			Mínimo		
	K	k1	k2	K	k1	k2
D1	0,0830	0,9982	0,5867	0,0045	0,1414	0,0094
D5	0,0102	0,8692	0,2054	0,0028	0,0594	0,0161
D10	0,0062	0,3129	0,9001	0,0030	0,0218	0,0215

Tabla 4.2: Sesgos para pseudodistancia

	Máximo por $10^{-4}$				Mínimo por $10^{-5}$			
	K	k1	k2	k3	K	k1	k2	k3
D10	0,023	0,115	0,687	0,166	0,035	0,189	0,446	0,259

Tabla 4.3: Sesgos para fase

En el tratamiento se han tenido en cuenta las siguientes correcciones:

1. Combinación ionosfera libre para eliminar el efecto ionosférico.
2. Corrección troposférica en el cénit, mediante mapa de valores y corrección en función de la elevación.
3. Corrección al reloj de los satélites respecto de la escala de tiempo GPS.
4. Uso de efemérides precisas.

En definitiva, la estimación de los parámetros mediante la técnica de mínimos cuadrados (LS) y mediante la técnica Tipo-máximo (RT) se hizo para tres conjuntos diferentes de observaciones y en cada conjunto se resolvieron diferente número de sistemas. Las reordenaciones previas no ejercieron influencia en la resolución; ni en el resultado ni en el tiempo de cálculo. No obstante deben tenerse en cuenta cuando el tamaño de los sistemas sea muy grande.

### Resultados para ecuaciones de Pseudodistancia

La reducción del número de condición fue evaluada para diferente número de ecuaciones. El resultado obtenido para el número de condición usando el estimador Tipo-máximo muestra una reducción comparado con el obtenido por

medio de la estimación mínimos cuadrados para los dos conjuntos de datos  $D1$  y  $D10$ , figuras 4.4 y 4.5. El bloque de datos  $D5$  corresponde al mismo conjunto de datos que  $D1$  pero considerando diferente número de ecuaciones, los resultados son muy similares a los obtenidos en la figura 4.4.

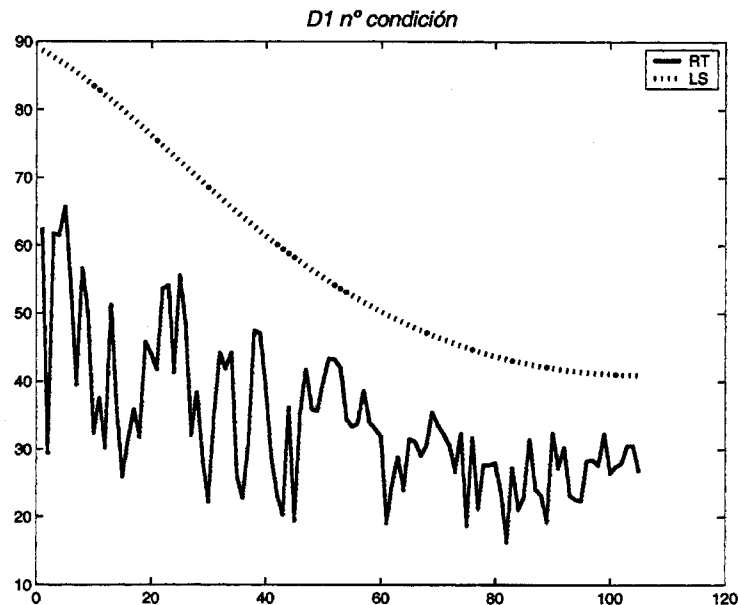


Figura 4.4: Número de condición bloque D1

Las figuras 4.6-4.9, muestran las soluciones  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  y  $dt$  por ambos métodos considerando el conjunto de datos  $D1$ . La reducción en el condicionamiento afecta a la calidad de la solución como se observa de la mayor precisión en la solución mediante el método RT. A la vista de la figura 4.8, la incógnita  $dz$  es claramente más precisa, se han marcado con líneas horizontales los límites para la variación por el método RT para apreciarlo mejor. El mismo resultado se observa para el conjunto de datos  $D10$  y  $D5$ . Como en el caso anterior, la solución mejora con la estimación RT. Las figuras 4.10 y 4.11 muestran el resultado para las incógnitas  $dt$  y  $dz$  para el conjunto de datos  $D10$ .

Con el fin de evaluar ambos métodos de resolución se ha usado el error relativo y el error absoluto. En las figuras 4.12, 4.13 se aprecia cómo para el método RT ambos errores, en general, son menores.

Los resultados con el conjunto de datos  $D10$  son similares a los anteriores

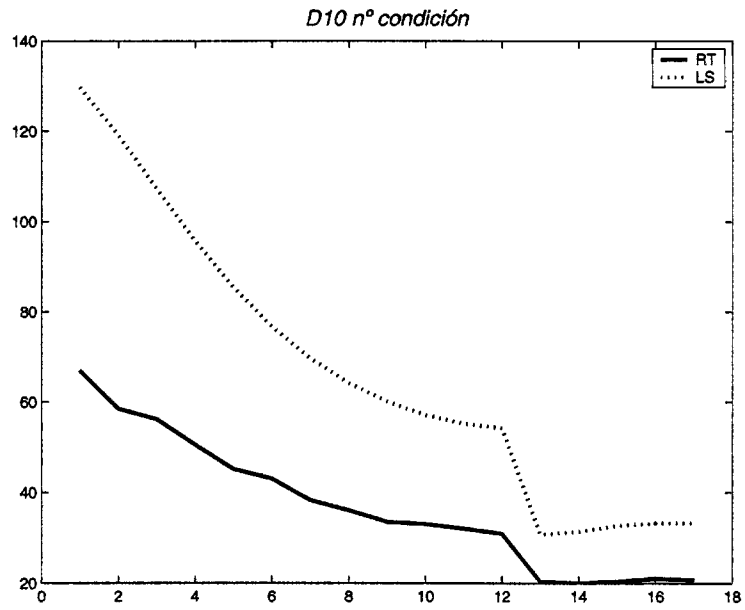


Figura 4.5: Número de condición bloque D10

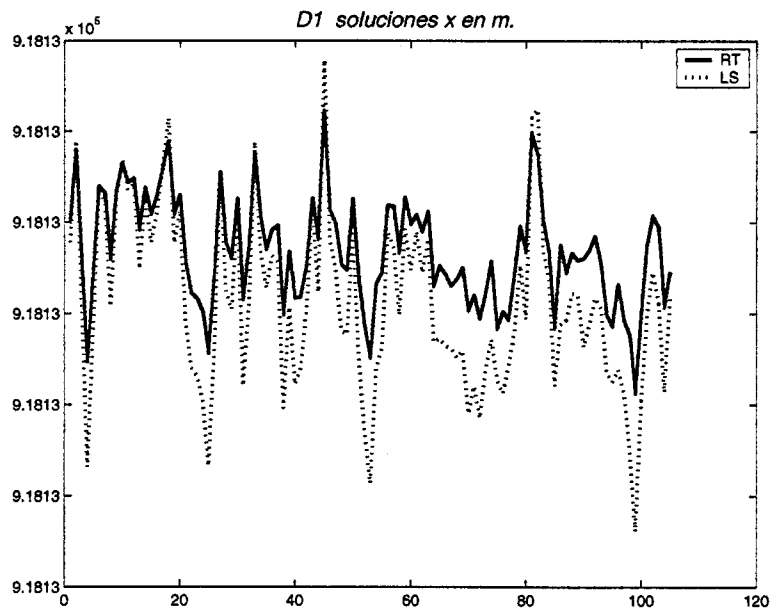


Figura 4.6: Soluciones comparadas dx LS y RT (D1)



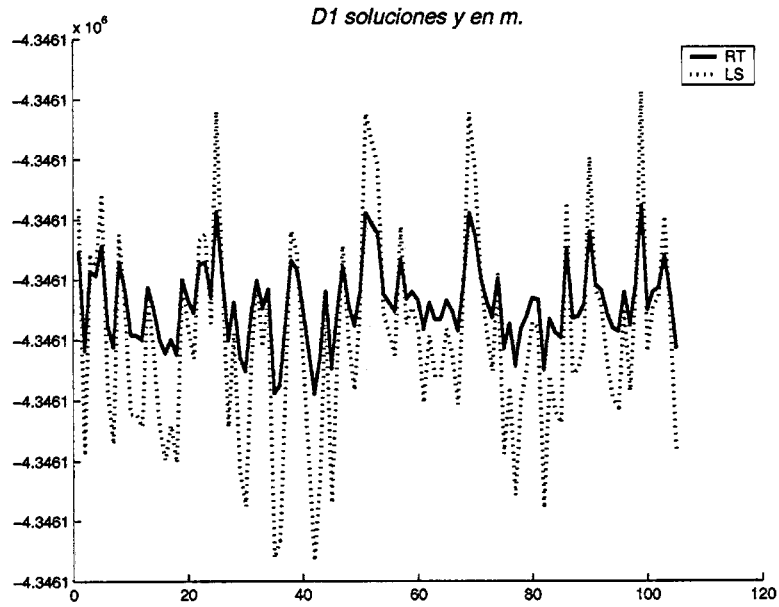


Figura 4.7: Soluciones comparadas dy LS y RT (D1)

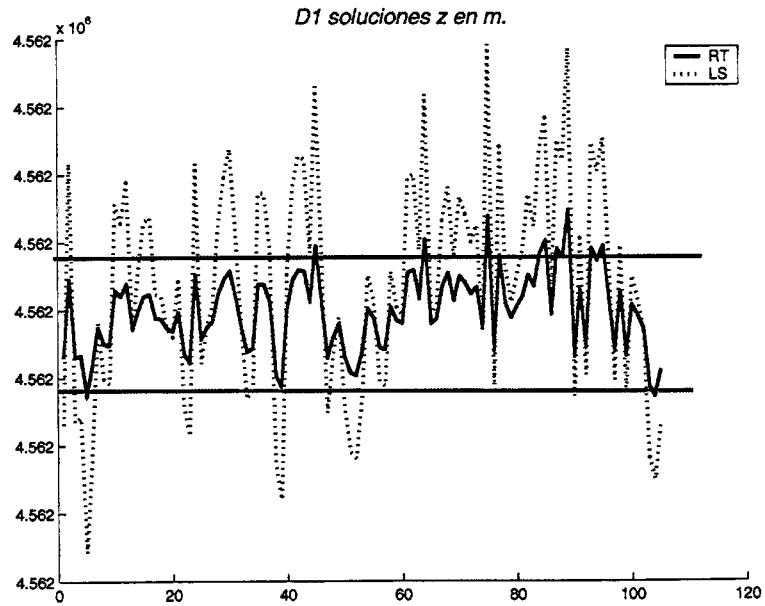


Figura 4.8: Soluciones comparadas dz LS y RT (D1)

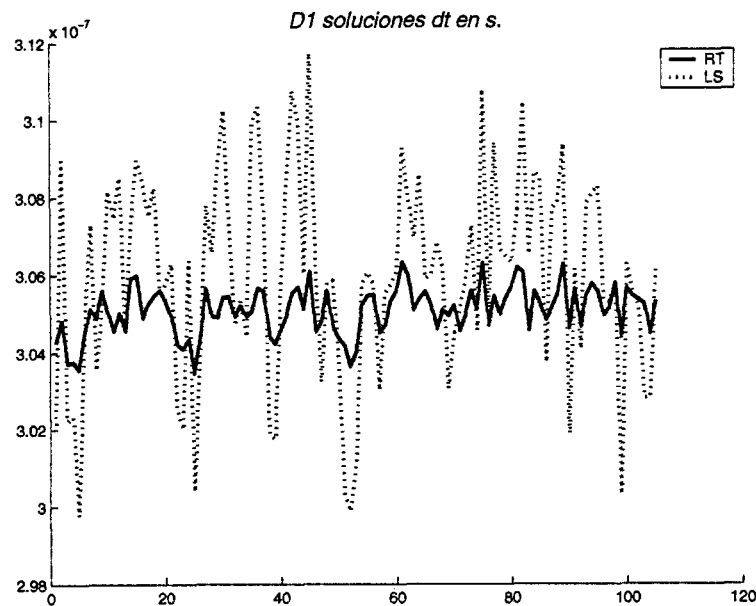


Figura 4.9: Soluciones comparadas dt LS y RT (D1)

lo errores absoluto y relativo son menores también, en este conjunto de datos, para el método RT que para el LS. La disminución en ambos errores es más pronunciada cuando el número de ecuaciones aumenta, figuras 4.14, 4.15.

Las figuras 4.16 y 4.17 ilustran la solución para las incógnitas de posición obtenida por ambos métodos. Se puede observar la solución verdadera como un triángulo más grueso. A la vista del resultado se puede decir que:

- El método RT produce soluciones menos dispersas, pero mas sesgadas o desplazadas respecto de la solución verdadera.
- El método LS produce soluciones más dispersas pero menos sesgadas o desplazadas respecto de la solución verdadera.

En resumen aunque los sesgos existan en la solución RT esto se ve compensado con una menor varianza en la solución, de forma que el método RT se manifiesta apropiado en nuestros experimentos frente al método LS.

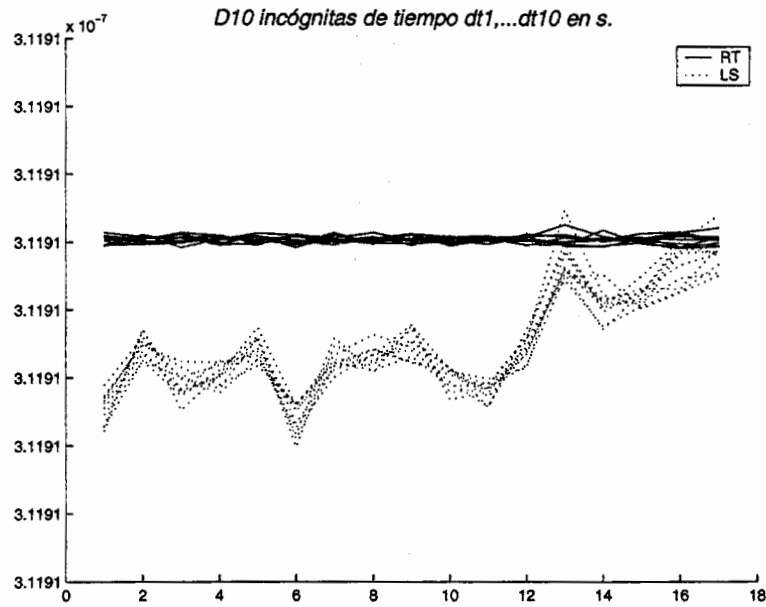


Figura 4.10: Soluciones comparadas dt LS y RT (D10)

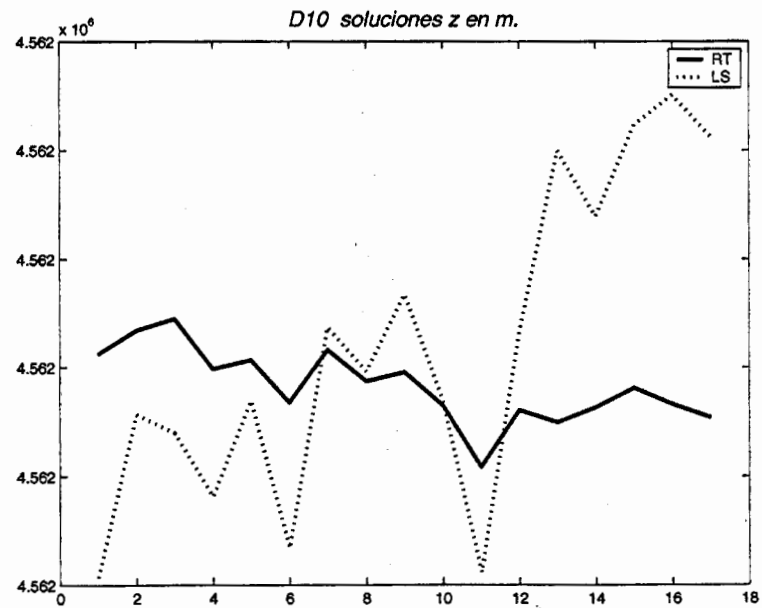


Figura 4.11: Soluciones comparadas dz LS y RT (D10)

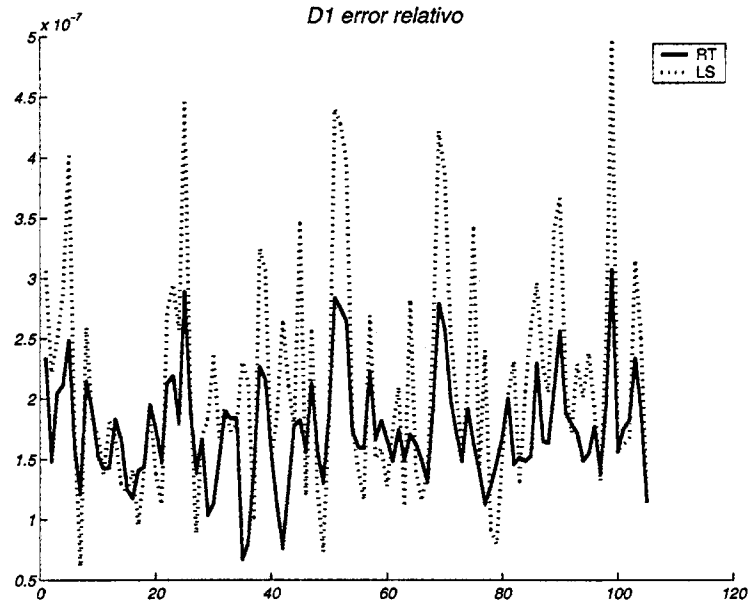


Figura 4.12: Error relativo D1

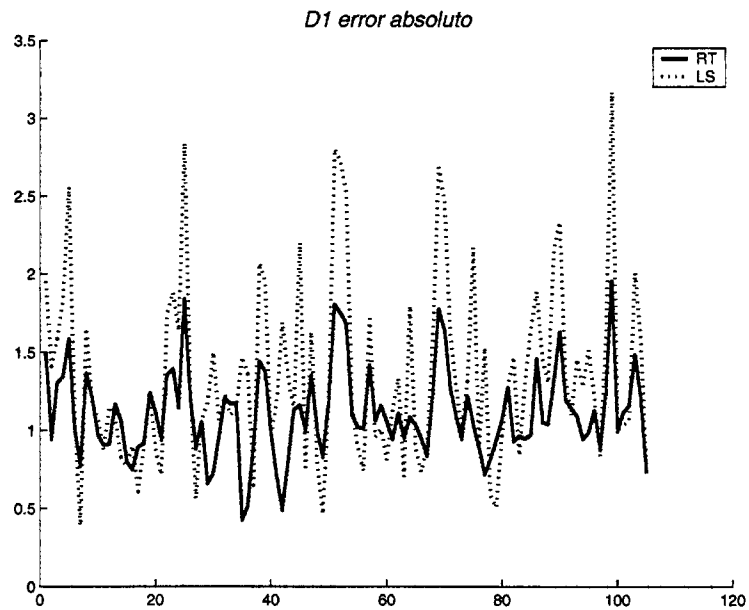


Figura 4.13: Error absoluto D1

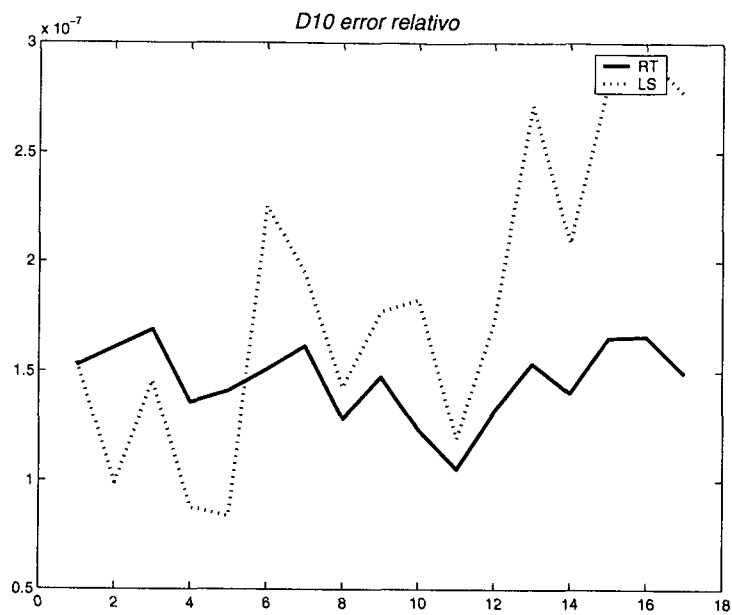


Figura 4.14: Error relativo D10

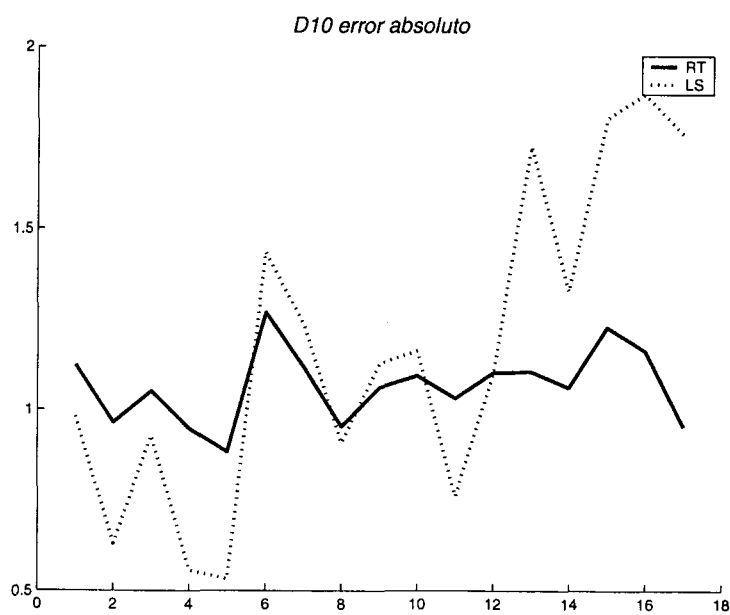


Figura 4.15: Error absoluto D10

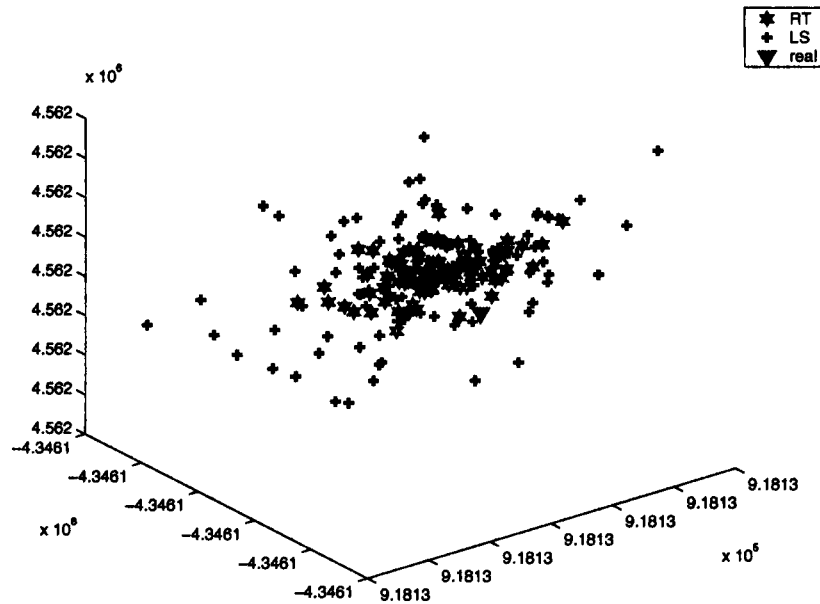


Figura 4.16: Exactitud y Precisión en las soluciones de posición D1

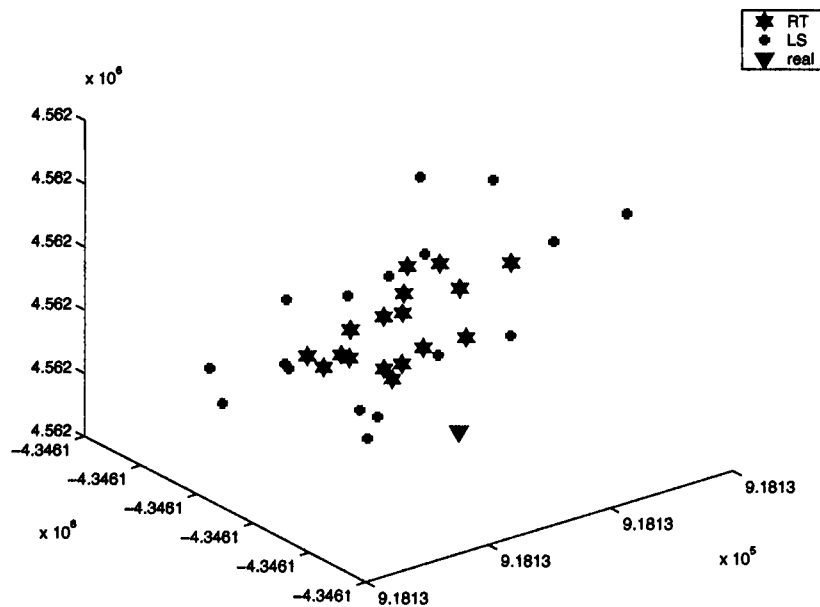


Figura 4.17: Exactitud y Precisión en las soluciones de posición D10

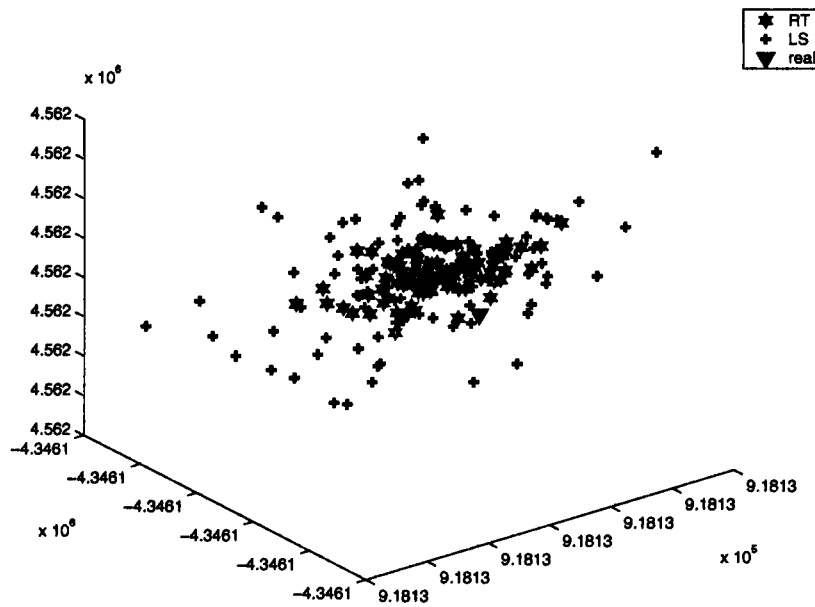


Figura 4.16: Exactitud y Precisión en las soluciones de posición D1

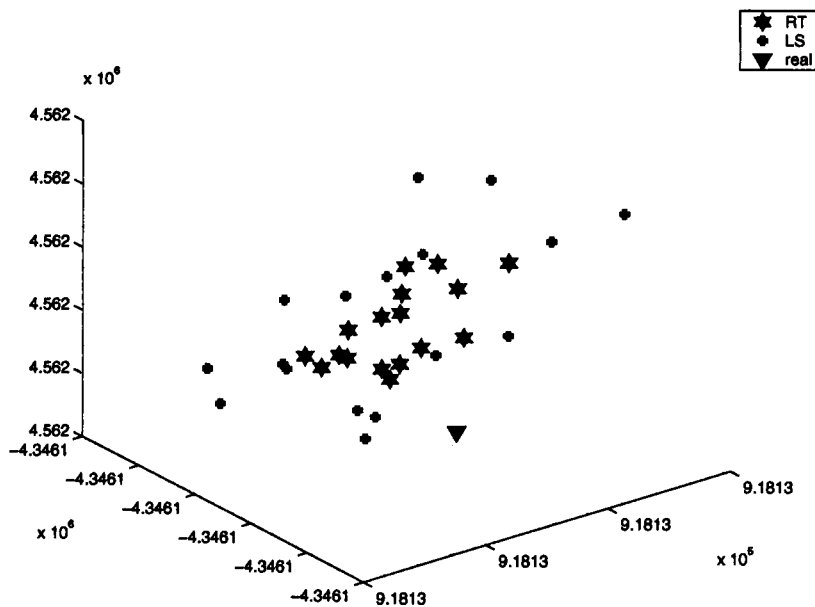


Figura 4.17: Exactitud y Precisión en las soluciones de posición D10

### Resultados para ecuaciones de Fase

Las figuras 4.18 a 4.25 muestran los resultados para ecuaciones de fase. Se han realizado los cálculos para el conjunto de datos D10. El comportamiento es similar a los resultados obtenidos para ecuaciones de pseudodistancia, con las siguientes particularidades:

- Las soluciones son más precisas con el método de estimación RT, tanto en las incógnitas de posición como en las de tiempo. La diferencia con el método LS es más pronunciada que en el caso de ecuaciones de pseudodistancia.
- El número de condición es mucho menor para el método de estimación RT.
- Los errores absolutos y relativos, también son mucho menores para el método de estimación RT que para LS.
- Las soluciones son poco sesgadas, pues el sesgo introducido es pequeño.

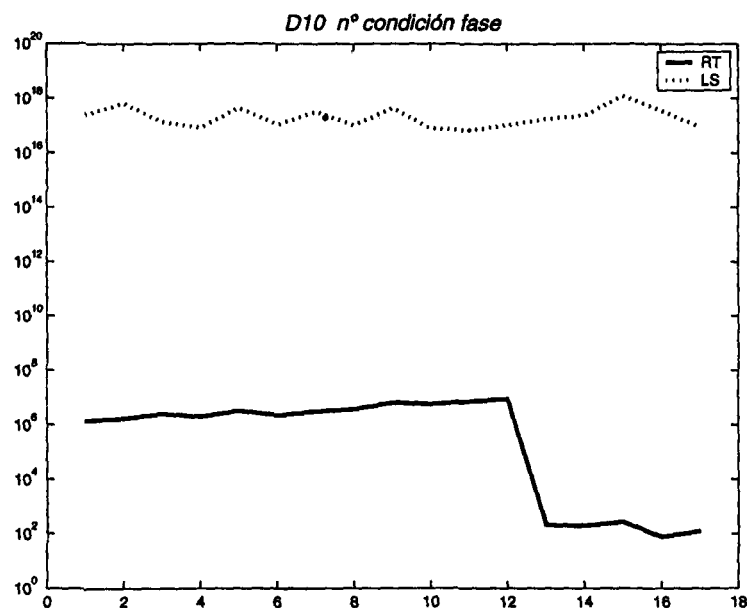


Figura 4.18: Número de condición bloque D10. Fase



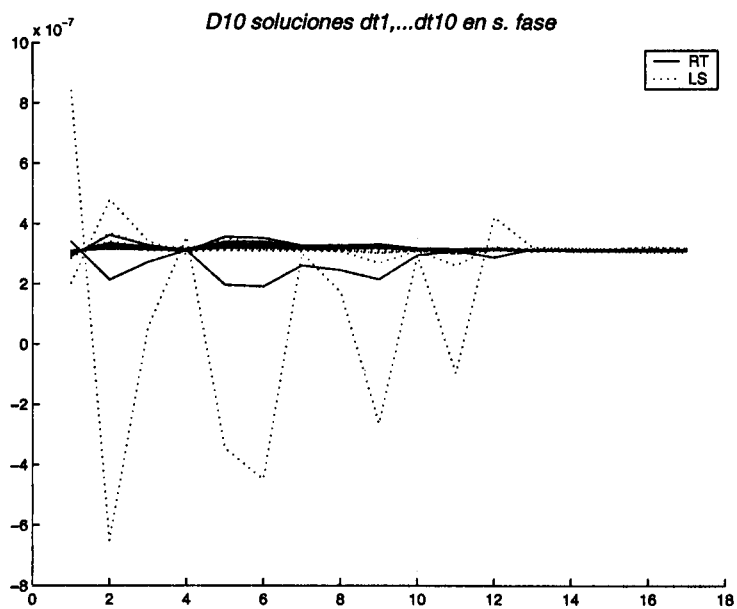


Figura 4.19: Soluciones comparadas dt LS y RT (D10). Fase

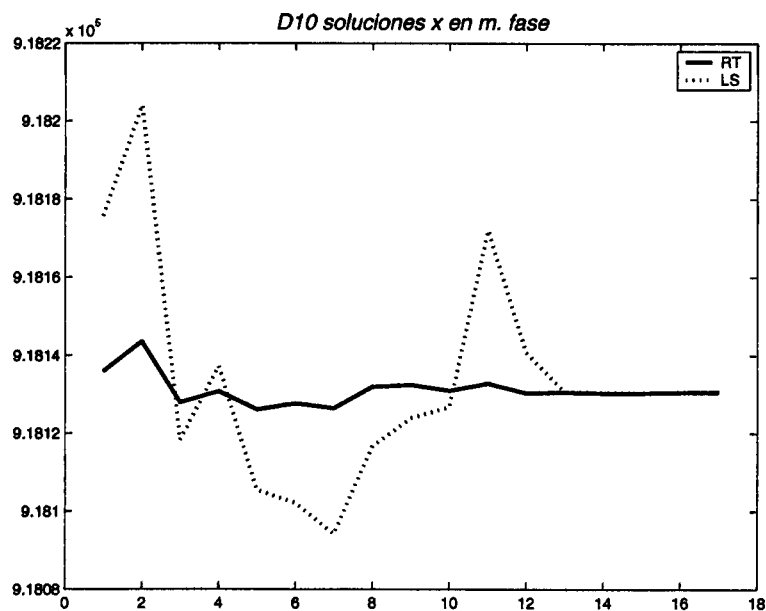


Figura 4.20: Soluciones comparadas dx LS y RT (D10). Fase

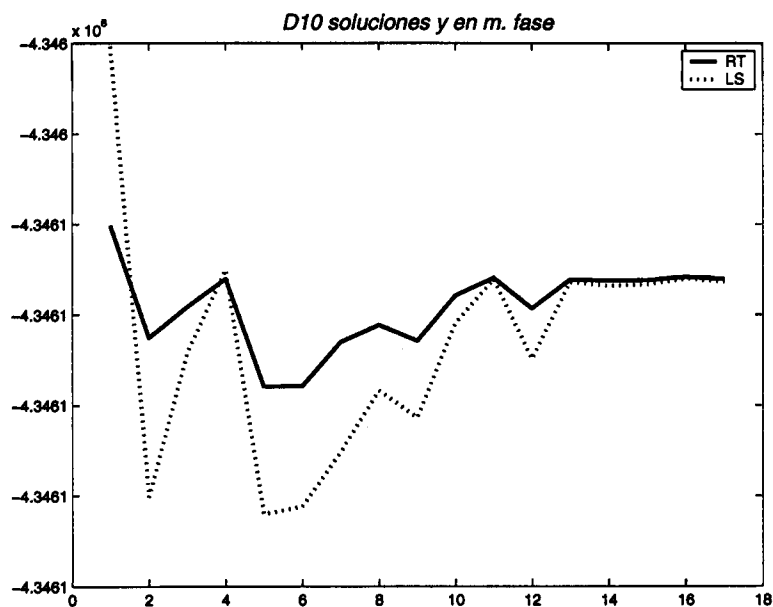


Figura 4.21: Soluciones comparadas dy LS y RT (D10). Fase

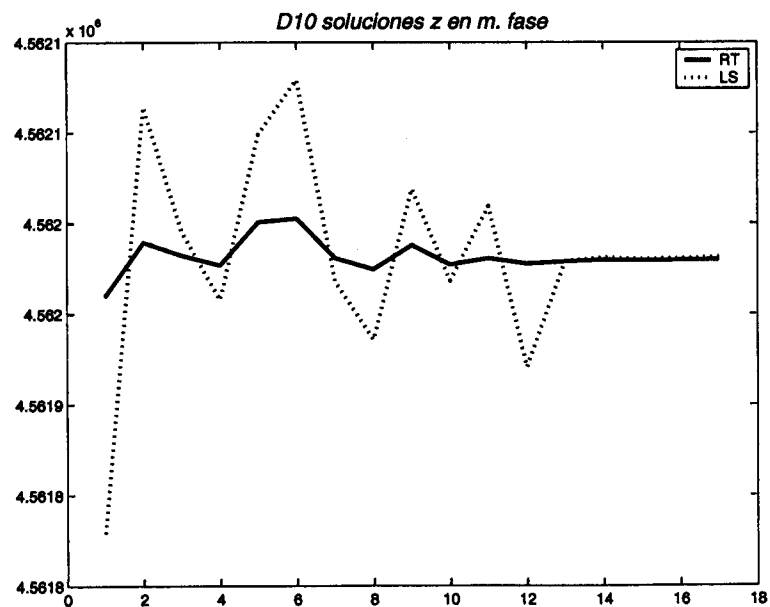


Figura 4.22: Soluciones comparadas dz LS y RT (D10). Fase

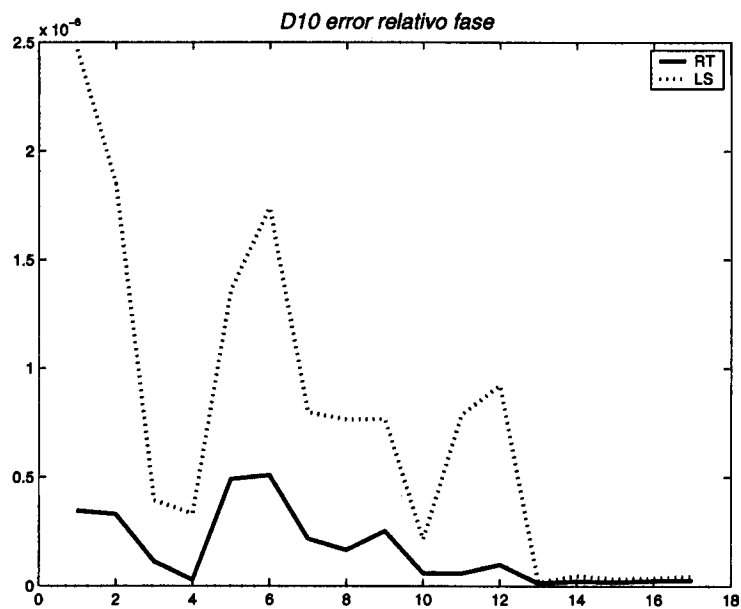


Figura 4.23: Error relativo D10. Fase

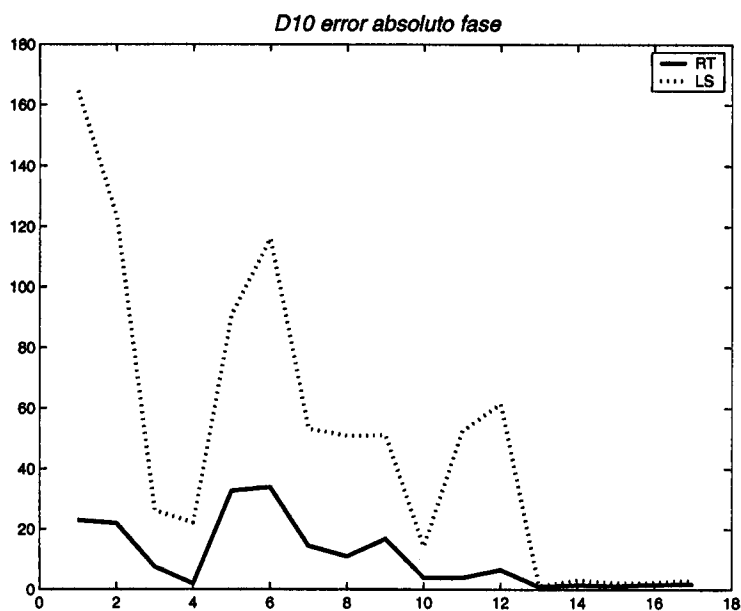


Figura 4.24: Error absoluto D10. Fase

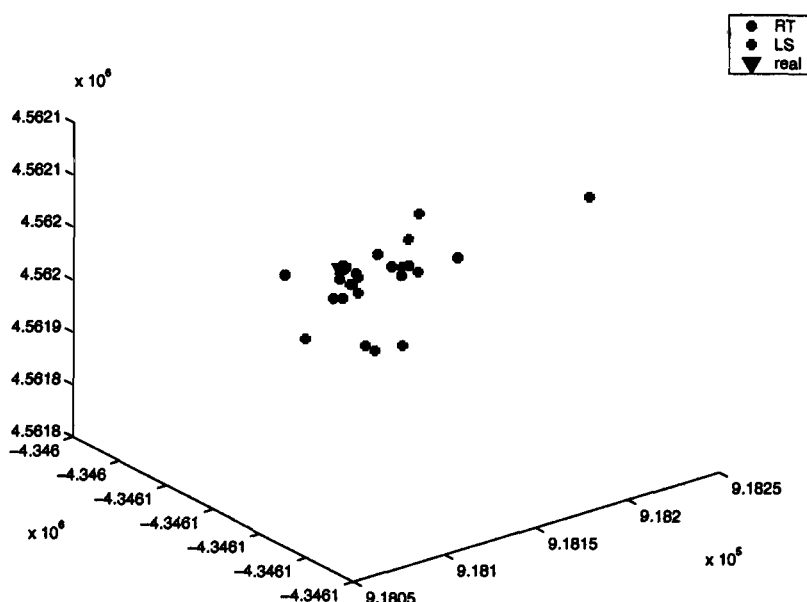


Figura 4.25: Exactitud y Precisión en las soluciones de posición D10. Fase

## 4.2. Análisis bifactorial para selección de observaciones

Dos de los factores implicados en la resolución de los sistemas GPS, y que tienen gran importancia en la obtención de una solución con precisión, son el intervalo entre observaciones y el número de observaciones. En esta sección se hace un estudio estadístico que muestra la posible influencia de ambos factores en la solución obtenida [1]. De los resultados se concluye que las soluciones correspondientes a las incógnitas de posición de la estación receptora  $X$ , e  $Y$  son independientes de ambos factores, mientras que la incógnita  $Z$  muestra un efecto significativo en la forma de elegir el intervalo de tiempo entre observaciones y el número de ellas.

Para utilizar un conjunto de datos diferente que pudiera presentar mejores condiciones pero sin modificar el método de estimación, se ha realizado un análisis de la varianza de dos factores. Se parte de la hipótesis de si el conjunto de datos elegido para resolver el problema tiene influencia en la solución y caso de ser así como se manifiesta esta influencia. En concreto se han tratado dos factores que podrían tenerse en cuenta en la selección del conjunto de datos, estos son:

1. El intervalo entre las observaciones.
2. El número de ecuaciones procesadas.

El uso del análisis de la varianza se justifica puesto que los factores son de carácter cuantitativo, y no se conoce la naturaleza de la relación entre ellos y la solución.

#### 4.2.1. Análisis de las perturbaciones en la solución

La corrección a los relojes de los satélites en las observaciones GPS es muy importante ya que éste debe mantenerse dentro de un orden de precisión si se quiere obtener una precisión dada en la posición. El Teorema de la Función Implícita permite analizar la exactitud que se requiere en tiempo para conseguir una precisión dada en la posición [50]. El principal resultado de la aplicación de este teorema se resume a continuación. Si se produce una perturbación en  $t_i$ , tiempo marcado en los relojes de los satélites, se perturban las coordenadas de la estación receptora  $(x_r, y_r, z_r)$  o para simplificar  $(X, Y, Z)$ , el cambio en las coordenadas se expresa aproximadamente como sigue:

$$\Delta X \approx \frac{\partial X}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial X}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial X}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial X}{\partial t_4} \Delta t_4 \quad (4.30)$$

$$\Delta Y \approx \frac{\partial Y}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial Y}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial Y}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial Y}{\partial t_4} \Delta t_4 \quad (4.31)$$

$$\Delta Z \approx \frac{\partial Z}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial Z}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial Z}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial Z}{\partial t_4} \Delta t_4 \quad (4.32)$$

Si  $|\Delta t_i| < C$  para todo  $i$  y para un  $C$  dado, entonces:

$$|\Delta Z| \leq \left( \left| \frac{\partial Z}{\partial t_1} \right| + \left| \frac{\partial Z}{\partial t_2} \right| + \left| \frac{\partial Z}{\partial t_3} \right| + \left| \frac{\partial Z}{\partial t_4} \right| \right) C \quad (4.33)$$

de forma análoga se obtienen expresiones para  $X$  e  $Y$ . Hacemos notar que en (4.33), si todos los  $t_i$ 's se perturban la misma cantidad es fácil obtener el máximo valor en el cambio en  $Z$ , y de forma similar, si  $Z$  debe mantenerse dentro de un cierto grado de exactitud, el error en tiempo tomará un cierto valor como máximo.

Tomando un ejemplo numérico usando cuatro satélites [50]:  $|\Delta X| \leq 3,19 \cdot 10^9 C$ ,  $|\Delta Y| \leq 0,7 \cdot 10^9 C$  y  $|\Delta Z| \leq 5,07 \cdot 10^9 C$ . Podríamos perturbar los  $t_i$ 's la cantidad  $3 \cdot 10^{-8}$  sg. y obtendríamos un error en la localización de:

- $|\Delta X| \leq 90$  m.
- $|\Delta Y| \leq 21$  m.
- $|\Delta Z| \leq 150$ m.

Por otra parte, las ecuaciones generales del modelo matemático, tanto para pseudodistancia como para fase, descritas en el capítulo 2 y que se escribía como:

$$\begin{aligned} P_r^s &= \rho_r^s - cdt_r + \varepsilon \\ \phi_r^s &= \rho_r^s - cdt_r + N_r^s \lambda + \varepsilon \end{aligned} \quad (4.34)$$

nos permite analizar cómo la geometría de los satélites puede afectar a la solución estimada. Para ello y por simplificar consideramos únicamente el error en la posición estimada  $\Delta E = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ , la expresión (4.34) puede cambiarse [?] por:

$$\Delta E = G^{-1} \Delta \rho_r^s \quad (4.35)$$

Si  $\Delta \rho_r^s \leq M$  para todos los satélites  $s$  y para un  $M$ , dado entonces:

$$\Delta E \leq G^{-1} M \quad (4.36)$$

Donde  $G$ , matriz de la configuración geométrica, se puede construir mediante las direcciones aproximadas de los satélites en un Sistema Geocéntrico Terrestre. Entonces, la matriz  $G$  se expresa:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \cos(\delta_1) & \sin(\alpha_1) \cos(\delta_1) & \sin(\delta_1) & 1 \\ \cos(\alpha_2) \cos(\delta_2) & \sin(\alpha_2) \cos(\delta_2) & \sin(\delta_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

Considerando (4.36) y tomando los valores numéricos de ejemplo citados anteriormente en la página 163; si perturbamos  $M$  en 10 m, entonces:

$$\begin{pmatrix} -6,48 & 6,62 & -1,61 & 1,47 \\ -0,31 & 1,25 & 0,40 & 1,17 \\ -8,07 & -9,54 & -3,99 & 2,68 \\ 8,71 & -9,54 & 3,92 & -2,09 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,16 \\ 2,39 \\ 7,98 \\ -0,41 \end{pmatrix}$$

donde  $|\Delta X| \leq 1,16$  m,  $|\Delta Y| \leq 2,39$  m y  $|\Delta Z| \leq 7,98$  m.

Estos ejemplos numéricos revelan que el tiempo y la nueva configuración geométrica afectan a la solución. Además, el valor obtenido para la coordenada  $Z$  tiende a ser mayor que para las coordenadas  $X$  e  $Y$ .

#### 4.2.2. Modelo lineal para el análisis de dos factores

El modelo estadístico usado para el estudio de las observaciones GPS corresponde un modelo de análisis de la varianza de efectos aleatorios [48]. A continuación se explican brevemente los siguientes conceptos útiles en este estudio:

*Factor A*: Es una variable explicatoria ( $A, B, C, \dots$ ) estudiada en una investigación. Los diferentes valores del factor se denominan *Niveles*. Una combinación de un determinado nivel para el factor se denomina *Tratamiento*. Los tratamientos son la unidad experimental. La medida de la variable respuesta se usa para comparar los distintos tratamientos.

El modelo lineal usado es el que sigue [48]:

$$X_{ijk} = \mu + A_i + B_j + e_{ijk} + (AB)_{ij} \quad (4.38)$$

donde  $X_{ijk}$ , siguen una distribución  $N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ , y representan las medidas de la variable respuesta para la unidad experimental  $k^{th}$ , expuesta al nivel  $i^{th}$  del factor  $A$  y al nivel  $j^{th}$  del factor  $B$ ;  $\mu$  es una constante. El factor  $A$  tiene  $I$  niveles:  $i = 1, \dots, I$  y el factor  $B$  tiene  $J$  niveles:  $j = 1, \dots, J$ . En cada tratamiento hay  $k = 1, \dots, K$  unidades experimentales. El término  $e_{ijk}$  es el error experimental, es una variable independiente y sigue una distribución  $N(0, \sigma^2)$ . Los factores  $A$  y  $B$  se dice que *interactúan* y la interacción se representa por  $(AB)_{ij}$ , si el efecto del factor  $A$  depende del nivel del factor  $B$ , o de forma equivalente, si el efecto del factor  $B$  depende del nivel del factor  $A$ .

La hipótesis nula que se estudiará es la siguiente:

$$\sigma_{A_i}^2 = 0 \quad (4.39)$$

$$\sigma_{B_j}^2 = 0 \quad (4.40)$$

$$\sigma_{AB_{ij}}^2 = 0 \quad (4.41)$$

### 4.2.3. El modelo empírico: Diseño del experimento

Se va a estudiar la posible influencia de dos factores en la solución de los sistemas generados en las observaciones de satélites GPS. El modelo estadístico será por tanto el del análisis de la varianza de dos factores, univariado, aleatorio y equilibrado.

Las variables independientes son:

- Factor  $A = \text{'Número de observaciones'}$
- Factor  $B = \text{'Intervalo entre observaciones'}$

La variable dependiente es la posición de la estación receptora.

Centrándonos en las ecuaciones derivadas del modelo de pseudodistancia, para resolver la posición y el error en el reloj de la estación, se necesitan observar al menos cuatro satélites simultáneamente en un instante (1 época); con esto se obtienen cuatro ecuaciones. Para el factor  $A$  se definen tres niveles:

- Nivel (1) 5 épocas
- Nivel (2) 10 épocas
- Nivel (3) 20 épocas

Para el factor  $B$  también se definen tres niveles:

- Nivel (1)  $\Delta t = 30''$
- Nivel (2)  $\Delta t = 90''$
- Nivel (3)  $\Delta t = 300''$

En cualquier unidad experimental se observarán seis satélites. Cada tratamiento (nueve en total) consiste en once unidades experimentales diferentes correspondientes a once sistemas de ecuaciones no lineales (linealizados), ver tabla 4.4. Las filas de la tabla representan las diferentes épocas de observación, y las columnas los diferentes intervalos de observación. El periodo de observación usado en este estudio corresponde a 12 horas, tiempo aproximado que cada satélite tarda en completar una órbita. Los datos han sido facilitados



Épocas	$\Delta t = 30''$	$\Delta t = 90''$	$\Delta t = 300''$
5	11 sistemas, 30 ecuaciones, 8 incógnitas	... <sup>1</sup>	... <sup>2</sup>
10	11 sistemas, 60 ecuaciones, 13 incógnitas	...	...
20	11 sistemas, 120 ecuaciones, 23 incógnitas	...	...
<sup>1,2</sup> misma situación para los niveles 2 y 3			

Tabla 4.4: Descripción experimental

por la el Centro Europeo de Operaciones Espaciales (ESOC), y fueron tomados desde la estación de Maspalomas (MAS1) en la isla de Gran Canaria (España).

Ahora bien, para poder aplicar el modelo del análisis de la varianza, deben verificarse los siguientes supuestos [48]:

1. Independencia de las muestras.
2. Distribución normal de las muestras.
3. Igualdad de varianzas.

El supuesto de independencia se verifica puesto que las observaciones se han elegido aleatoriamente durante el tiempo de estudio.

El supuesto de normalidad puede verificarse mediante el test de *Lilliefors*. Este test es una aproximación del test de *Kolmogorov-Smirnov* cuando no se conocen los parámetros de la población [48]. Usando este estadístico para una muestra con  $k = 11$ , para un nivel de significación de  $\alpha = 0,05$ , El valor crítico obtenido es 0,2490. La tabla 4.5 resume los resultados para las nueve muestras en la variable  $Z$ . Como se observa todos los valores son menores que 0,2490 y por tanto la hipótesis nula es aceptada. Repitiendo el test para las variables  $X$  e  $Y$  obtenemos similares resultados. Basándonos en los resultados del test podemos asegurar que la distribución de las muestras son suficientemente próximas a la distribución normal.

La igualdad de varianzas puede probarse para ambos factores mediante el test de *Cochran* [48] donde la hipótesis nula se expresa:

- *No existe diferencia entre las varianzas,  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$  para los tres niveles en ambos factores.*

Épocas	$\Delta t = 30''$	$\Delta t = 90''$	$\Delta t = 300''$
5	0,1945	0,2035	0,1867
10	0,1879	0,1383	0,1746
20	0,1979	0,1621	0,1643

Tabla 4.5: Test de Lilliefors para el estudio de Normalidad de la variable  $Z$ 

Para un nivel de significación de 0,05 el valor crítico para el test de Cochran para los tres niveles y las 33 unidades experimentales es de 0,493. El test de Cochran calcula la relación  $R = \frac{\max \sigma_i^2}{\sum_{i=1}^3 \sigma_i^2}$ . Para cualquier factor:  $R_A = 0,3838 < 0,493$  y  $R_B = 0,3909 < 0,493$ . Por lo tanto el supuesto de igualdad de varianzas no puede ser rechazado.

Las tablas 4.6, 4.7 y 4.8 presentan el resultado del análisis de la varianza para las variables  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  considerando  $\alpha = 0,05$ . Para las tres fuentes de variación (factor  $A$ ,  $B$  e interacción  $AB$ ) se muestran las sumas de cuadrados ( $SS$ ), los grados de libertad ( $df$ ), la media de cuadrados ( $MS$ ), y  $F$ , el valor del estadístico. Los estadísticos calculados para estas tres fuentes se expresan como:

$$F(A) = \frac{MS(A)}{MS(AB)}; \quad F(B) = \frac{MS(B)}{MS(AB)}; \quad F(AB) = \frac{MS(AB)}{MS(Error)} \quad (4.42)$$

Fuente de variación		$SS$	$df$	$MS$	$F$
$A$	Hipótesis	175,231	2	87,616	0,084
	Error	4159,578	4	1039,895	
$B$	Hipótesis	819,899	2	409,949	0,394
	Error	4159,578	4	1039,895	
$AB$ Interacción	Hipótesis	4159,578	4	1039,895	0,450
	Error	208119,616	90	2312,440	

Tabla 4.6: Análisis estadístico de la variable  $X$ 

Para el nivel de significación mencionado se requieren los siguientes valores críticos:  $F_{AB} \in [2, 45 - 2, 53]$ ,  $F_A = 6, 94$  y  $F_B = 6, 94$ . Comparando el resultado del test estadístico con los valores críticos de la distribución  $F$  encontramos que:

Fuente de variación		<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	Hipótesis	524,886	2	262,443	0,807
	Error	1301,307	4	325,327	
<i>B</i>	Hipótesis	243,306	2	121,653	0,374
	Error	1301,307	4	325,327	
<i>AB</i> interacción	Hipótesis	1301,307	4	325,327	0,663
	Error	46229,843	90	513,665	

Tabla 4.7: Análisis estadístico de la variable *Y*

Fuente de variación		<i>SS</i>	<i>df</i>	<i>MS</i>	<i>F</i>
<i>A</i>	Hipótesis	625,430	2	312,715	14,626
	Error	85,525	4	21,381	
<i>B</i>	Hipótesis	1966,444	2	983,222	45,985
	Error	85,525	4	21,381	
<i>AB</i> interacción	Hipótesis	85,525	4	21,381	0,038
	Error	50978,605	90	566,429	

Tabla 4.8: Análisis estadístico de la variable *Z*

1. Las variables *X* e *Y* no están influenciadas por los factores estudiados.
2. Que no existe interacción entre los factores.
3. La variable *Z* sí está influenciada por los factores estudiados, ya que en este caso la varianza entre tratamientos es significativamente mayor que la varianza dentro de los tratamientos.

Por tanto las hipótesis nulas de (4.39) y (4.40),  $\sigma_{A_i}^2 = 0$  and  $\sigma_{B_j}^2 = 0$  deben ser rechazadas.

En las figuras 4.26, 4.27 y 4.28 el eje horizontal representa el diferente número de observaciones (factor *A*) y el eje vertical representa los diferentes intervalos de tiempo (factor *B*).

Las figuras 4.26, y 4.27 muestran las tres líneas significativamente poco separadas de una línea horizontal. Por otra parte, en la figura 4.28 para la variable *Z* las líneas deben considerarse significativamente diferentes de una línea horizontal.

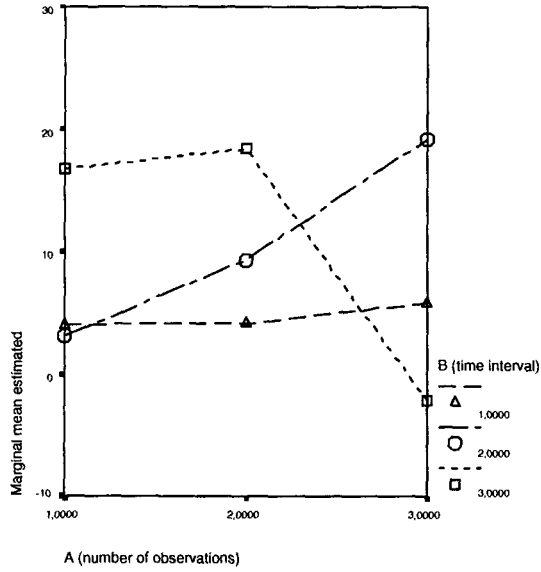


Figura 4.26: Media marginal estimada para la variable X

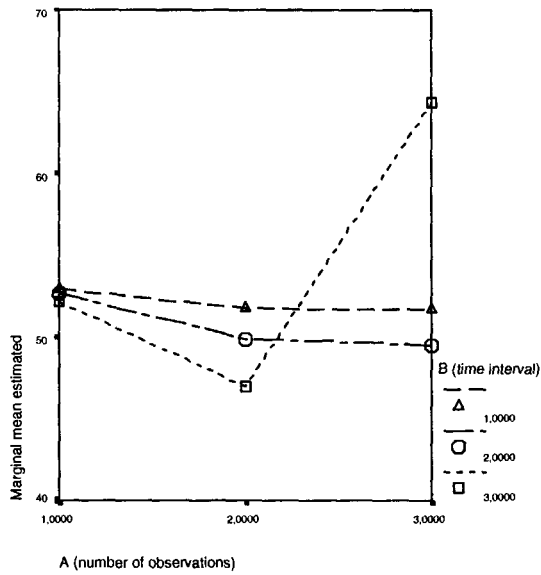
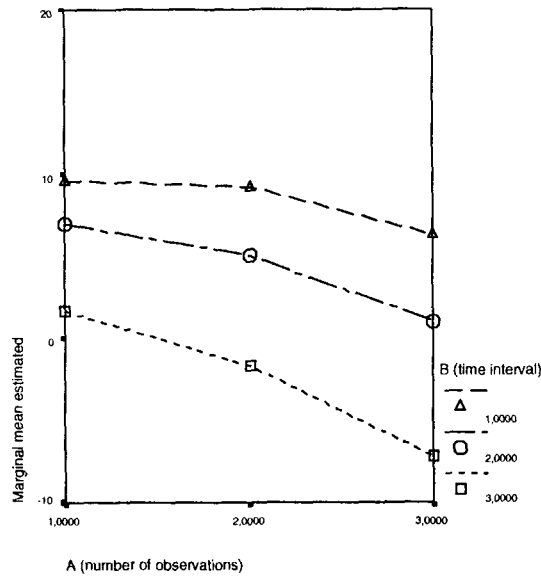


Figura 4.27: Media marginal estimada para la variable Y

Figura 4.28: Media marginal estimada para la variable  $Z$ 

El rechazo de la hipótesis nula para la variable  $Z$  sugiere que en media, los tratamientos son diferentes, pero no nos indica donde se producen estas diferencias. Las comparaciones descriptivas ayudan a ver donde se producen las diferencias, pero no son concluyentes. Por eso se necesita recurrir a las comparaciones múltiples. El test de las diferencias significativas de Tukey (*Honestly Significant difference Tukey test, HSD*) permite encontrar donde se producen estas diferencias. La hipótesis nula que debe plantearse para los dos factores es (1)  $\mu_1 = \mu_2$ , (2)  $\mu_1 = \mu_3$  y (3)  $\mu_2 = \mu_3$ .

Factor	$\mu_1 - \mu_2$	$\mu_1 - \mu_3$	$\mu_2 - \mu_3$
A (numero de observaciones)	2,65	6,78	4,12
B (intervalo de tiempo)	4,04	10,80	6,76

Tabla 4.9: Test *HSD* de comparaciones múltiples

El test *HSD* nos indica que para un nivel de significación de 0,05,  $HSD = 2,72$ . En la tabla 4.9 se observa que hay cinco valores mayores que el resultado del test, por tanto las hipótesis nulas se rechazan para esos cinco casos. También observamos como para el factor  $A$  la comparación de medias  $\mu_1$  vs  $\mu_2$  resulta no significativa. Todas las demás si lo son.

Esta sección ha mostrado una explicación estadística de la mayor inexactitud de la componente  $Z$  frente a las otras dos componentes de la posición del receptor, en la resolución de las ecuaciones de pseudodistancia derivadas de las observaciones GPS. Del estudio estadístico se puede concluir que  $X$  e  $Y$  son independientes de la elección del intervalo de tiempo entre observaciones y del número de observaciones, los dos factores estudiados. Sin embargo, la incógnita  $Z$  muestra un efecto significativo en la forma en que se eligen estos factores. El resultado estadístico se puede resumir en:

1. (Variable  $X$ ),  $\sigma_{Bj}^2 = \sigma_{Ai}^2 = 0$ , hipótesis aceptada.
2. (Variable  $Y$ ),  $\sigma_{Bj}^2 = \sigma_{Ai}^2 = 0$ , hipótesis aceptada.
3. (Variable  $Z$ ),  $\sigma_{Bj}^2 = \sigma_{Ai}^2 = 0$ , hipótesis rechazada.
4. (Variable  $X, Y, Z$ ),  $\sigma_{ABij}^2 = 0$ , hipótesis aceptada.

A pesar de que las tres coordenadas  $X$ ,  $Y$  y  $Z$  representan el mismo tipo de incógnita (posición de la estación receptora), estadísticamente el parámetro  $Z$  no es independiente de la elección del sistema de ecuaciones, y esto es de especial relevancia en las observaciones de satélites GPS.

Esto está en concordancia con los ejemplos numéricos derivados de la ecuación fundamental del análisis del error en GPS y el análisis de perturbaciones a través del teorema de la Función Implícita, tratado al principio de esta sección. En este caso, el mayor error observado para la coordenada  $Z$  puede indicar inestabilidad causada por la variación tanto en intervalo de tiempo entre observaciones como por la geometría, como el estudio estadístico mostraba. Cuando variamos el número de ecuaciones (factor A) esto introduce nuevas incógnitas de tiempo y nuevas configuraciones geométricas. Por otra parte, cuando variamos intervalo de tiempo entre observaciones (factor B), también se produce un cambio en la geometría de los satélites. Esto puede entenderse como una perturbación en tiempo en la ecuación (4.33) y una perturbación en la geometría en (4.36).

Los estudios experimentales de [51], muestran que existe una gran correlación entre errores verticales y errores en tiempo en general. Este hecho

también apoya el resultado de la mayor inexactitud de la coordenada vertical en relación a las coordenadas horizontales cuando se perturba el tiempo.

### 4.3. Transformaciones ortogonales para manejar la deficiencia de rango

En los sistemas de ecuaciones que estamos tratando la deficiencia de rango debida a la dependencia lineal de las columnas de la matriz es la causa de la multicolinealidad. Los métodos basados en la regresión que reducen el número de condición también son los más indicados para sobrellevar los efectos de dicha dependencia. La deficiencia de rango es un problema que surge cuando se utilizan las observaciones directas de los satélites, que en nuestro caso es así como se vio en la sección 2.5.1.

La mayoría de los paquetes de software comerciales usan diferencias de observaciones como ecuaciones básicas, con lo que este problema puede evitarse a costa de la pérdida de información que supone el uso de combinaciones lineales, y que se manifiesta en una correlación de las observaciones, y en la pérdida de la naturaleza entera de las ambigüedades. Mediante el uso de las transformaciones ortogonales se puede evitar esta deficiencia de rango y hacer uso de toda la información que proporcionan las observaciones. Recordemos que para el caso de ecuaciones de fase la matriz es deficiente de rango dado que una de sus columnas,  $a_{i,4}$  era combinación lineal de las restantes  $a_{i,5,\dots,n}$  como se vio en la ecuación (2.25)

Una forma de expresar la matriz  $A \in \mathfrak{R}^{m \times n}$  del sistema para ecuaciones de fase tal y como se expresó en la figura 2.6 es la siguiente:

$$FASE = \begin{bmatrix} A_1 & e & 0 & \cdots & I_s \\ A_2 & 0 & e & \cdots & I_s \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_t & 0 & \cdots & e & I_s \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Donde  $e = (1, 1, \dots, 1)^t \in \mathfrak{R}^s$  es un vector unidad,  $A_i \in \mathfrak{R}^{s \times 3}$   $i = 1, \dots, t$  es la matriz dada por las derivadas parciales para todos los satélites en una época, e  $I_s \in \mathfrak{R}^{s \times s}$ , la identidad, siendo  $s$  el número de satélites observados y  $t$

el número de épocas de observación. Particularizando a nuestro ejemplo  $s = 8$ ,  $t = 10$ .

Sea  $H \in \mathfrak{R}^{s \times s}$  una transformación ortogonal de Householder,  $e_i$  la columna  $i$ -ésima de la matriz identidad como ya hemos usado en otros capítulos, tales que  $H^t e = e_1/\sqrt{s}$  entonces:

$$H = I - v\left(\frac{2}{v^t v}\right)v^t, \quad v = e_1 - e/\sqrt{s}$$

La matriz  $H$  tiene sólo tres valores distintos y se expresa:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{s}} & \frac{1}{\sqrt{s}} & \frac{1}{\sqrt{s}} & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{s}} & 1 - \frac{1}{s-\sqrt{s}} & -\frac{1}{s-\sqrt{s}} & \cdots \\ \frac{1}{\sqrt{s}} & -\frac{1}{s-\sqrt{s}} & 1 - \frac{1}{s-\sqrt{s}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

es decir

$$[h_1, h_2, \dots, h_s] \equiv [h_1, H2] \equiv H$$

donde  $h_1 \in \mathfrak{R}^{s \times 1}$  y  $H2 \in \mathfrak{R}^{s \times s-1}$ .

$$\text{Si llamamos } A_1 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_{2,\dots,s} \end{bmatrix}$$

donde  $A_1 \in \mathfrak{R}^{1 \times 3}$  y  $A_{2,\dots,s} \in \mathfrak{R}^{s-1 \times 3}$ .

Si aplicamos  $H^t$  a las ecuaciones de la primera época de (4.43) obtenemos la transformación ortogonal que hace ceros los coeficientes relativos a la incógnita reloj del receptor para todos los satélites salvo el primero entonces las ecuaciones de fase para una época quedan:

$$\begin{aligned} h_1^t A_1 X + 1\sqrt{s}dt_1 + h_1^t N_1 + h_1^t \varepsilon_2 &= h_1^t \phi_1 \\ H_{2,\dots,s}^t A_{2,\dots,s} X + H_{2,\dots,s}^t N_{2,\dots,s} + H_2^t \varepsilon_2 &= H_2^t \phi_{2,\dots,s} \end{aligned} \quad (4.44)$$

Donde los vectores  $\varepsilon_i$  de carácter aleatorio, siguen manteniendo una distribución  $N(0, \sigma^2)$  después de la transformación ortogonal. En las expresión (4.44) los términos de la derecha corresponden al término independiente del sistema, y se ha separado la primera ecuación correspondiente al primer satélite



y las restantes correspondientes a los restantes satélites. Como se observa, en la segunda expresión ha desaparecido la incógnita del reloj del receptor, quedando únicamente en la primera ecuación para el primer satélite.

Realizando esta operación para cada época de observación  $t = 1, \dots, t$  y ordenando las ecuaciones de modo que aparezcan primero las correspondientes al primer satélite, para todas las épocas la estructura de la matriz queda como se ve en la figura 4.29, en la que se han representado también los pasos intermedios de la transformación ortogonal correspondientes a la época 7 y 10.

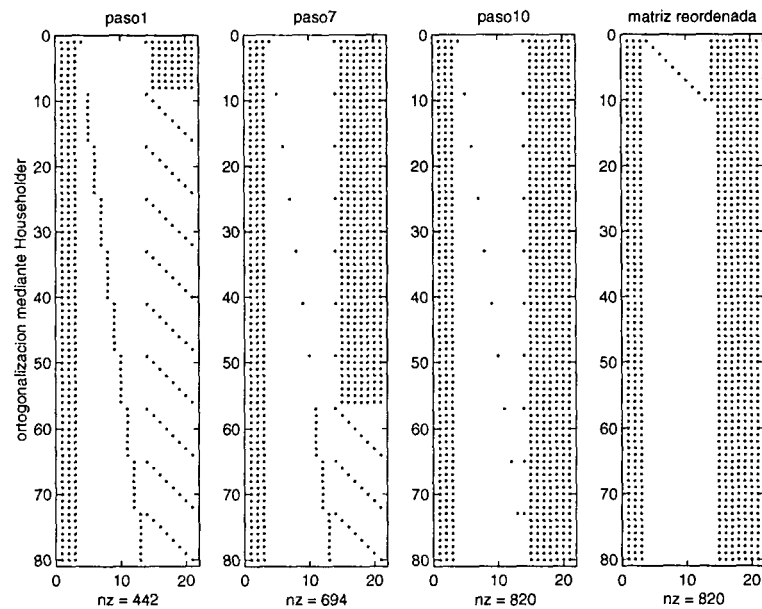


Figura 4.29: Transformaciones ortogonales y ordenación en la matriz de fases

La estructura de la matriz de coeficientes se puede separar pues en dos submodelos como se observa en la figura 4.30.

Como se puede ver el submodelo 2 se puede resolver por mínimos cuadrados, o mediante los métodos de regresión. Dado que su rango es completo 10, y el número de incógnita se ha reducido a 10 la solución es única. Este submodelo está formado por las últimas  $t(s-1)$  ecuaciones del modelo general ordenado tal y como se explicó. Las incógnitas que han quedado después de este tratamiento son, las de posición y las ambigüedades para  $s - 1$  satélites es decir  $3 + s - 1$

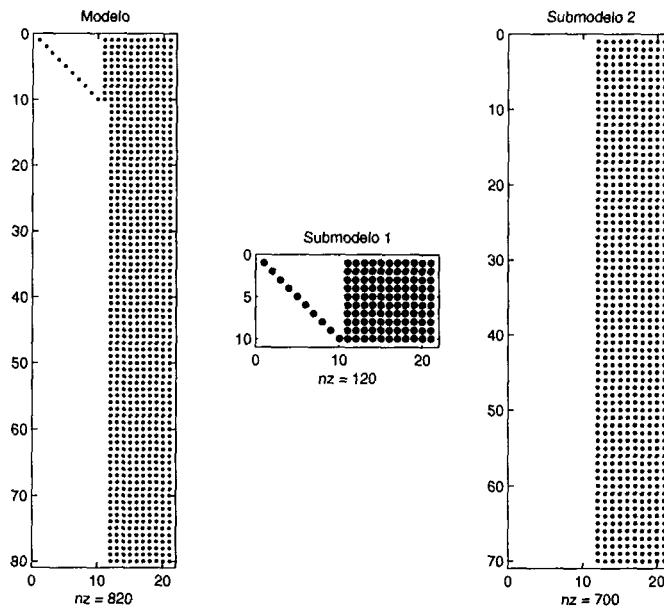


Figura 4.30: Submodelos para ecuaciones de fase

incógnitas. La estimación del resto de incógnitas podría hacerse mediante las  $t$  ecuaciones del submodelo 1, previa resolución del submodelo 2, con lo que se habría resuelto el problema evitando la deficiencia de rango. Los resultados para el tratamiento descrito no se han realizado pues requieren un estudio cualitativo y cuantitativo del nuevo sistema. Sólo se apunta la forma de evitar la deficiencia de rango.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajo Futuro

### 5.1. Conclusiones

El motivo de estudiar los sistemas asociados a observaciones de satélites y que lleva a pensar en esta tesis, es la gran utilidad que hoy día tienen en múltiples campos relacionados con las ciencias de la Tierra, ya que en ellos hay implicados parámetros del modelo de movimiento del satélite, parámetros de orientación de la Tierra y parámetros del modelo atmosférico, en general no muy bien conocidos. El buen conocimiento del comportamiento del sistema frente a las diferentes perturbaciones de los datos nos puede ayudar a conocer dichos modelos.

Hay que resaltar que a pesar de que por claridad en la presentación de esta tesis se han mostrado los resultados basados en un conjunto de observaciones específicas, en el transcurso del trabajo se han tratado otras observaciones distintas pudiéndose comprobar que las conclusiones aquí derivadas también son aplicables en otros casos.

Al término del trabajo de investigación desarrollado en esta tesis podemos establecer las siguientes conclusiones finales.

1. Respecto al número de condición de la matriz de los sistemas de ecuaciones:
  - El número de condición de la matriz empeora con el aumento de observaciones.

- El número de condición no varía con reordenaciones para pseudodistancia.
  - El número de condición varía pero se mantiene del mismo orden con reordenaciones para fase.
  - La transformación basada en la regresión utilizada en el método de estimación RT reduce el número de condición.
  - El número de condición sobreestima el error en las componentes. Existen componentes en la solución calculadas con mayor precisión de la que predice el número de condición de la matriz.
2. Respecto a las reordenaciones para evitar el efecto *fill-in*:
- La factorización sin reordenar la matriz produce factores ortogonales y de Cholesky densos, mientras que una reordenación cualquiera produce factores dispersos.
  - La reordenación previa a la formación de las ecuaciones normales es mejor que aplicar reordenaciones simétricas a las ecuaciones normales.
  - La factorización mediante transformaciones elementales produce factores más dispersos que por transformaciones ortogonales, tanto sin reordenaciones como con ellas.
3. Respecto a la solución de los sistemas de ecuaciones tratados:
- Los errores de redondeo en las direcciones de los semiejes correspondientes a los valores propios múltiples producen error máximo en la solución. No obstante se necesitan grandes perturbaciones en los datos para que el efecto sea apreciable ( $10^{-2}$ ,  $10^{-3}$ ).
  - La estimación de Tipo-máximo (RT) aunque sesgada es mejor que la estimación mínimos cuadrados (LS). Esta mejora se ha evaluado a través del error absoluto y el error relativo.
  - La selección de las observaciones en base a mayor número de observaciones y mayor intervalo entre observaciones influye en el resultado de forma diferente para las incógnitas. Afectando más a la componente  $z$ .

- El enfoque de linealizar mediante un modelo cuadrático introduce unas modificaciones en la matriz despreciables ( $10^{-8}$ ) menores que las perturbaciones perceptibles, por lo que no aporta nada.
4. Respecto a la deficiencia de Rango de los sistemas de ecuaciones de fase:
- La descomposición de la matriz original del sistema en la forma QAP con P una permutación y Q ortogonal, permite llevar a cabo las operaciones necesarias para resolver el problema cuando la matriz es deficiente de rango, aunque no elimina la deficiencia.
  - El uso de transformaciones de Householder permite eliminar la deficiencia de rango descomponiendo el sistema original en dos subsistemas, uno de los cuales es completamente denso.

Los resultados que presenta esta tesis proporcionan una vía apropiada para la mejora en la solución de sistemas mal condicionados y con deficiencia de rango asociados a las observaciones de satélites GPS.

## 5.2. Trabajo futuro

El periodo de investigación ha revelado nuevas y futuras áreas de actuación. Resumimos a continuación las más relevantes:

1. Aplicar la estimación Tipo-máximo a otro tipos de sistemas con problemas de colinealidad.
2. Estudiar sistemas con un porcentaje de dispersidad mayor que los analizados en este trabajo.
3. Combinar las observaciones de pseudodistancia y de fase en un único modelo.
4. El estudio de las matrices de covarianzas puede dar mayor información sobre las diferencias entre los sistemas resueltos.

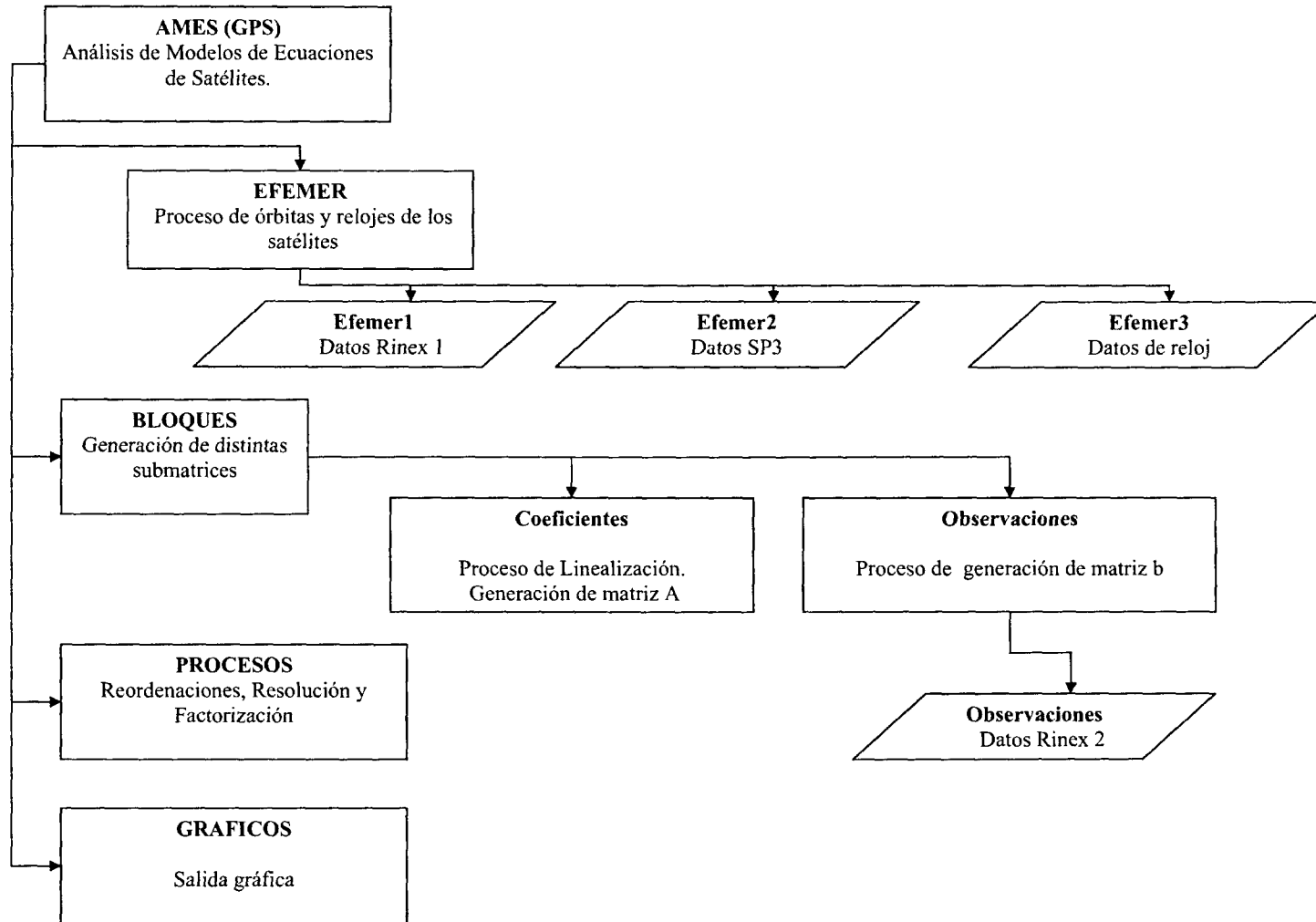


# Anexo A

## Software desarrollado

El Software desarrollado para la realización de esta tesis, se ha elaborado en MATLAB 6,0 – 12, y el esquema de programas realizados es el que se muestra en la figura A.1.

Figura A.1: Diagrama del software desarrollado





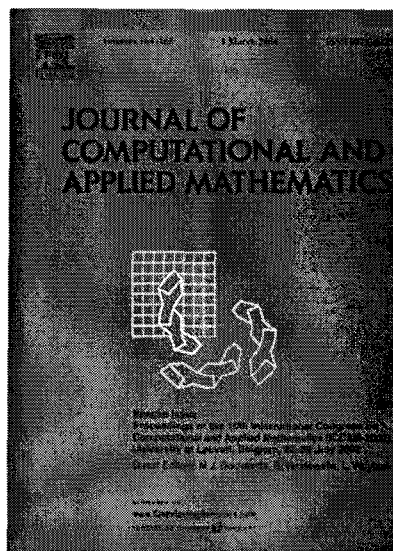


# Anexo B

## Publicaciones

Se adjunta en este anexo la publicación en revista indexada que hasta el momento ha dado lugar los trabajos de esta tesis:

1. P. Abad, J.P. Suárez, *Bi-factorial analysis for resolution of GPS equations*, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 164 (2004), pp. 1-10.





ELSEVIER

Available at

www.ElsevierMathematics.com

POWERED BY SCIENCE @ DIRECT®

Journal of Computational and Applied Mathematics 164–165 (2004) 1–10

JOURNAL OF  
COMPUTATIONAL AND  
APPLIED MATHEMATICS

www.elsevier.com/locate/cam

## Bi-factorial analysis for resolution of GPS equations

Pilar Abad\*, José P. Suárez

*University of Las Palmas de Gran Canaria, Department of Cartography and Graphic Engineering,  
Las Palmas 35017, Spain*

Received 10 September 2002; received in revised form 5 June 2003

### Abstract

A great variety of causes are implied in the resolution of GPS equations systems for obtaining precise point positioning. Among them, the time interval between observations and the number of observations are relevant to know the influence in positioning unknowns ( $X, Y, Z$ ). In this paper, we perform a statistical study showing the possible influence of both factors in the obtained solution. From the results of this paper we conclude that the  $X$  and  $Y$  solution are independent of the above factors; however,  $Z$  shows a significant effect in the manner that time interval and the number of observations are chosen. The results provide insight into the most appropriate design for solving the equation systems of GPS observations.

© 2003 Elsevier B.V. All rights reserved.

*Keywords:* GPS; Factor analysis; Observations

### 1. Introductions and definitions

The Global Positioning System (GPS) is based on a constellation of about 24 satellites orbiting the earth at altitudes of approximately 26,000 km. GPS satellites are high enough to avoid problems associated with land-based systems, yet can provide accurate positioning 24 h a day, anywhere in the world.

Any empirical experiment, as for example in GPS observations, has two types of errors: the *systematic* and the *random* error. The systematic error occurs by known causes and can be avoided. The random error is produced by fluctuations of unknown causes. It cannot be corrected before the experiment but it may be evaluated at the end of the experiment.

GPS determines the distance between a GPS satellite and a GPS receiver by measuring the time it takes a radio signal (the GPS signal) to travel from the satellite to the receiver. If the exact

\* Corresponding author.

*E-mail addresses:* mabad@dcegi.ulpgc.es (P. Abad), jsuarez@dcegi.ulpgc.es (J.P. Suárez).

Table 1  
GPS systematic errors

Source	Uncorrected error level (m)
Ionosphere	0–15
Troposphere	0–15
Measurement noise	0–10
Ephemeris data	1–5
Clock drift	0–1.5
Multipath	0–1

time when the signal was transmitted and the exact time when it was received are known, the signal's travel time can be determined. In order to do this, the satellites and the receivers use very accurate clocks which are synchronized in order to generate the same code at exactly the same time.

The GPS system has been designed to be as accurate as possible. However, errors still occur. Added together, systematic errors can cause a deviation of up to 50 m from the actual GPS receiver position, and these must be removed. There are several sources for these errors, the most significant are given in Table 1.

*Mechanistic model: mathematical equations:* The simultaneous observation of four or more satellites of known position from an unknown place enables us to build an equation system using the distance formula. There are two kinds of equations depending on the satellite signal: *phase* equations and *pseudo-range* equations. Throughout this work, we will focus on the pseudo-range equation.

The GPS observation equation following a mechanistic model, see [1,6], can be written as follows:

$$P_r^s(t) = \rho_r^s(t) + c dt_r(t) + c dT^s(t) + E_I + E_T + \varepsilon, \quad (1)$$

where  $\rho_r^s(t)$  is the pseudo-range,  $dt_r(t)$  is the station clock offset from GPS time,  $dT^s(t)$  is the satellite clock offset from GPS time,  $c$  is the vacuum speed of light,  $E_I$  and  $E_T$  are the signal path delay due to ionosphere and troposphere, respectively, and  $\varepsilon$  is the random error distributed as  $N(0, \sigma^2)$ .

After removing the systematic errors, the simplified observation equation is

$$P_r^s(t) = \rho_r^s(t) + c dt_r(t) + \varepsilon. \quad (2)$$

The pseudo-range  $\rho_r^s(t)$  term in (2) is the geometric range computed as a function of satellite coordinates  $(x_s, y_s, z_s)$  and station coordinates  $(x_r, y_r, z_r)$ . According to this,  $\rho_r^s(t)$  can be expressed as follows:

$$\rho_r^s(t) = \sqrt{(x_s - x_r)^2 + (y_s - y_r)^2 + (z_s - z_r)^2}.$$

Linearization of observation Eq. (2) around the a priori parameters  $X_0 = (x_0, y_0, z_0, t_0)$  becomes:

$$P_r^s(t) = \rho_0^s + \left( \frac{\partial \rho_r^s}{\partial x_r} \right)_0 dx_r + \left( \frac{\partial \rho_r^s}{\partial y_r} \right)_0 dy_r + \left( \frac{\partial \rho_r^s}{\partial z_r} \right)_0 dz_r + c dt_r, \quad (3)$$

where

$$\begin{aligned} dx_r &= x_r - x_0; & \left( \frac{\partial \rho_r^s}{\partial x_r} \right)_0 &= \frac{x_0 - x_s}{\rho_0^s}, \\ dy_r &= y_r - y_0; & \left( \frac{\partial \rho_r^s}{\partial y_r} \right)_0 &= \frac{y_0 - y_s}{\rho_0^s}, \\ dz_r &= z_r - z_0; & \left( \frac{\partial \rho_r^s}{\partial z_r} \right)_0 &= \frac{z_0 - z_s}{\rho_0^s}. \end{aligned}$$

Eq. (3) in matrix form is  $A\delta + W - V = 0$ , where  $A$  is the design matrix,  $\delta$  is the vector of corrections to the unknown parameters  $(dx_r, dy_r, dz_r, dt_r)$ ,  $W$  denotes the correction to preliminary value  $\rho_0^s$  and  $V$  is the residual vector. The partial derivatives of the observation equations with respect to the two types of parameters, station position  $(dx_r, dy_r, dz_r)$  and station clock  $(dt_r)$ , form the design matrix  $A$ .

The least-squares solution with a priori weights  $P$  and constraints  $P_{X_0}$  to the parameters is given by  $\delta = -(P_{X_0} + A^T P A)^{-1} A^T P W$ , so that the estimated parameters are  $\tilde{X} = X_0 + \delta$ .

## 2. Perturbation analysis of GPS solutions

A key question to understand how GPS works is how approximately must time be kept in order to achieve a specified accuracy of location. The implicit function theorem has been used in [3] allowing one to approximate the timing accuracy required by the GPS system to locate within a given degree of precision. The main result of the application of such theorem is next summarized. If the times  $t_i$  are perturbed then coordinates  $(x_r, y_r, z_r)$ ,<sup>1</sup> will change by approximately.

$$\Delta X \approx \frac{\partial X}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial X}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial X}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial X}{\partial t_4} \Delta t_4, \quad (4)$$

$$\Delta Y \approx \frac{\partial Y}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial Y}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial Y}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial Y}{\partial t_4} \Delta t_4, \quad (5)$$

$$\Delta Z \approx \frac{\partial Z}{\partial t_1} \Delta t_1 + \frac{\partial Z}{\partial t_2} \Delta t_2 + \frac{\partial Z}{\partial t_3} \Delta t_3 + \frac{\partial Z}{\partial t_4} \Delta t_4. \quad (6)$$

If a  $|\Delta t_s| < K$  for all  $s$  and for a given  $K$ , then

$$|\Delta Z| \leq \left( \left| \frac{\partial Z}{\partial t_1} \right| + \left| \frac{\partial Z}{\partial t_2} \right| + \left| \frac{\partial Z}{\partial t_3} \right| + \left| \frac{\partial Z}{\partial t_4} \right| \right) K \quad (7)$$

and analogous expressions are derived for  $X$  and  $Y$ . Note that in (7), if the  $t_i$ 's are perturbed then it is easily obtained by how much do  $Z$  change, and conversely, if  $Z$  is needed to be within a specified degree of accuracy, how much error time withstand.

<sup>1</sup> Throughout this paper will be denoted by  $(X, Y, Z)$ .

4 P. Abad, J.P. Suárez / Journal of Computational and Applied Mathematics 164–165 (2004) 1–10

Taking a simple numerical example of four satellites based on typical values, see [3],  $|\Delta X| \leq 3.19 \times 10^9$  K,  $|\Delta Y| \leq 0.7 \times 10^9$  K and  $|\Delta Z| \leq 5.07 \times 10^9$  K. We may perturb  $t_i$ 's by more than  $3 \times 10^{-8}$  s and then it would lead to the errors in location  $|\Delta X| \leq 90$  m,  $|\Delta Y| \leq 21$  m and  $|\Delta Z| \leq 150$  m.

On the other hand, the general error equation for GPS error analysis illustrates how the satellite geometry can seriously affect the solutions. This equation can be obtained beginning with the fundamental measurements and proceeding through analysis of the effect of various error sources. To account for the estimated value of  $(X, Y, Z)$  and the estimate error  $\Delta E = (\Delta X, \Delta Y, \Delta Z)$ , Eq. (2) can be changed to [5]:

$$\Delta E = G^{-1} \Delta \rho_r^s. \quad (8)$$

If  $\Delta \rho_r^s \leq M$  for all  $s$  and for a given  $M$ , then

$$\Delta E \leq G^{-1} M, \quad (9)$$

where  $G$ , the geometry matrix, is constructed from the set of approximated directions of the satellites in an Earth Centered–Earth Fixed (EC–EF) frame. Then,  $G$  matrix becomes:

$$\begin{pmatrix} \cos(\alpha_1) \cos(\delta_1) & \sin(\alpha_1) \cos(\delta_1) & \sin(\delta_1) & 1 \\ \cos(\alpha_2) \cos(\delta_2) & \sin(\alpha_2) \cos(\delta_2) & \sin(\delta_2) & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Considering (9) we take the same numerical example as previously [3]. We perturb  $M$ 's at the most 10 m, so:

$$\begin{pmatrix} -6.48 & 6.62 & -1.61 & 1.47 \\ -0.31 & 1.25 & 0.40 & 1.17 \\ -8.07 & -9.54 & -3.99 & 2.68 \\ 8.71 & -9.54 & 3.92 & -2.09 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.16 \\ 2.39 \\ 7.98 \\ -0.41 \end{pmatrix},$$

where  $|\Delta X| \leq 1.16$  m,  $|\Delta Y| \leq 2.39$  m and  $|\Delta Z| \leq 7.98$  m.

It should be noted as the two previous numerical examples reveal that the times and geometry affect the solution. Moreover, the values obtained for the  $Z$  seem to have a greater error relative to the  $X$  and  $Y$  coordinates.

### 3. Linear model for the two factor analysis

In this section, we summarize the statistical model we use for the study of the GPS observations: *analysis of variance random effects model* [2]. We briefly explain three concepts: A *factor* is an explanatory variable (A, B, C, ...) studied in an investigation. The different values of a factor are called *levels*. A combination of one level from each factor is a *treatment*. Treatments are applied to experimental units. The measurements of the response variable are used to make comparisons among treatments.

The corresponding linear model is as follows [2]:

$$X_{ijk} = \mu + A_i + B_j + e_{ijk} + (AB)_{ij}, \quad (11)$$

where  $X_{ijk}$ , following a distribution  $N(\mu_{ij}, \sigma^2)$ , denotes the measurement of the response variable for the  $k$ th experimental unit exposed to the  $i$ th level of factor  $A$  and the  $j$ th level of factor  $B$  and  $\mu$  is a constant. Factor  $A$  has  $I$  levels:  $i = 1, \dots, I$  and factor  $B$  has  $J$  levels:  $j = 1, \dots, J$ . The experimental unit range is  $k = 1, \dots, K$  for any treatment.  $e_{ijk}$  is the experimental error and is independent  $N(0, \sigma^2)$ . Factors  $A$  and  $B$  are said to interact  $(AB)_{ij}$  if the effect of factor  $A$  depends on the level of factor  $B$ , or equivalently, if the effect of factor  $B$  depends on the level of factor  $A$ .

The null hypotheses we will study are:

$$\sigma_{A_i}^2 = 0, \quad (12)$$

$$\sigma_{B_j}^2 = 0, \quad (13)$$

$$\sigma_{AB_{ij}}^2 = 0. \quad (14)$$

#### 4. Empirical model: experiment design

The goal in this section is to study the possible influence of two factors in the obtained solution. The statistical model used for the study is the two factor analysis of variance, univariate, random and equilibrated.

The independent variables are factor  $A =$  'number of observations' and factor  $B =$  'time interval between observations'. The dependent variables are the position of the station.

For solving the position and clock error of the station, four satellites observed at one time (1 epoch) are needed; this leads to four equations. For factor  $A$  we define three levels: (1) 5 epochs, (2) 10 epochs and (3) 20 epochs. For factor  $B$  we also define three levels (1)  $\Delta t = 30''$ , (2)  $\Delta t = 90''$  and (3)  $\Delta t = 300''$ .

In any experimental unit, we use six satellites. Each treatment (nine in total) consists of 11 different experimental units corresponding to 11 linear equations systems, see Table 2. Rows in Table 2 represent the different number of epochs and columns are the interval between observations. The time interval studied is 12 h since the orbit of the satellites takes half a day. The data are provided by the European Space Operation Center (ESOC) and are taken from the Maspalomas station MASI in Gran Canaria, Spain.

Table 2  
Experiment description

Epochs	$\Delta t = 30''$	$\Delta t = 90''$	$\Delta t = 300''$
5	11 systems, 30 equations, 8 unknowns	...	...
10	11 systems, 60 equations, 13 unknowns	...	...
20	11 systems, 120 equations, 23 unknowns	...	...

6 P. Abad, J.P. Suárez / Journal of Computational and Applied Mathematics 164-165 (2004) 1-10

Table 3  
Lilliefors test for normality study of variable Z

Epochs	$\Delta t = 30''$	$\Delta t = 90''$	$\Delta t = 300''$
5	0.1945	0.2035	0.1867
10	0.1879	0.1383	0.1746
20	0.1979	0.1621	0.1643

In order to apply the analysis of the variance model, the following assumptions have to be verified [2]:

- (1) Independence of samples.
- (2) Normality of samples distribution.
- (3) Equal variances.

The independence assumption is verified because we choose random observation during the time of study.

The normality assumption can be tested for *Lilliefors test*. This is a *Kolmogorov-Smirnov* approximation where it is not known the population parameters. Using the statistic for a sample with  $k = 11$ , for a significance level of  $\alpha = 0.05$ , the critical value obtained is 0.2490. Table 3 summarizes the results for the nine samples in the Z variable. Can be noted as the computed values are less than 0.2490 and then the null hypotheses are accepted. Repeating the test for X and Y variables we obtain similar results on the null hypotheses. Based on the application of this test we can state that samples distribution are sufficiently close to a normal distribution.

The equal variances can be tested for both factors thanks to *Cochran test* [2] where the statistical null hypothesis is: there is no difference among any variances,  $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2$  for three levels in both factors. For a level of significance 0.05 the critical value for Cochran test for three levels and 33 experimental units is 0.493. The Cochran test computes the ratio  $R = \max \sigma_i^2 / \sum_{i=1}^3 \sigma_i^2$ . For any factor  $R_A = 0.3838 < 0.493$  and  $R_B = 0.3909 < 0.493$ . Therefore, the equal variance assumption cannot be rejected on this basis.

Tables 4-6 present the results of the analysis for the variables X, Y, Z considering  $\alpha = 0.05$ . For the three sources of variation (factor A, B and interaction AB) we provide sum squares (SS), degrees of freedom (df), mean square (MS), and F, the value for the statistical test. The computed tests for the three sources are expressed as

$$F(A) = \frac{MS(A)}{MS(AB)}; \quad F(B) = \frac{MS(B)}{MS(AB)}; \quad F(AB) = \frac{MS(AB)}{MS(Error)}. \quad (15)$$

For the level of significance mentioned it is required the next critical values:  $F_{AB} \in [2.45-2.53]$ ,  $F_A = 6.94$  and  $F_B = 6.94$ . By comparing the test statistics with the critical values of the F distributions, we find that: (1) variables X and Y are not influenced by the studied factors. (2) we can assume that there is not interaction and (3) variable Z is influenced by the studied factors, in this case the variance between treatments is significantly greater than the variance within treatment. Then, the null hypotheses of (12) and (3),  $\sigma_{Ai}^2 = 0$  and  $\sigma_{Bj}^2 = 0$ , respectively, are rejected on this basis.



Table 4  
Statistical analysis of variable  $X$

Source of variation		SS	df	MS	$F$
$A$	Hypothesis	175.231	2	87.616	0.084
	Error	4159.578	4	1039.895	
$B$	Hypothesis	819.899	2	409.949	0.394
	Error	4159.578	4	1039.895	
$AB$ interaction	Hypothesis	4159.578	4	1039.895	0.450
	Error	208.119.616	90	2312.440	

Table 5  
Statistical analysis of variable  $Y$

Source of variation		SS	df	MS	$F$
$A$	Hypothesis	524.886	2	262.443	0.807
	Error	1301.307	4	325.327	
$B$	Hypothesis	243.306	2	121.653	0.374
	Error	1301.307	4	325.327	
$AB$ interaction	Hypothesis	1301.307	4	325.327	0.663
	Error	46.229.843	90	513.665	

Table 6  
Statistical analysis of variable  $Z$

Source of variation		SS	df	MS	$F$
$A$	Hypothesis	625.430	2	312.715	14.626
	Error	85.525	4	21.381	
$B$	Hypothesis	1966.444	2	983.222	45.985
	Error	85.525	4	21.381	
$AB$ interaction	Hypothesis	85.525	4	21.381	0.038
	Error	50.978.605	90	566.429	

In Figs. 1–3 the horizontal axis represents the different number of observations (factor  $A$ ) and the vertical axis represents the different time interval (factor  $B$ ).

Figs. 1 and 2 show that the three graphed lines are not far away, with significance, from a horizontal line. On the other hand, in Fig. 3 for the variable  $Z$  the lines are different, they are separated and are not horizontal with significance.

Rejecting the null hypothesis for the variable  $Z$  suggests that treatment means differ, but does not signify where such differences lie. Descriptive comparisons are helpful in delineating where

8 P. Abad, J.P. Suárez / Journal of Computational and Applied Mathematics 164-165 (2004) 1-10

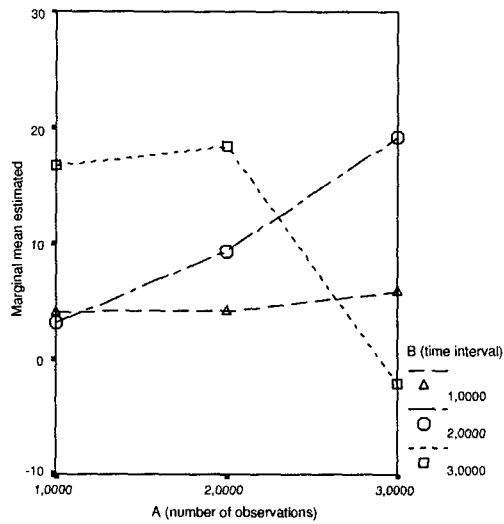


Fig. 1. Marginal mean estimated for X.

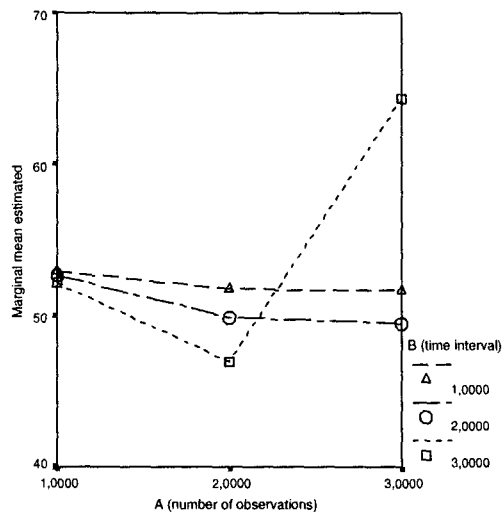


Fig. 2. Marginal mean estimated for variable Y.

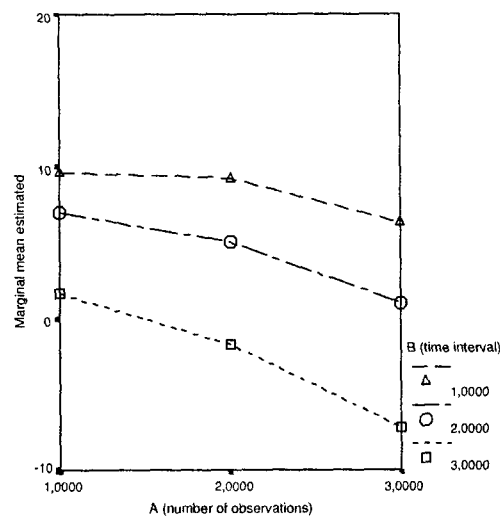


Fig. 3. Marginal mean estimated for variable Z.

Table 7  
HSD test for multiple comparisons

Factor	$\mu_1 - \mu_2$	$\mu_1 - \mu_3$	$\mu_2 - \mu_3$
A (number of observations)	2.65	6.78	4.12
B (time interval)	4.04	10.80	6.76

differences lie, but are inconclusive in their results. Therefore, post hoc multiple comparisons are needed. The *Honestly Significant difference Tukey test* (HSD) enable us to find where the differences lie by pursuing multiple tests. Then the null hypotheses for both factors are (1)  $\mu_1 = \mu_2$ , (2)  $\mu_1 = \mu_3$  and (3)  $\mu_2 = \mu_3$ .

The HSD test reveals that for a level of significance of 0.05,  $HSD = 2.72$ . In Table 7 it is observed that are five values which are greater than HSD, therefore the null hypotheses are rejected. In completing all six tests using HSD we find that comparison for factor A,  $\mu_1$  vs.  $\mu_2$  is not significant. All other comparisons are significant.

## 5. Discussions and conclusions

In this paper, we provide a statistical explanation of the greater inaccuracy of the vertical coordinate relative to the two horizontal coordinates arising in the resolution of GPS equations. From the statistical study on this paper we can conclude that the X and Y solution are independent of the election of the time interval between observations and the number of observations factors. However,

10 P. Abad, J.P. Suárez / Journal of Computational and Applied Mathematics 164–165 (2004) 1–10

Z unknown shows a significant effect in the manner that time interval and the number of observations are chosen. We next summarize that result:

- (1) (Variable  $X$ ),  $\sigma_{b_j}^2 = \sigma_{A_i}^2 = 0$ , hypothesis accepted,
- (2) (Variable  $Y$ ),  $\sigma_{b_j}^2 = \sigma_{A_i}^2 = 0$ , hypothesis accepted,
- (3) (Variable  $Z$ ),  $\sigma_{b_j}^2 = \sigma_{A_i}^2 = 0$ , hypothesis rejected,
- (4) (Variable  $X, Y, Z$ ),  $\sigma_{ABij}^2 = 0$ , hypothesis accepted.

Although the three coordinates  $X, Y$  and  $Z$  represent the same kind of unknown (station position), we statistically found that parameter  $Z$  is not independent of the elected equation system.

This seems to be in concordance with numerical examples derived from the fundamental error equation in GPS error analysis and the perturbation analysis by the implicit function theorem as pointed out in Section 2. In this case, the greater error observed for the  $Z$  coordinate may indicate unstableness of  $Z$  caused by variation in both time and geometry, as our statistical study shows here. When we vary the number of equations (factor  $A$ ) it is included new time unknowns and new geometry configurations. Moreover, when we vary the time interval between observations (factor  $B$ ), it is changed the geometry configuration. It can be understood as perturbation on times in (7) and perturbation on geometry in (9).

Additionally, large correlations has been experimentally tested between vertical errors and timing errors in general, see [4,5]. This fact also may support our basis of the greater inaccuracy of the vertical coordinate relative to the horizontal coordinates when times is perturbed.

A further study on the covariances matrices from the least-squares method may provide qualitative information about the differences among the elected equation system.

#### Acknowledgements

The authors thank the anonymous referees for their helpful suggestions and comments.

#### References

- [1] P. Heroux, J. Kouba, GPS precise Point Positioning with a difference, Geomatics'95, Ottawa, Canada, 1995.
- [2] J. Neter, W. Wasserman, M.H. Kutner, Applied Linear Statistical Models, Richard D. Irvin Inc., Homewood, IL, 1985.
- [3] G. Nord, D. Jabon, J. Nord, The global positioning system and the implicit function theorem, SIAM Rev. 40 (3) (1998) 692–696.
- [4] M.C. Olynik, Temporal characteristics of GPS error source and their impact on relative positioning, M.Sc. Thesis, Department of Geomatics Engineering, Calgary, Alberta, July 2002.
- [5] B.W. Parkinson, in: B.W. Parkinson, J.J. Spilker (Eds.), GPS Error analysis, in Global Positioning System: Theory and Applications. Vol. I, American Institute of Aeronautics and Astronautics Inc., New York, 1996.
- [6] G. Strang, K. Borre, Linear Algebra, Geodesy, and GPS, Wellesley-Cambridge Press, Wellesley, 1997.

# Bibliografía

- [1] P. Abad, J.P. Suárez, *Bi-factorial analysis for resolution of GPS equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics, 164, pp. 1-10, (2004).
- [2] E. Anderson, Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen, *LAPACK User's Guide*, Third Edition, SIAM, Philadelphia, (1999).
- [3] G. Beutler, R. Weber, U. Hugentobler, A. Verdun, *GPS for Geodesy*, Springer-Verlag, (1998).
- [4] A. Björck, R.J. Plemmons, H. Schneider, *Large-Scale matrix Problems*, North-Holland New York, (1981).
- [5] R.D. Braatz, M. Morari, *Minimizing the Euclidean Condition Number*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, Vol. 32, N. 6, pp. 1763-1768, Noviembre (1994).
- [6] T. Braconnier, R.A. McCoy, V. Toumazou, *Using the Field of Values for Pseudospectra Generation*, CERFACS Technical Report TR/PA/97/28, Toulouse, France, Septiembre 17, (1997).
- [7] J. F. Carpraux, *Some Software Tools to Control the Accuracy in Scientific Computing*, Rapport de Recherche N. 2382, INRIA, (1994).
- [8] S. Chandrasekaran, I.C.F. Ipsen, *On the sensitivity of solution components in linear systems of equations*, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.* Vol 16, N. 1, pp. 736-754, Enero, (1995).
- [9] X. W. Chang, C.C. Paige, G.W. Stewart, *Perturbation analyses for the Factorization Theorem*, *SIAM Review*, (1998).

- [10] I.S. Duff, A.M. Erisman, J.K. Reid, *Direct methods for Sparse Matrices*. Oxford University Press, (1986).
- [11] I.S. Duff, G.W. Stewart, *Sparse Matrix Proceedings*, SIAM, Philadelphia PA, (1979).
- [12] D.A. Cicci, *Optimal A priori Covariance Selection for the solution of Ill-Conditioned Nonlinear Inverse Problems*, Doctoral dissertation, The University of Texas at Austin, Department of Aerospace Engineering and Engineering Mechanics, Agosto, (1987).
- [13] D.A. Cicci, *Use of Multiple Observation Types in Ridge-Type Estimation Methods*, The journal of the astronautical Sciences, Vol. 38n N. 2, pp. 215-227, (1990).
- [14] D.A. Cicci, *Improved Gravity Field Determination in Ill-Conditioned Inverse Problems*, Computers and Geosciences Vol. 18, N. 5, pp. 509-516, (1992).
- [15] D.A. Cicci, B. D. Tapley, *Optimal Solutions to Unobservable Orbit Determination Problems*, Celestial Mechanics, Vol. 44, pp. 339-363, (1988).
- [16] D.A. Cicci, R.L. Hall, *Improved estimation/prediction in quick-look orbit determination problems*, The Journal of the Astronomical Sciences 40 (I), pp. 91-106, (1992).
- [17] N. Draper, H. Smith, *Applied Regression Analysis*, Second Edition, John Wiley and Sons, (1981).
- [18] F. ztrk, F. Akdeniz, *Ill-conditioning and multicollinearity*, Elsevier, Linear Algebra and its Applications, 321, pp. 295-305, (2000).
- [19] J. Fox, G. Monette, *Generalized Collinearity Diagnostics*, J. American Statistician Assoc., (1998).
- [20] J. L. de la Fuente, *Tecnologías Computacionales para Sistemas de Ecuaciones, Optimización Lineal y Entera*, Editorial Reverté, S. A., (1993).
- [21] A. George, E. Ng, *An Implementation of Gaussian Elimination with Partial Pivoting for Sparse Systems*, SIAM J. Sci. Statist. Comput. 6, pp. 390-409, (1985).

- [22] S.K. Godunov, *Spectral portraits of matrices and criteria of spectrum dichotomy*, J. Herzberger and L. Atanassova editors, Computer arithmetic and enclosure methods. North-Holland and IMACS, Octubre, (1992).
- [23] H. Golub, F. Van Loan, *MATRIX Computation*, Johns Hopkins University Press, (1989).
- [24] R.F. Gunst, *Regression Analysis with Multicollinear Predictor Variable: Definition Detection and Effects*, Comm. Statistician Theory Methods, (1983).
- [25] P. Heroux, J. Kouba, *GPS precise Point Positioning with a difference*, Geomatics'95, Ottawa, Canada, (1995).
- [26] N.B. Hennemberg, *Redes Geodésicas de alta precisión. III Curso de Geodesia Superior*. Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM), N. 150, Madrid, (1986).
- [27] E.T. Hesper, *Investigations on the use of GPS for geodetic and orbit determination applications*, Report LR-649, Delft University Press, (1991).
- [28] D.R. Hill, *Experiments in computational matrix algebra*. New York, Random House, (1988)
- [29] A.E. Hoerl, R.W. Kennard, *Ridge-regression: Biased estimation for non-orthogonal problems*, Technometrics 12 (1), pp. 55-67, (1970)
- [30] Interface Control Document ICD-GPS-200, *Navstar GPS Space Segment/Navigation Users Interfaces*, Arinc Research Corporation, (2000).
- [31] J. Hurn, *GPS, a Guide to the Next Utility*, Ed. Trimble Navigation, USA, (1989).
- [32] J. Hurn, *Differential GPS Explained*, Ed. Trimble Navigation, USA, (1993).
- [33] IGS, International GPS Service for Geodynamics, Web site, <http://igsceb.jpl.nasa.gov>, October, (1997).
- [34] G.G. Judge, M.E. Bock, *Handbook of Econometrics*, Volume I, North Holland Publishing Company, (1983).

- [35] W. Kahan, *Numerical Linear Algebra*, Canadian Math. Bull. 9, pp. 757-801, (1966).
- [36] J. Kouba, P. Heroux, *GPS precise Point Positioning Using IGS Orbit Products*, Geodetic Survey Division, Natural Resources Canada, Ottawa, Septiembre, (2000).
- [37] G. Lachapelle, *Absolute GPS Positioning Using GPS post-Mission Orbits and Satellite clock Corrections*. Journal of Geodesy, Official Journal of the International Association of Geodesy, 70, 6, pp. 562-571, (1996).
- [38] G. Lachapelle, M.E. Cannon, W. Qiu, C. Varner, *Precise Aircraft single Point Positioning at the 1-m Level Using Permanent Tracking Networks Data*, Contribution to directions 1995, GPS World (December), Vol 5, N. 12, pp. 20-22, (1994).
- [39] S. I. Larimore, *An Approximate Minimum Degree Column Ordering Algorithm*, MS Thesis, Dept. of Computer and Information Science and Engineering, University of Florida, Gainesville, FL., (1998).
- [40] P. F. Lavallée, M. Sadkane, *Une Méthode Stable de Bloc-Diagonalisation de matrices: Application au Calcul de Portrait Spectral*, Rapport de Recherche N. 3141, INRIA, (1997).
- [41] A. Leick, *GPS Satellite Surveying*, A Wiley-Interscience Publication, Eds. John Wiley and Sons, Inc., New York, Singapore, (1995).
- [42] P. Manneback, *On Some Numerical Methods for Solving Large Sparse Linear Least Squares Problems*. Ph.D. Dissertation, Facultés Universitaires Notre-Dame de la Paix, Namur, Bélgica, (1985).
- [43] D.W. Marquardt, *An algorithm for least-squares estimation of non-linear parameters*, J. Society of Industrial and Appl. Math. 11 (2) 431-441, (1963).
- [44] D.W. Marquardt, *Generalized, Ridge Regression, Biased Linear Estimation, and Nonlinear Estimation*, Technometrics, 12, 591-612, (1970).
- [45] O. A. Marques, V. Toumazou, *Spectral Portrait Computation by a Lanczos Methods*, Technical Report TR/PA/95/05, CERFACS Toulouse, France, Febrero, (1995).



- [46] MathWorks, *MATLAB.6 The Language of Technical Computing*, Inc., (2004).
- [47] MIT, *The GPS and Geodynamics group in the Massachusetts Institute of Technology*, Web site <http://www-gpsg.mit.edu>, (2005)
- [48] J. Neter, W. Wasserman, M.H. Kutner, *Applied linear statistical models*, Richard D. Irwin Inc., (1985).
- [49] NGS, *National Geodetic Survey*, Web site <http://sinbad.ngs.noaa.gov/GPS/GPS.html>, (2005)
- [50] G. Nord, D. Jabon, J. Nord, *The Global Positioning System and the Implicit Function theorem*, SIAM Review, 40 (3) 692-696, (1998).
- [51] M.C. Olynik, *Temporal Characteristics of GPS Error Source and Their Impact on Relative Positioning*, MSc. Thesis, Department of Geomatics Engineering, Calgary, Alberta, (2002).
- [52] M.C. Olynik, M.E. Cannon, G. Lachapelle, W. Gelatka, J. Davis, *Precise Relative Positioning Using Absolute GPS*. Proceedings of Kinematic International Symposium, Banff, June 5-8, Dept. of Geomatics Engineering, Univ. of Calgary, Alberta, (2001).
- [53] W. Gurtner, *RINEX: The Receiver Independent Exchange Format Version 2*. Astronomical Institute, University of Berne, (1998).
- [54] A. E. Roy, *Orbital Motion*. (Third edition), University Glasgow, (1988).
- [55] G. Seeber, *Satellite Geodesy*. Ed. De Gruyter, Berlin, (1993).
- [56] M. J. Sevilla, *Formulación de Modelos Matemáticos en la Compensación de Redes Geodésicas*. Instituto de Astronomía y Geodesia (CSIC-UCM), número 148, Madrid, (1986).
- [57] B.W. Parkinson, *Global Positioning System: Theory and Applications*, Volume I and II, American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., (1996).
- [58] G. Stewart, J. Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, New York, (1990).

- [59] G. Strang, *The mathematics of GPS*, SIAM News, 30(5), (1997).
- [60] G. Strang, K. Borre, *Linear algebra, geodesy, and GPS*, Wellesley-Cambridge Press, (1997).
- [61] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications*, 2nd ed., Academic Press, New York, (1980).
- [62] T.K. Sarker, D. D. Weiner, V. K. Jain, *Some Mathematical Considerations in Dealing with the Inverse Problem*, Rochester Institute of Technology Technical Report TR-80-3, Rochester, New York, Abril, (1980).
- [63] S.D. Silvey, *Multicollinearity and imprecise estimation*, Technometrics 11 539-552, (1969).
- [64] R. Skeel, *Scaling for Numerical Stability in Gaussian elimination*, Journal of ACM, 26 pp. 494-526, (1979).
- [65] R. Barrett, M. Berry, T. F. Chan, J. Demmel, J. Donato, J. Dongarra, V. Eijkhout, R. Pozo, C. Romine, H. Van der Vorst, *Templates for the Solution of Linear Systems: Building Blocks for Iterative Methods* SIAM, Philadelphia, PA., (1994).
- [66] P. J. G. Teunissen, *Dynamic data processing. Recursive least-squares*, Delft University Press, The Netherlands, (2001).
- [67] R. Thisted, *Multicollinearity, Information, and Ridge Regression*, Technical Report N. 66, Department of Statistics, University of Chicago, (1978).
- [68] A.N. Tikhonov, V.Y. Arsenin, *Solutions of Ill-posed Problems*, Wiley, New York, (1977).
- [69] P. Vaniček, E. Krakiwsky, *Geodesy, the Concepts*. Elsevier Science B. V., (1995).
- [70] Office of the Press Secretary, *Statement by the President Regarding the United States Decision to Stop Degrading Global Positioning System Accuracy*, Mayo, (2000).
- [71] T. Wright, L. N. Trefethen, *Oxford University Computing Laboratory, Pseudospectra GUI*, Web site

- <http://web.comlab.ox.ac.uk/oucl/work/tom.wright/psgui/guidocs.html>,  
(1994-2004)
- [72] T. Wright, L. N. Trefethen, *Eigenvalues and Pseudospectra of Rectangular Matrices*, Oxford University Computing Laboratory, Report N. 01/13 Julio, (2001)
- [73] X. W. Chang, C. C. Paige, *An Orthogonal Transformation Algorithm for GPS Positioning*, SIAM J. Sci. Comput. vol. 24 N. 5, pp. 1710-1732, (2003).
- [74] J.F. Zumberge, M.B. Heflin, D.C. Jefferson, M.M. Watkins, F.H. Webb, *Precise point positioning for the efficient and robust analysis of GPS data from large networks*, J. Geophys. Res., 102, pp. 5005-5017, (1998).
- [75] Z. Zlatev, *Computational Methods for General Sparse Matrices*, Kluwer Academic Publishers, (1991).